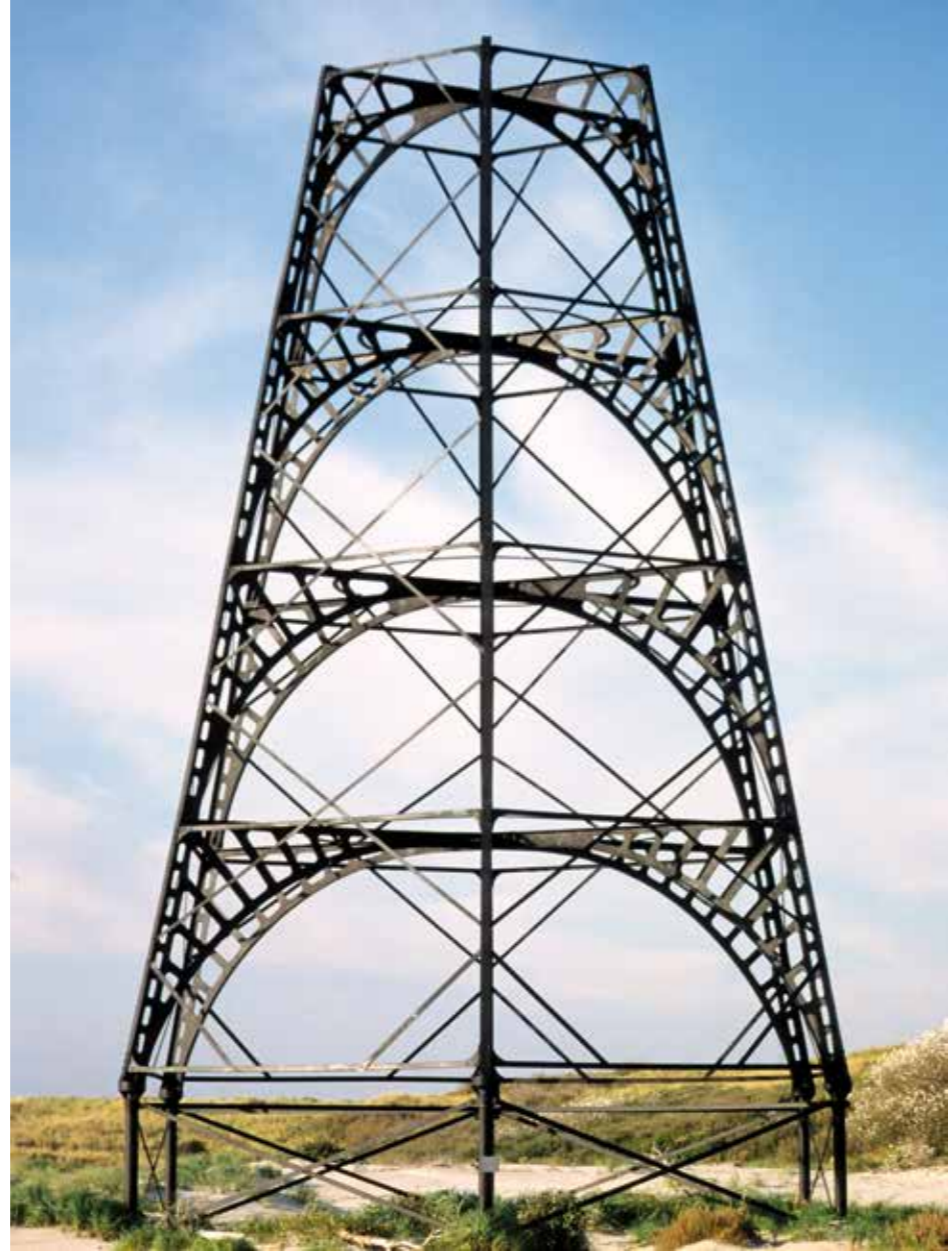


Nederland heeft tienduizenden rijksmonumenten die je op een mooie dag met de fiets kunt bezoeken. Maar heb je je al eens afgevraagd wat de kortste fietsroute langs al deze monumenten is? De oplossing, met een lengte van 20.253.062 meter is, op moment van schrijven, het grootste optimaal opgeloste handelsreizigersprobleem ter wereld. In dit artikel leggen we meer uit over de achtergrond en de technieken voor het oplossen van deze uitdaging.



