



Illustratie: Ahmed Gad via Pixabay

HET TEMMEN VAN HET TOEVAL

kanttekeningen bij de probabilistische wending in de AI

RICHARD STARMANS

Volgens een gangbare opvatting onder wetenschapshistorici heeft de afgelopen eeuw in vele wetenschappen een probabilistische revolutie plaatsgevonden. Dikwijls betekent dit niet alleen dat de onderzoeksmethoden en technieken binnen die disciplines sterk zijn gebaseerd op kansrekening en statistiek, maar ook het kennisdomein zelf, de gehanteerde begrippen, concepten en theorieën, ja zelfs het achterliggende wereldbeeld. Dat laatste wordt niet altijd toegejuicht. De probabilistische wending in de wetenschap gaat volgens menigeen gepaard met een verdere teloorgang van de aanschouwelijkheid van het wereldbeeld en de vertrouwde categorieën van denken en handelen, juist omdat gehanteerde concepten en methoden nog slechts probabilistisch te duiden zijn (Starmans, 2018). De rationalisering van de samenleving en bijbehorende instituties, de modellen van beleid, organisatie en

technologie, die geënt zijn op deze principes om greep te krijgen op onzekerheid, hebben a fortiori gevolgen voor concepties die direct de morele ervaring betreffen of een sterke ethische dimensie bezitten: verantwoordelijkheid, rechtvaardigheid, redelijkheid, betrouwbaarheid, vertrouwen, macht, democratie, zorgvuldigheid, veiligheid en risico. Deze blijken dikwijls steeds minder in overeenstemming met de individuele morele ervaring, de beproefde imperatieven voor moreel handelen en het daarmee verbonden morele houvast.

Wie een minder hooggestemd en meer *down-to-earth*-gezichtsveld prefereert, kan terecht bij tal van historici en filosofen van kansrekening en statistiek, die de afgelopen dertig jaar onderzoek hebben gedaan naar de mate waarin en de wijze waarop die probabilistische wending zich voltrok binnen de afzonderlijke wetenschapsgebieden.

Het tweedelige standaardwerk *The Probabilistic Revolution* (Kruger, 1987; 1990), waarin de eerste bevindingen van deze onderzoeken staan geboekstaafd, fungeerde als een opmaat tot vele latere studies. Uiteenlopende disciplines passeren hierin de revue, waaronder natuurkunde, biologie, genetica, landbouwwetenschap, psychologie, sociologie en economie. Niet toevallig zijn dit juist de disciplines die rond de eeuwwisseling diverse grondslagen crises doorliepen (natuurkunde) of – nog saillant – die in de late 19e eeuw opkwamen in een tijdsgewricht waarin gaandeweg het inzicht ontstond dat variatie en verandering in de (levende) natuur niet pejoratief dienen te worden geïdentificeerd of moeten worden ‘wegverklaard’ (zoals bij Laplace en Quetelet), maar intrinsiek aan die werkelijkheid zijn. Tegen de achtergrond van deze door Ian Hacking gepostuleerde ‘erosie van het determinisme’, zouden Francis Galton (1822–1911), Karl Pearson (1857–1937), Ronald Fisher (1890–1962) en anderen de fundamenteen leggen voor de moderne statistiek. Juist bij al deze – indertijd nog jonge en – bovenal ‘variatie-en-verandering-rijke’ wetenschappen, die bovendien nog geen onderzoekstraditie kenden, wetenschappelijke status moesten verwerven en worstelden met de grondslagen van hun vak, zouden de probabilistische methoden van vernoemde pioniers van de statistiek een vruchtbare voedingsbodem vinden.

