



Nieuwe vrienden

Rein Nobel, mijn gewaardeerde en naaste collega op het gebied van kansrekening en operations research in de tijd dat ik nog aan de universiteit werkzaam was, stuurde mij onlangs een nogal absurdistische opgave over kansrekening. Een opgave die volledig past in het kader van de tentamenopgaven waarmee hij befaamd en berucht was onder de studenten: creatieve opgaven - soms humoristisch maar bij nadere lezing meestal met een serieuze ondertoon - die vaak direct aansloten bij de dagelijkse realiteit en waarin ook nog wel eens instituties en personen op de hak genomen werden. De opgave die hij mij onlangs stuurde luidt als volgt:

De eerste fusiebesprekingen tussen de Noord-Koreaanse en Zuid-Koreaanse voetbalbonden vinden plaats in Jeruzalem. De Israëlische premier Naftali Bennett, die als groot liefhebber van het Koreaanse voetbal de gastheer is van deze mega-gebeurtenis, besluit de 25 deelnemers van de beide belligerenten voor de lunch plaats te laten nemen aan een grote ronde tafel met 25 genummerde zitplaatsen. In een poging het ijs tussen de onderhandelaars te breken laat Bennett voorafgaande aan de lunch een schaal rondgaan met daarop 25 lootjes en hij verzoekt al zijn gasten een lootje te trekken. Iedere onderhandelaar neemt vervolgens plaats

op de stoel met zijn/haar getrokken nummer. Na de lunch worden de stroef verlopende onderhandelingen in groepjes voortgezet, maar voor het diner worden opnieuw alle onderhandelaars aan de grote ronde tafel genood waar dit keer premier Bennett zijn echtgenote Gilat, niet aanwezig bij de lunch en daardoor niet op de hoogte van de eerdere tafelschikking, inschakelt bij de verdeling van de zitplaatsen, in de hoop dat zij met haar grote mensenkennis en vrouwelijke intuïtie een meer de vrede bevorderende tafelschikking uit de hoge hoed zal weten te toveren dan de eerdere door het blinde lot gerealiseerde tafelschikking van de lunch. Tijdens het diner waar de Teperberg en Recanati wijnen rijkelijk geschonken en gedronken worden en de gasten ter afsluiting van het samenzijn kunnen genieten van Gilat's vermaarde desserts (zoals bekend is zij een 'professionele' pastrychef), merkt Naftali Bennett in zijn slottoespraak op dat tijdens het diner iedereen andere gasten naast zich had zitten dan tijdens de lunch. Hij vreest dat daardoor eventuele gedurende de lunch ontstane prille toenaderingen tussen de gasten geen vervolg hebben kunnen krijgen tijdens het diner, maar hij spreekt ook de hoop uit dat de desserts van zijn echtgenote, aangevuld met enkele glazen

Mount Hermon Moscato, de beroemde Israëli-sche dessertwijn van de Golanhoogten, alsnog een pacificerende rol hebben kunnen spelen. Als later op de persconferentie premier Bennett verslag doet van de moeizame onderhandelingen en terloops ook vertelt hoe de twee tafelschikkingen van de lunch en het diner tot stand gekomen zijn vraagt onze sterverslaggever van de Ecotribune - het blad voor econometriestudenten aan de Vrije Universiteit - zich af wat de kans is dat tijdens het diner inderdaad niemand naast een lunch-disge-noot gezeten heeft.

Achter deze absurdistische kansopgave gaat een interes-sant en uitdagend kansprobleem schuil dat in één enkele zin geformuleerd kan worden:

'Stel dat n personen volgens een of ander pro-tocol aan een ronde tafel geplaatst worden en dat vervolgens de tafelschikking veranderd wordt door de personen random een zitplaats toe te wijzen. Wat is de kans dat in de nieuwe tafel-schikking geen twee personen naast elkaar zitten die in de oorspronkelijke tafelschikking wel naast elkaar zaten?'

Een combinatorisch kans probleem waarvoor het bijzon-der lastig lijkt om tot een analytische oplossing te komen. In een dergelijke situatie brengt Monte Carlo simulatie uitkomst om snel een antwoord te vinden: de gezochte kans is ongeveer 11,4% voor $n = 25$. Voor n voldoende groot kan een simpele benaderingsoplossing gevonden worden met de Poisson heuristiek. Dit gaat als volgt. Denk in dat een Bernoulli-achtig deelexperiment wordt uitgevoerd voor elk van de n personen. Voor een gege-ven persoon wordt dit experiment succesvol genoemd als deze persoon in de nieuwe random tafelschikking iemand rechts van hem/haar treft die in de oorspron-kelijke tafelschikking rechts of links van hem/haar zat. De gezochte kans is gelijk aan de kans dat geen enkel

deelexperiment succesvol is. De kans dat een gegeven deelexperiment succesvol is wordt gegeven door $2/(n-1)$. De verwachtingswaarde van het aantal succesvolle deelexperimenten is dus $2n/(n-1)$. De deelexperimenten zijn niet onafhankelijk van elkaar, maar voor n voldoende groot zijn de deelexperimenten als 'bijna-onafhankelijk' te beschouwen. Je kunt dan de Poisson heuristiek toe-passen. Deze heuristiek geeft dat de kans op geen en-kel succesvol deelexperiment bij goede benadering gelijk is aan $e^{-2n/(n-1)}$. Voor $n = 25$ vind je de benaderingswaarde 0,1245. De benaderingswaarde van 12,5% ligt opmerkelijk dicht bij de simulatiewaarde van 11,4%. Voor n voldoen-de groot geeft de heuristiek een uitstekende benadering (voor $n = 50$ is de benaderingswaarde 13,0% waar simu-latie de waarde 12,5% geeft). De benaderingsformule is ook bruikbaar voor de situatie van een lange rechte tafel waar de n personen aan één kant van de tafel geplaatst worden. Voor zowel dit model als het model met een ron-de tafel kan exact worden aangetoond dat voor n naar oneindig de formule $2^k e^{-2}/k!$ voor $k = 0,1,\dots$ geldt voor de limietkans dat in de nieuwe random tafelschikking er pre-cies k personen zijn met rechts van zich iemand die ook directe buur was in de oorspronkelijke tafelschikking. Een andere variant van het tafelschikkingsprobleem is een lange rechte tafel waaraan een even aantal personen aan beide kanten van de tafel geplaatst worden en de kans wordt gezocht dat in de nieuwe tafelschikking geen twee personen naast elkaar of direct tegenover elkaar zitten waar dat in de oorspronkelijke tafelschikking wel het ge-val was. Werk aan de winkel!

HENK TIJMS is emeritus-hoogleraar operations research aan de Vrije Universiteit en auteur van diverse leerboeken over operations research en kansrekening. Zijn meest recente boe-ken zijn *Basic probability; What every math student should know* (World Scientific Press, 2021, 2e druk) en *Operations Research; An introduction to models and methods* met de co-auteurs R. Boucherie en A. Braaksma, (World Scientific Press, 2021). Homepage: <https://personal.vu.nl/h.c.tijms/> E-mail: h.c.tijms@xs4all.nl