De Emders Kaap op Rottumeroog. Foto: Rijkswaterstaat | Rob Jungcurt CC

RECORD-HANDELSREIZIGERSPROBLEEM

De kortste route langs 57.912 rijksmonumenten

FRANS DE RUITER

In het najaar vindt de jaarlijkse Open Monumentendag plaats. In het tweede weekend van september openen duizenden monumenten gratis hun deuren voor publiek. Een drukbezocht evenement dat natuurlijk de nodige voorbereiding vergt van deze bijzondere locaties. Een lange aanloop was er ook voor het team van CQM, Bill Cook (hoogleraar aan de Universiteit van Waterloo in Canada) en Keld Helsgaun (Universiteit van Roskilde in Denemarken). Samen zijn zij de uitdaging aangegaan om de kortste fietsroute te vinden waarmee je alle 57.912 locaties kunt bezoeken. Om dit te kunnen bepalen moet je

eerst alle afstanden tussen de locaties weten en vervolgens nog een van de moeilijkste wiskundige problemen oplossen: het handelsreizigersprobleem.

Historische records

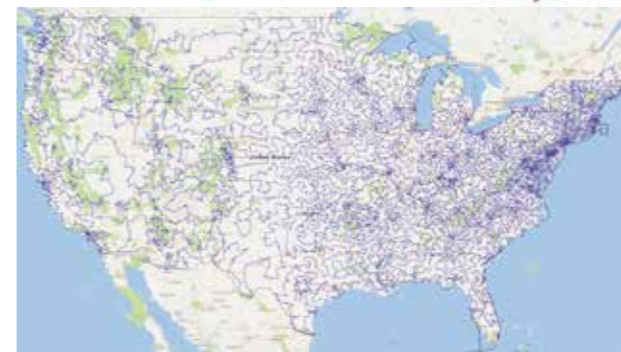
Het probleem om de kortste rondrit te vinden langs een aantal locaties, gegeven de afstanden tussen alle punten, wordt het handelsreizigersprobleem genoemd (*traveling salesman problem*). Het vinden van een oplossing voor

dit probleem, én bewijzen dat het de kortste is, wordt al decennia als een grote uitdaging gezien. In 1954 werd het eerste record gevestigd, toen Dantzig, Fulkerson en Johnson een methode beschreven voor de kortste rondrit langs 49 Amerikaanse steden over autowegen. In 1977 werd het record aangescherpt naar 120 steden voor een rondrit door wat toen West-Duitsland was door Groetschel. Na deze tijd werden de meeste records voor het handelsreizigersprobleem bedacht voor routes die geometrisch waren: locaties werden punten op een stuk papier en de afstanden een rechte lijn tussen de punten. De logische reden hiervoor was dat het lastig wordt om echte afstanden te bepalen op wegenkaarten. In die tijd werden afstandstabellen uit atlanten gebruikt, die alleen de afstanden tussen grote steden bevatten. Voor slechts 100 steden heb je $100 \times 99 = 9.900$ afstanden nodig om

alle paren te krijgen. Zelfs als je aanneemt dat van A naar B reizen dezelfde afstand is als andersom, van B naar A reizen, moet je tabel nog steeds duizenden afstanden bevatten. Enkele jaren geleden werden door een team onder leiding van Bill Cook wel weer grote problemen op wegenkaarten opgelost. In 2016 is de optimale route gevonden voor 49.603 Amerikaanse monumenten en in 2018 een ludieke kortste kroegentocht langs alle 49.687 pubs in het Verenigd Koninkrijk. Al deze routes maakten gebruik van loopafstanden uitgerekend door Google Maps.

Data over 57.912 monumenten

49.603 monumenten in Amerika is natuurlijk een erg indrukwekkend aantal. Maar we moeten niet vergeten dat we in Nederland ook een hele rijke historie hebben met veel Nederlands cultureel erfgoed. Uit het Rijksmonumentenregister hebben we een lijst van 63.287 monumenten kunnen halen. Hierop staan bekende rijksmonumenten zoals het Museumplein en de Zaanse Schans, maar ook oude boerderijen, vuurtorens en honderden voorgevels van huizen langs de Amsterdamse grachten. In de datasets komen echter maar 57.912 locaties voor. Dit heeft twee belangrijke redenen. Allereerst zijn er zo'n 5.000 locaties waarvan de exacte coördinaten overeenkomen met een ander monument in de dataset. Verder zijn er zo'n 500 monumenten waarvan de locatie helemaal niet bekend is. Voor het berekenen van de afstanden is ook een wegenkaart nodig van goede kwaliteit. Aangezien we de kortste fietsroute willen bepalen, moeten de afstanden ook wel per fiets afgelegd kunnen worden. Even snel de A2 meepakken zit er dus niet in. Hiervoor kon gelukkig gebruikt worden gemaakt van het fietsennetwerk van Geodan, specialist op het gebied van *location intelligence*, dat de onderliggende kaart heeft aangeleverd om de afstanden te bepalen. De tweede uitdaging is dat de monumenten meestal niet direct op een fietspad liggen. Alhoewel het overgrote deel prima te bereiken is per fiets, zijn er toch bijna 1.000 monumenten die meer dan 200 meter van