Ook voor jongere disciplines die na de Tweede Wereldoorlog ontstonden, kan de vraag worden gesteld of en in welke mate zich een probabilistische wending heeft voltrokken. Een voorbeeld betreft de *Artificial Intelligence* (AI) die amper 70 jaar geleden ontstond en de laatste jaren in rap tempo lijkt te zijn opgeschoven van een marginale positie op het palet van de wetenschappen naar het zenit van het wetenschappelijk onderzoek. AI heeft de volle aandacht van politiek en bedrijfsleven, staat bovenaan internationale onderzoekagenda's, leidt tot verhitte debatten over kansen en bedreigingen en trekt enorme aantallen studenten. De vraag of en in welke mate zich binnen de AI een probabilistische wending voltrok heeft tot nu toe weinig aandacht gekregen. Enkele aspecten van deze problematiek worden hier kort voor het voetlicht gebracht.

AI, empirie en statistiek

Het is dit jaar precies een kwart eeuw geleden dat de Amerikaanse informaticus en AI-wetenschapper Paul R. Cohen zijn boek *Empirical Methods for Artificial Intelligence* (1995) publiceerde. Achter deze neutrale en ogenschijnlijk weinig pretentieuze titel, die een doorsnee tekstboek

suggereert, gaat wel degelijk een opmerkelijk en ambitieus project schuil. Cohen laat daarover geen misverstand bestaan en gaat met grote voortvarendheid van start. Zo stelt de auteur onomwonden dat er in de informatica en de AI geen methodologische traditie bestaat, geen gangbaar paradigma dat richtinggevend is in onderzoek en onderwijs. Hij kritiseert de opvattingen over empirisch onderzoek van AI-pioniers als Herb Simon en Allen Newell en stelt dat in een tijd van complexe, ingebedde en geavanceerde systemen er dringend behoefte is aan een basis voor *new, more powerful research methods*. De oplossing voor dit alles kan volgens Cohen worden gevonden in het bouwwerk van de statistiek, dat bij hem geschraagd wordt door verschillende pijlers. Allereerst omarmt hij de erfenis van John Tukey (1915–2000). De exploratieve data-analyse helpt het menselijk oog in het detecteren van patronen en structuren en biedt daarvoor de *statistical microscopes* en datalenzen. Daarnaast kan inferentiële statistiek bewerkstelligen dat *data speak convincingly*. Dit is aan de orde op het moment dat ideeën dienen te worden onderworpen aan de *blunt interrogation of hypothesis testing*, bij voorbeeld wanneer *generalisation* van bevindingen nodig is en het AI-systeem wordt aangepast om te kunnen worden ingezet en beoordeeld indien omgeving of taak is gewijzigd. Opmerkelijk is dat Cohen bij dit alles reeds in 1995 niet alleen de klassieke parametrische statistiek (*parameter estimation, hypothesis testing, p-values* en betrouwbaarheidsintervallen) behandelt, maar ook uitvoerig de moderne computer-intensieve technieken. Zo bespreekt hij achtereenvolgens de niet-parametrische *bootstrap sampling distributions* en betrouwbaarheidsintervallen, de Monte Carlo methoden en tot slot Randomisation Tests. Het gaat bij de laatste categorie vooral om permutation tests en exacte tests, die feitelijk teruggaan tot Fishers befaamde exact test voor 2 bij 2 kruistabellen. Daarin worden exacte p-waarden berekend, die Fisher reeds in *The Design of Experiments* uit 1935 beschrijft. Hij doet dit aan de hand van zijn beroemde *the-lady-tasting-tea-experiment* over de vraag of een Engelse dame het verschil kan proeven tussen thee waaraan melk is toegevoegd en melk waaraan thee is toegevoegd, uiteraard in vaste verhoudingen (Salsburg, 2009). Een laatste pijler van Cohens statistische bouwwerk wordt gevormd door klassieke modelleermethoden, variërend van variantieanalyse voor experimenteel design tot path-analyse en structurele vergelijkingsmodellen, dit alles om causale, verklarende modellen van het gedrag van planningsalgoritmen, *information retrieval* systemen of robots te kunnen ontwikkelen.

