



Foto: Alejandro Garay via Pixabay

## DE DODELIJKE GLAZEN BRUG

De Squid Game is één van de meest bekeken Netflix-series die ooit uitgezonden is. In een krankzinnig sadistische ratrace – gebaseerd op ouderwetse kinderspelletjes – krijgen een paar honderd aan lager wal geraakte mensen de kans om nog wat van hun leven te maken. Hoewel de serie een leeftijdsgrens van 16 jaar en ouder kende, was de serie onder basisschoolleerlingen razend populair en werd massaal nagespeeld op het schoolplein, tot ongenoegen van ouders en leerkrachten. In het bloedstollende spel Glass Stepping Stones uit de zevende aflevering van de serie moeten 16 deelnemers een brug met 18 treden oversteken<sup>1</sup>. Eén voor één proberen de deelnemers veilig de overkant te bereiken. Bij elke trede heeft een deelnemer de keuze om het linkerpaneel of het rechterpaneel te kiezen, waarbij één van de twee panelen uit normaal glas bestaat dat meteen breekt als er op wordt gestapt en de andere paneel gehard glas bevat, waar veilig op gestapt kan worden zonder dat het glas breekt. Voor elke trede is er een kans van 50% dat het linkerpaneel gehard glas heeft, en als de linkerkant gehard glas heeft, heeft de rechterkant dat niet (en omgekeerd). Het is onmogelijk om het verschil te zien tussen het normale en het geharde glas. Het slechte nieuws is dat als een deelnemer op een paneel met normaal glas springt, het glas breekt en de deelnemer naar beneden tuimelt met de dood als gevolg. Het goede nieuws is dat het offer niet voor niets is geweest, want het gebroken paneel geeft alle overgebleven deelnemers waardevolle informatie over wat de juiste weg naar veiligheid is. Verder wordt verondersteld dat elke deelnemer ook de informatie heeft wat de veilige panelen zijn die door voorgaande deelnemers gekozen zijn. In volgorde probeert elke deelnemer de brug over te steken en de deelnemer blijft in beweging totdat de deelnemer ofwel succesvol alle 18 treden op de brug heeft overgestoken, ofwel tussentijds naar beneden is getuimeld. Wat is het verwachte

aantal overlevende deelnemers, wat is voor elke deelnemer de kans op overleven en wat is de kansverdeling van het aantal deelnemers dat overleeft?

Dit spel is dodelijker dan het spel van Russisch roulette. Het Markovketen concept is ideaal voor een kanstheoretische analyse van het spel. Beschouw een absorberende Markovketen met 20 toestanden  $i = 0, 1, \dots, 18, 19$ . Toestand  $i$  met  $1 \leq i \leq 18$  betekent dat het spel gevorderd is tot trede  $i$  waar echter echter een deelnemer op het normale glas van deze trede gesprongen is en jammerlijk het leven gelaten heeft, toestand 19 betekent dat een deelnemer veilig op trede 18 beland is en dus de overkant bereikt heeft, en toestand 0 is een hulptoestand die het begin van het spel markeert. Toestand 19 wordt genomen als een absorberende toestand van de Markovketen, dat wil zeggen als het proces toestand 19 bereikt heeft dan blijft het daar in. Voor  $i = 0, 1, \dots, 18$ , worden voor de Markovketen de één-staps overgangskansen  $p_{ij}$  van toestand  $i$  naar toestand  $j$  gegeven door

$$p_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} \text{ voor } j = i + 1, \dots, 18 \text{ en } p_{i,19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{18-i}.$$

Voor toestand 19 is  $p_{19,19} = 1$  en de overige  $p_{ij}$  zijn 0. Laat  $\mathbf{P}$  de  $20 \times 20$  matrix van één-staps overgangskansen zijn. De simpele berekeningen gaan nu als volgt. De matrix producten  $\mathbf{P}^k$  worden berekend voor  $k = 1, \dots, 16$ . Noteer met  $a_k$  de kans dat deelnemer  $k$  overleeft en met  $d_k$  de kans dat precies  $k$  deelnemers overleven voor  $k = 0, 1, \dots, 16$ . Dan

$$a_k = p_{0,19}^{(k)} \text{ voor } k = 0, 1, \dots, 16,$$

dus  $a_k$  wordt gegeven door het  $(0, 19)$ de element van  $\mathbf{P}^k$ . De  $d_j$ 's kunnen vervolgens worden berekend met

$$d_{16-k+1} = a_k - a_{k-1} \text{ for } k = 1, 2, \dots, 16,$$

waarbij  $a_0 = 0$ . Immers  $a_k$  geeft ook de kans dat  $16-k+1$  of meer deelnemers overleven, omdat elke deelnemer precies weet wat de paneelkeuzes van de voorgaande deelnemer zijn geweest. Dus als deelnemer  $k$  veilig de overkant bereikt, dan bereiken ook degenen na deelnemer  $k$  veilig de overkant. Dit betekent dat de kans dat in totaal  $d-k+1$  deelnemers overleven gevonden wordt door de kans  $a_{k-1}$  af te trekken van de kans  $a_k$  voor  $k$  ongelijk aan nul. De kans  $d_0$  wordt uiteraard gegeven door  $1 - \sum_{k=1}^{16} d_k$ . De verwachte waarde van het aantal overlevende deelnemers wordt berekend als  $\sum_{k=1}^{16} d_k$ . De matrix berekeningen leiden tot

