

Foto: Thanasis Papazacharias via Pixabay



KERSTPUZZELS EN DE VERSCHRIKKELIJKE KERSTMAN

Een beroemd probleem is het honderd-gevangenen-probleem dat eerder onderwerp van een column was. Waar ging dit probleem over? Honderd gevangenen worden door een bewaker bijeengeroepen. Hen wordt meegedeeld dat besloten is om ze over te plaatsen. De overplaatsing is naar een berucht strafkamp waar hen een vrijwel zekere dood wacht. Als doekje voor het bloeden doet de gevangenisdirecteur de gevangenen een voorstel dat tot hun vrijlating kan leiden. Op een lange tafel staat een rij van 100 afgesloten, genummerde dozen. In willekeurige volgorde is de naam van elke gevangene in precies één doos opgenomen. De gevangenen mogen één voor één hooguit 50 dozen openen om hun naam te vinden. De gevangenen mogen tijdens de zoektocht geen onderling contact hebben en ze mogen ook niet dozen verplaatsen of namen in de dozen verwisselen. Als het iedere gevangene lukt zijn naam te vinden, dan worden de gevangenen vrijgelaten. Het lijkt een voor de gevangenen kansloze missie. Als iedere gevangene 50 willekeurig gekozen dozen onderzoekt, dan is de kans op vrijlating van de groep gelijk $(\frac{1}{2})^{100}$. Eén van de gevangenen, een aan lager wal geraakte investeringsbankier, komt echter met de mededeling dat ze niet geheel kansloos zijn, maar dat met een kans van iets meer dan 30% de vrijheid lonkt als de gevangenen samenwerken en zijn instructies opvolgen. Wat zijn deze? De dozen worden één op één aan de gevangenen

toegewezen en elke gevangene noteert op een papiertje welke doos bij welke gevangene hoort. Een gevangene gaat eerst naar de aan hem toegewezen doos. Treft hij daar een andere naam dan de zijne, dan gaat hij vervolgens naar de doos die aan de andere naam toegewezen is. Dit gaat voort totdat de gevangene zijn eigen naam vindt of vruchteloos 50 dozen heeft geïnspecteerd. De investeringsbankier rekent de gevangenen voor dat de kans op vrijlating dan de verrassend hoge waarde van 31,2% heeft. De berekeningen zijn vrij ingewikkeld en minder geschikt om onder de kerstboom uit te leggen. Dit ligt anders voor de volgende twee kanspuzzels die ook de kerstboodschap 'samenwerken loont' uitdragen en waarmee je onder de kerstboom een slim neefje of nichtje kan uitdagen.

Een TV-spel

Omroep Laks, de omroep voor jongeren, heeft wekelijks het educatieve tv-programma *Wiskunde kun je leren*, waarin ook aandacht wordt besteed aan kansrekening. Aan het eind van het programma wordt altijd een kansspelletje gespeeld waarmee 5000 euro valt te winnen. Twee personen worden willekeurig gekozen uit het publiek. Deze twee personen worden elk in een apart hokje geplaatst. In het hokje gooit elk van hen een zuivere munt op. De uitkomst van de worp

is niet zichtbaar voor de andere persoon maar wel voor het publiek. Daarna moet elk van hen raden wat de ander heeft geworpen, kop of munt. Hebben ze het beiden juist, dan krijgen ze elk 2500 euro. Niet een bedrag waarmee de omroep zich een buil valt, zeker niet omdat tot nu toe de omroep gemiddeld slechts één in de vier keer tot uitbetaling hoefde over te gaan. Jij bent bij de uitzending van het programma aanwezig en tot je verrassing word jij met een ander naar voren geroepen om het spel te spelen. Terwijl jullie naar voren lopen, fluister je de metgezel een aanpak van samenwerking in die met een kans groter dan 25% de 5.000 euro oplevert. Wat is deze aanpak en wat is de winkans?

Monty Hall 2.0

In een tv-show staat een vader met zijn dochter voor drie gesloten deuren genummerd als 1, 2 en 3. Eén deur verbergt een auto, een andere deur de autosleutel en de overgebleven deur een fopprijs. Elk van hen mag achter maximaal twee deuren kijken, één deur tegelijk, buiten het zicht van de ander en zonder deze een aanwijzing te verschaffen. Alleen als de vader de auto treft en de dochter de sleutel, dan winnen ze de auto. Wel mogen ze vooraf een strategie afspreken over hoe te werk te gaan bij het openen van de deuren. Wat is een optimale strategie en wat is de maximale winkans?