Voor Cohen dus geen *Querelle des anciens et des*

modernes, maar een integratieve benadering binnen de statistiek, die nodig is om het gedrag van complexe AI-systemen te beschrijven, te beoordelen, te voorspellen, maar bovenal *causaal te verklaren* en zeker ook te *generaliseren* naar nieuwe contexten. AI is een wetenschap waarin AI-programma's en AI-systemen de objecten dienen te zijn van empirische studie. Zij zijn te vergelijken met mechanische, chemische, biologische en psychologische processen en zijn als object van studie niet veel anders dan intelligente dieren als ratten, aldus Cohen. AI-programma's dienen te worden bestudeerd in een dynamische omgeving, waarin de invloed van een verandering in taak T, in omgeving O, of structuur van het systeem S op de *performance* moet worden onderzocht. Dat kan volgens Cohen al lang niet meer door het apparaat open te maken en eigenschappen van het systeem of algoritme rechtstreeks te relateren aan het gedrag om vervolgens één enkele run van het programma uit te voeren en op te vatten als een soort *crucial experiment* dat een antwoord verschaft op de vraag die de onderzoeker aan de natuur stelt. 'It is a comforting fiction or delusion that building a program confers much understanding of its behavior.' Vooruitgang in de AI is een monotoon stijgende functie in een coördinatenstelsel waarbij de x-as achtereenvolgens beschrijving, voorspelling en uiteindelijk causale verklaring representeert en de y-as generalisatie van specifieke taken naar generieke, algemeen toepasbare systemen aanduidt.

Duidelijk is dat Cohen hiermee niet alleen een eigen invulling geeft aan de noties van interne en externe validiteit in een design science context, maar vooral dat hij AI beschouwt als een 'variatie-en-verandering-rijke' discipline, zoals eerder beschreven. Dat laatste wordt nog versterkt door een tweede eigenschap van het boek: de stelselmatige toepassing van de agent-metafoer, waarin systemen geen passieve objecten zijn, maar actieve subjecten, die reactief en proactief handelen in een veranderende omgeving en uitgerust zijn met *high-level cognitive functions*. Cohen schetst een prospectieve visie op de AI middels een soort parabel van Megan, een vrouwelijke agent engineer, die getraind is in human computer interaction, agent-pathologie en agent-ethiek en werkt in een wereld waarin agents zelfstandig functioneren, redeneren met onzekerheid en beslissingen nemen. Daarmee toonde hij zich in 1995 zonder meer een visionair, aangezien autonome systemen (*selfdriving cars, drones, trading systems, autonomous weapons*) al jaren het debat bepalen in AI en Human Computer Interaction. AI met al betoont de AI zich bij de bestudering van de samenwerking tussen menselijke en artificiële actoren nadrukkelijk ten dele een



Paul R. Cohen

sociale wetenschap, hetgeen het 'variatie-en-verandering-rijke' karakter ervan versterkt en a fortiori het belang van de probabilistische wending onderstreept.

Statistiek en AI-controversen

Die *agent-metafoer* vormt eveneens het uitgangspunt van een ander in 1995 verschenen boek, Peter Norvicks en Stuart J. Russells *Artificial Intelligence; a modern approach*, dat inmiddels is uitgegroeid tot een mondiale bestseller, het *state-of-the-art*-tekstboek, dat in meer dan honderd landen wordt gebruikt. Anders dan bij Cohen staat niet de methodologie centraal, maar het kennisdomein zelf: de deelgebieden, paradigma's, toepassingsdomeinen, kernthema's en controversen. Het boek kent inmiddels vier drukken, waarvan de laatste in 2020 verscheen. De drukken verschillen sterk, weerspiegelen de inhoudelijke verschuivingen binnen het vakgebied in de afgelopen 25 jaar en zijn dan ook verplichte kost voor eenieder die de geschiedschrijving van de contemporaine AI ter hand wil nemen. Bovenal verschaft de opeenvolging van vier drukken een uitmuntende bron om de vraag naar de probabilistische wending binnen de *AI als kennisdomein* te beantwoorden. Dat geschiedt hier niet alleen op basis van de traditionele, enigszins geforceerde tegenstelling tussen sterke en zwakke AI, maar vooral tegen de achtergrond van enkele fundamentele controversen die onder meer door (Franklin, 2014) zijn beschreven: symbolische versus subsymbolische AI, representatie versus niet-representatie, gesitueerde versus niet-gesitueerde AI, en tot slot *high level* redeneren versus *low level* perceptie. Opmerkelijk genoeg speelt de betekenis van probabilistische methoden in al deze controversen een belangrijke rol. We beperken ons hier tot de saillante tegenstelling *logic* versus *probability*, die als een rode draad door de geschiedenis van de AI loopt. Dat begon al met het pionierswerk van McCulloch en Pitts uit 1943