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,000, a_2 = 0,000, a_3 = 0,001, a_4 = 0,004, \\ a_5 &= 0,015, a_6 = 0,048, a_7 = 0,119, a_8 = 0,240, \\ a_9 &= 0,407, a_{10} = 0,593, a_{11} = 0,760, a_{12} = 0,881, \\ a_{13} &= 0,952, a_{14} = 0,985, a_{15} = 0,996, a_{16} = 0,999. \end{aligned}$$

De verwachte waarde van het aantal overlevenden is 7,000076, een waarde vrijwel gelijk aan 7 (in de Netflix-episode was het werkelijke aantal overlevenden gelijk aan 3, een opmerkelijk klein aantal in het licht van  $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 0,047$ ). De waarde 7 krijg je met het volgende heuristische argument: als het aantal treden groot genoeg is, dan is het aantal treden waarvan de samenstelling door een deelnemer onthuld wordt bij benadering geometrisch verdeeld met parameter  $1/2$  en verwachtingswaarde 2, en dit maakt het plausibel dat gemiddeld genomen ongeveer 9 deelnemers moeten worden opgeofferd opdat de resterende  $16 - 9 = 7$  deelnemers veilig de overkant kunnen bereiken. Een ware slachting onder de deelnemers zou het geval zijn geweest als de spelers alleen de kapotte panelen hadden kunnen zien en geen verdere informatie hadden gehad. Simulatie lijkt de enige praktische aanpak voor de probabilistische analyse van deze variant. Honderdduizend simulatie runs geven de schatting 0,24 voor het verwachte aantal overlevenden en de schatting 0,11 voor de kans dat de laatste deelnemer overleeft.

NOOT

1. <https://www.youtube.com/watch?v=19oFNyuo2o>

HENK TIJMS is emeritus-hoogleraar operations research aan de Vrije Universiteit en auteur van diverse leerboeken over operations research en kansrekening. Zijn meest recente boeken zijn *Basic probability; What every math student should know* (World Scientific Press, 2021, 2e druk) en *Operations Research; An introduction to models and methods* met de co-auteurs R. Boucherie en A. Braaksma, (World Scientific Press, 2021). Homepage: <https://personal.vu.nl/h.c.tijms/> E-mail: [h.c.tijms@xs4all.nl](mailto:h.c.tijms@xs4all.nl)



## Good news from Young Statisticians

On May 3<sup>rd</sup> of 2021, the Young Statisticians section celebrated its 10<sup>th</sup> anniversary; on November 11<sup>th</sup>, current and former board members gathered to raise a glass to this occasion. We enjoyed a delicious dinner at Scarlatti in Leiden and concluded the evening with a Young Statisticians anniversary cake. The current board members were curious to hear more about the stories and experiences of the previous boards and received many tips on the organization of future events. We received helpful advice on pub quiz topics, discussed which of all past Young Statisticians logos was the best, and listened to mushroom hunting adventures.

Due to the corona measures, we unfortunately had to cancel our traditional New Year's drinks. However, we are definitely planning to organize various offline events again in the 'measure-low' months. So keep an eye on our newsletter (and that of the VVSOR) for the dates!



## LEDEN GEZOCHT VOOR DE WERKGROEP OPEN STATISTICA

Afgelopen jaar is op de ALV door een aantal leden de wens uitgesproken om van *Statistica Neerlandica* een volledig *open access* blad te maken, mogelijk ook zonder *article processing charge*. Dit vanwege de evidente voordelen die *open science*, en *open access* in het bijzonder, met zich meedragen.

Zo'n wijziging is echter niet zonder gevolgen. *Statistica Neerlandica* werkt momenteel succesvol samen met Wiley en krijgt vanuit de uitgever de nodige support. Daarnaast is *Statistica* een grote bron van inkomsten voor de vereniging: de inkomsten uit royalties van Wiley zijn van dezelfde orde grootte als de inkomsten uit contributies.

Bij een eventuele structuurwijziging moeten we dus niet over één nacht ijs gaan. Op de Algemene Ledenvergadering van 17 maart zal daarom een werkgroep Open Statistica worden opgericht. De nieuwe werkgroep gaat zich verdiepen in verschillende mogelijkheden om meer open access bij *Statistica Neerlandica* te bewerkstelligen en de consequenties van die mogelijkheden. Op de ALV van 2023 zal de werkgroep verschillende scenario's presenteren.

Heb je interesse om deel te nemen aan deze werkgroep? Neem dan contact op met het bestuur, [db@vvsor.nl](mailto:db@vvsor.nl).