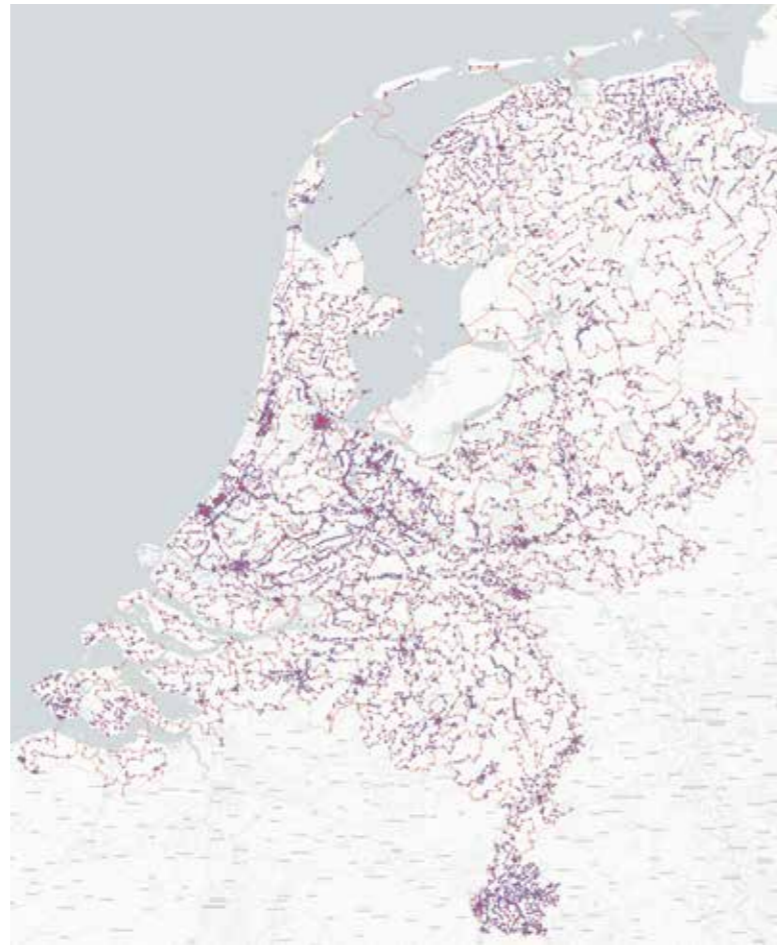
(linksboven) De eerste recordroute uit 1964 door 49 Amerikaanse steden.

(rechtsboven) Recordroute uit 1977 door 120 steden in West-Duitsland.

(onder) Recordroute uit 2016 langs 49.603 Amerikaanse monumenten.



Locaties van rijksmonumenten in Nederland; op sommige locaties is meer dan één monument te zien



De record oplossing voor een handelsreizigersprobleem: de kortste fietsroute langs alle Nederlandse rijksmonumenten

een fietspad liggen, twintig monumenten moet je van meer dan een kilometer ver weg bekijken. En dan is er nog één monument waar echt een verrekijker voor nodig is omdat het meer dan zeven kilometer van een fietspad af ligt: de Emders Kaap op het beschermde Rottumeroog (zie de foto op pagina 14 en de kaart op pagina 16). Alle locaties van de monumenten worden daarom geprojecteerd op de fietswegenkaart zodat je legaal met de fiets op het dichtstbijzijnde punt uit komt.