op het gebied van neurale netwerken, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. Niet alleen de titel spreekt boekdelen, ook de literatuurlijst is opmerkelijk en kent slechts drie iconische referenties: *The logical syntax of language* van de logisch-positivist Rudolph Carnap, *Grundzüge der theoretischen Logik* door de wiskundige David Hilbert en het monumentale *Principia Mathematica* van A. N. Whitehead en Bertrand Russell. Wellicht wilden McCulloch en Pitts hun nieuwe aanpak een zekere status verschaffen door te verwijzen naar deze vier boegbeelden van de logische traditie en expliciet aansluiting te zoeken bij de wiskundige logica. Deze had immers in de jaren dertig grote vooruitgang geboekt en genoot onder wiskundigen een hoger aanzien dan kansrekening en statistiek. Wellicht ook wilden zij in de voetsporen treden van de 17e eeuwse filosoof Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) en diens oude ideaal van een *calculus ratiocinator* of poogden zij voort te bouwen op de 19e eeuwse AI-pionier George Boole (1815–1864), die 'de wetten van het denken' en een theorie van de geest expliciet koppelde aan een taal waarin zowel logica als kansrekening verdisconteerd zijn. Toch lijken beiden de probabilistische betekenis van hun neurale netwerk enigszins te negeren.

Hoe dan ook, in 1958 zou Frank Rosenblatt op basis van hun beider werk zijn perceptron ontwikkelen, een neurale netwerk dat door hemzelf expliciet werd benoemd als een probabilistisch model. De jaren daarop zou Rosenblatt sterke weerstand ondervinden van de logische traditie binnen de AI. Deze domineerde het vak al sedert de oprichtingsconferentie te Dartmouth in 1956 ondanks de aanwezigheid van Claude Shannon aldaar. Diens revolutionaire 'probabilistische' werk betrof niet alleen zijn befaamde informatietheorie, maar ook zijn fundamentele artikel 'Programming a Computer for Playing Chess' dat het pad effende voor veel later AI-onderzoek. Met name Marvin Minsky bestreed op allerlei manieren het perceptron en de geestelijk vader ervan. In 1969 leidde dat tot het boek *Perceptrons; an introduction to computational geometry* geschreven door Minsky en Papert, waarin deze aantoonde dat het perceptron alleen lineair scheidbare data kon classificeren en onder meer de XOR niet aankon. Hun deels onbewezen bewering dat de getoonde bezwaren evenzeer voor multi-layer netwerken en toekomstige netwerken zouden gelden, leidde tot de befaamde 'neurale winter' of 'neural eclipse' (Sejnowski, 2018) die tot eind jaren 80 zou duren. Het prille onderzoek naar neurale netwerken werd de das omgedaan, financiering ervan bleek vrijwel onmogelijk.

Tegen de achtergrond van dit alles vormt de publicatie van Peter Cheesemans polemische artikel 'In Defence of