Als het slimme neefje of nichtje de bovenstaande twee puzzels fluitend heeft opgelost, dan mag hij of zij de tanden zetten in de volgende puzzel.

Het laatste chocolaatje

In een kerstboom hangen tien chocolaatjes, waarvan twee wit en acht puur. Je pakt chocolaatjes random uit de boom, één tegelijk, en eet deze op totdat je een chocolaatje van de andere kleur pakt. Dit chocolaatje hang je weer terug en daarna zet je het procedé voort met de overgebleven chocolaatjes. Wat is de kans dat het laatste chocolaatje dat je opeet wit is?

In de volgende puzzel, waarin de kerstgedachte ver te zoeken is, berust elke overeenkomst met een bestaande situatie of bestaande personen op louter toeval.

De boosaardige Kerstman

In het Vrije Universum leefden lange tijd Sinterklaas en de Kerstman in betrekkelijke vrede samen. Maar op een

dag krijgen Sinterklaas en zijn medewerkers onverwacht te horen dat ze geen dobbel- en kaartspellen meer in hun pakjes mogen stoppen, hoewel ze altijd een voortreffelijke en door de kinderen hogelijk gewaardeerde keuze hebben gemaakt uit het ruime assortiment. Het geven van deze spellen is voortaan voorbehouden aan de niets ontziende, op macht beluste Kerstman die zo met het argument van grotere belasting extra rendieren wil aanschaffen om voor zijn slee te spannen. Deze kwalijke gang van zaken leidt tot een scherpe reactie van een gerespecteerde emeritus Sinterklaas die stelt dat het algemeen belang van een goed surprisepakket ondergeschikt gemaakt wordt aan de platte koopmansgeest van een Kerstman voor wie alleen omzet telt en kwaliteit er niet toe doet. Lichtelijk geschrokken door deze felle reactie doet de voorzitter van de Bond voor het Educatieve Kansspel op gereformeerde grondslag de toezegging, na overleg met de kerstman, de Sint-groep een kans te bieden om het geschenkrecht tot het geven van dobbel- en kaartspellen te behouden. Zonder dat ze van tevoren op de hoogte zijn, worden de tien stafleden van de Sint-groep bijeengeroepen en elk apart in een kamer gezet. Ieder van hen krijgt een zuivere munt in de handen gedrukt en moet binnen vijf minuten beslissen of hij/zij deze munt wel of niet opgooit, waarbij overleg tussen de stafleden niet mogelijk is. De Sint-groep krijgt het geschenkrecht op dobbel- en kaartspellen alleen dan terug als tenminste één van de tien stafleden de munt opgooit en als daarbij elk van de opgegooide munten kop geeft. De stafleden van de Sint-groep zijn echter bij uitstek getraind in logisch denken, dat moet ook wel als je jarenlang de gevaarvolle tochten over steile daken moet organiseren. Voor hen is het dan ook direct duidelijk dat ze ieder volgens eenzelfde beslisregel moeten handelen. Wat is deze beslisregel en wat is de kans dat ze het geschenkrecht op dobbel- en kaartspellen terug krijgen? Laat ik verklappen dat randomisatie het sleutelwoord tot de oplossing is. De kans dat de tien stafleden van de Sint-groep succesvol zijn in het terughalen van het geschenkrecht voor dobbel- en kaartspellen is 26,3%, waar de Kerstman en zijn kliek de kans als verwaarloosbaar hadden ingeschat. Zelfs als honderd en niet tien stafleden van de Sint aan de test zouden zijn onderworpen, zou de kans op succes nog steeds iets meer dan 25% zijn geweest!

HENK TIJMS is emeritus hoogleraar operations research aan de Vrije Universiteit en auteur van diverse leerboeken over operations research en kansrekening. Voor vwo-scholieren schreef hij het Zebraboekje *Kansrekening in Werking – een moderne aanpak* dat verschenen is bij de wiskundeuitgeverij Epsilon in Amsterdam.

E-mail: h.c.tijms@xs4all.nl