1.676.870.916 afstanden berekenen

Het handelsreizigersprobleem moet de kortste route vinden *gegeven de afstanden tussen alle paren van locaties*. Als je uitgaat van symmetrische afstanden, waar van A naar B dezelfde afstand is van B naar A, dan heb je afstandstabel met $57.912 \times 57.911 / 2 = 1.676.870.916$ regels nodig. Voor de vorige records, de kroegentocht in de UK en de Amerikaanse monumentenroute, heeft het team van Bill Cook gebruik gemaakt van Google. Ech-

ter, dit zorgde voor grote beperkingen, omdat afstanden niet allemaal in een keer kunnen worden uitgerekend via de Google services. Zo konden ze per dag maar enkele duizenden afstanden uitrekenen. CQM heeft eigen algoritmes ontwikkeld die heel snel grote afstandstabellen kunnen uitrekenen. Om meer dan een miljard routes snel te berekenen, moet je de kaart dan wel op een slimme manier voorbereiden. Een van de manieren om dat te doen, is door het opsplitsen van de kaart in kleinere stukjes. In Nederland heb je vaak rivieren of meren die Nederland op een natuurlijke manier verdelen in deze stukjes. Op een kleiner niveau kunnen slimme graaf partitionerings-algoritmen deze structuren ook herkennen in woonwijken en grachtengordels. Voor een afstandsrekening tussen A en B kun je dan elk component waar deze twee punten niet in zitten, vervangen door een veel makkelijkere graaf met minder verbindingen. Op die manier kan de afstandsbeoordeling een stuk sneller gaan. Zo snel zelfs, dat de afstandsrekening met de slimme opknipping slechts twee uur duurde op een snelle computer van CQM

Het vinden van de kortste route

Nu alle ruim 1,6 miljard afstanden bekend zijn, kan een kortste route worden gevonden. De meest succesvolle heuristiek voor dit probleem is de zogeheten Lin-Kernighan-Helsgaun (LKH) heuristiek. Hierbij wordt een bepaalde tour steeds verbeterd om te kijken of een klein aantal verbindingen, bijvoorbeeld vier, op een andere manier kunnen worden gelegd. Binnen drie dagen werd hierdoor een tour gevonden met een lengte van 20.253.564 meter. Na wat verbeteringen van Keld Helsgaun door een parallelle implementatie werd op 27 september een tour gevonden die nog eens 186 meter korter was. Dit is een hele goede tour, maar op dat moment weet je nog niet of het nog beter kan. De 'Concorde' software van Bill Cook voert verschillende stappen uit om te laten zien dat er geen betere tour bestaat. Eerst worden kleinere subproblemen opgelost waardoor hij kon aantonen dat de kortste route niet langer dan 20.251.395 meter kon zijn. Dat is dus nog een verschil van 1.983 meter. Je zou kunnen zeggen dat dit niks is op 20.000 kilometer, namelijk maar 0,01%. Maar om het record te halen, moet het verschil natuurlijk teruggebracht worden tot nul meter. Via een uitgebreide brand-and-bound search, waarbij je heel veel verschillende subproblemen oplost, kun je uitsluiten dat er een beter route bestaat. Dit koste wel héél veel tijd. De berekeningen werden uitgevoerd op een netwerk van 10 servers van de Universiteit van Waterloo met ieder 32 processorkernen. Daardoor duurden de berekening 'slechts' drie maanden. Als je het op één processor had moeten uitrekenen, dan had je dit 96,9 jaar aan rekentijd gekost.

The bigger picture

Het is natuurlijk fijn dat er nu een fietsroute langs alle monumenten in Nederland is van 20.000 kilometer. Helemaal geruststellend is het dan ook om te weten dat je geen meter te veel hoeft te trappen omdat er een kortere route zou bestaan. De maatschappelijke relevantie is echter groter dan enkel voor een paar fanatieke fietsers. Deze technieken worden gebruikt door bedrijven als Amazon om de kortste routes te bepalen voor het afleveren van pakketjes. Daarnaast worden de algoritmes om snel afstanden te berekenen door CQM voor haar klanten gebruikt als onderdeel van tal van planningsvraagstukken die snel moeten worden opgelost. Zo gebruiken ze de algoritmieken bijvoorbeeld voor het dagelijks plannen van 5.000 tot wel 15.000 taxiriten voor de volgende dag.

LITERATUUR

Cook, W. J. (2011). *In pursuit of the traveling salesman*. Princeton University Press.

Brandhof, A. van den. (2021). *In 20.000 kilometer heb je alles gezien*. NRC, 9 september.

<https://monumentenregister.cultureelergoed.nl/monumentenregister>

NL monuments webpage and data:
<https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/nl/>

FRANS DE RUITER is gepromoveerd op het gebied van robuuste optimalisatie bij Tilburg University. Sinds 2017 is hij consultant bij CQM in Eindhoven. Hier werkt hij aan grote optimalisatie en planningsprojecten. Een dag in de week is hij als research scientist werkzaam bij de Universiteit van Wageningen. E-mail: deruiter@cqm.nl



De Emders Kaap op Rottumeroog ligt meer dan zeven kilometer van een fietspad