Probability' in de *Proceedings van de Ninth International Joint Conference on AI* in 1983 een cesuur. De auteur beoogt hierin onder meer dat kansrekening en probabilistische methoden toereikend zijn om automatisch redeneren met onvolledige en onzekere kennis en het in de AI beoogde *common sense* redeneren te bewerkstelligen. Hij hekelt de dominante logische traditie binnen de symbolische AI en stelt dat alle kritiek op probabilistische benaderingen voortkomt uit misverstanden en onkunde. De *sources of error* worden vervolgens ragfijn en vilein geanalyseerd; verwarring over een frequentistisch kansbegrip versus *measures of belief*, verwarring over absolute en relatieve waarschijnlijkheid, over waarschijnlijkheid en de onzekerheid van die waarschijnlijkheid. Ook gispt hij de critici over hun – in zijn ogen – evidente onbegrip van de Bayesiaanse grondslagen. Bovenal betreurt Cheeseman de *proliferation of representation languages with associated inference procedures*, allemaal extensies van de klassieke logica, die voor het realiseren van het ultieme Project van de AI ongeschikt en onnodig zijn. 'Probability is all that is needed', aldus de auteur. Daarmee formuleerde Cheeseman een sterke antithese van de positie van Patrick Hayes die in zijn evenzeer polemische *In Defense of Logic* (1977) onomwonden stelde dat de hoge ambities van de sterke AI het beste met op klassieke logica, taal en semantiek gebaseerde symbolische AI konden worden bewerkstelligd. Een theorie van de menselijke geest stond daarbij centraal, *high level cognitive functions* moesten worden gerepresenteerd, symboolmanipulatie gold als een voldoende en noodzakelijke voorwaarde voor intelligentie en redeneren; een rijke logische taal vormde daarbij het fundament. Hayes' positie was vooral salonfähig bij cognitieve psychologen, *philosophers of mind* en anderen die het ideaal van sterke AI koesterden. Neurale netwerken waren uit den boze en meer in het algemeen speelde de subsymbolische AI, waartoe – terecht of niet – ook de probabilistische methoden werden gerekend, een tweede viool.

Cheesemans positie was onmiskenbaar gedurfd, te meer daar anno 1983 probabilistisch redeneren in de AI nog grotendeels in de kinderschoenen stond. Grote wapenfeiten ontbraken vooralsnog. Er waren noch vooraanstaande paradigma's, noch killer-applicaties (Starmans, 2019). Daar zou spoedig verandering in komen en die ontwikkelingsgang van de probabilistische AI is in de vier opeenvolgende drukken van Norvig en Russells boek goed zichtbaar: de introductie van de Bayesiaanse netwerken, methoden voor *probabilistic causal inference*, de opkomst van *machine learning* in de jaren 90, AI en *information theory*, het spanningsveld tussen *statistical*

learning en machine learning, big data met als voorlopige climax de opkomst van deep learning.

Epiloog

Omdat dit korte essay uiteraard geen definitieve conclusies toelaat en zelfs een voorzichtige tussenbalans prematuur lijkt, beperken we ons tot enkele observaties. Paradoxaal genoeg is het werk van Cohen nauwelijks nog verkrijgbaar, het kent geen grondig herziene herdrukken en schrijver dezes is geen recenter vergelijkbaar tekstboek bekend. Ook Cohens integratieve statistische aanpak is niet de de facto standaard geworden. Dat neemt niet weg dat de auteur op belangrijke onderdelen de plank allerminst missloeg en niet alleen wat betreft zijn prospectieve visie op de AI. Zo lijkt EDA in tijden van big data een eigen paradigma te zijn geworden en vervullen computer-intensieve technieken een belangrijke rol in de verzoening tussen statistical learning en machine learning. Wanneer het gaat om zaken als *overfitting*, *bias-variance trade-off*, het *train-and-test paradigm* en *cross-validation* is die tegenstelling duidelijk minder relevant. Dat geldt ook voor pogingen het toeval te 'temmen' (Hacking, 1990) of beter nog als 'werkpaard' in te zetten (bootstrap, Monte Carlo, et cetera). Toch lijkt de pijler van de klassieke, inferentiële statistiek minder zichtbaar in het moderne AI-onderzoek, hetgeen deels te maken heeft met de kritiek op de standaardaanpak van *hypothesis testing*, die door sommigen wordt beschouwd als een curieuze mengeling van Fishers *significance* testen en de aanpak van Jerzy Neyman (1894–1981) en Egon Pearson (1895–1980). Deels heeft het ook te maken met methodologische oriëntatie; de op *estimation theory* gerichte, wiskundig geschoolde statistici versus het algoritmen- en datastructuren-paradigma van de informatici die de eerste viool spelen in machine learning en data science. Daar staat tegenover dat Cohens klassieke pijler van de verklarende modellen een sterke opmars maakt. Dit niet eens zozeer omdat zij de basis vormen van de grafisch-georiënteerde causale modellen van bij voorbeeld Judea Pearl, maar met name tegen de achtergrond van de eisen van *responsible en explainable AI* (Starmans, 2020) en de in de inleiding geschetste wijsgerige bezwaren.

Daarnaast lijkt het oude ideaal van Boole in ere te zijn hersteld in de hybride AI, waarin symbolische en subsymbolische methoden en in het kielzog *logic* en *probability* worden geïntegreerd. Vele psychologische studies hebben aangetoond dat klassieke logica geen realistisch model voor redeneren biedt en dat de mens evenmin een

intuïtieve statisticus is. De opkomst en betekenis van het Bayesianisme is ook in Norvig en Russell goed zichtbaar. Dit betreft niet alleen statistiek en informatica, maar ook de in de cognitiewetenschap bestudeerde Bayesiaanse leertheorie als adequaat model voor het representeren van cognitieve functies en processen. Ook de andere genoemde AI-controversen zijn allerminst beslecht.

AI met al is de band tussen AI en statische methoden in de ruimste zin van het woord alleen maar sterker geworden. Oude scheidslijnen, hoezeer ook conceptueel en filosofisch van belang, lijken steeds minder zichtbaar, zeker tegen de achtergrond van het maatschappelijke AI-data science debat, maar ook voor generaties onderzoekers die zijn opgevoed in een paradigma van data science. Onderzoeksprogramma's, onderwijscurricula en beroepsprofielen onderstrepen dit. Tegen deze achtergrond kunnen polemieken over al dan niet rigide demarcaties licht als een enigszins vermoeiend achterhoedegevecht worden opgevat.

REFERENTIES

- Cohen, P. R. (1995). *Empirical Methods for Artificial Intelligence*. MIT Press.
- Franklin, S. (2014). History, motivation and core themes. In K. Frankish & W. M. Ramsey (Eds.), *Cambridge Handbook of Artificial Intelligence*. Cambridge University Press.
- Kruger, L., Daston, L., & Heidelberger, M. (Eds.) (1987). *The probabilistic revolution, Volume 1: Ideas in history*. MIT Press.
- Krüger, L., Gigerenzer, G., & Morgan, M. S. (Eds.) (1990). *The probabilistic revolution, Volume 2: Ideas in the sciences*. MIT Press.
- Hacking, I. (1990). *The taming of chance*. Cambridge University Press.
- Salsburg, D. (2001). *The lady tasting tea: How statistics revolutionized science in the twentieth century*. Henry Holt and Company.
- Sejnowski, T. J. (2018). *The deep learning revolution; Artificial intelligence meets human intelligence*. MIT Press.
- Starmans, R. J. C. M. (2018). The Predicament of truth: On statistics, causality, physics and the philosophy of science. In M. J. Van der Laan & S. Rose (Eds.), *Targeted learning in data science: Causal inference for complex longitudinal studies*. Springer.
- Starmans, R. J. C. M. (2019). De apologie voorbij; kansrekening en het feilbare denken. *STATOR*, 19(1).
- Starmans, R. J. C. M. (2020). Prometheus unbound or paradise regained; The concept of causality in the contemporary AI-data science debate. *Journal of the French Statistical Society*, 161(1), 4-41. Special Issue on Causality, Antoine Chambaz (Ed).

RICHARD STARMANS is verbonden aan de Faculteit Bèta-wetenschappen (Department of Information and Computing Sciences) van de Universiteit Utrecht en aan Tilburg University. Hij doet onderzoek op het snijvlak van filosofie, statistiek en informatica.
E-mail: starmans@cs.uu.nl

Foto: Thanasis Papazacharias via Pixabay



KERSTPUZZELS EN DE VERSCHRIKKELIJKE KERSTMAN

Een beroemd probleem is het honderd-gevangenen-probleem dat eerder onderwerp van een column was. Waar ging dit probleem over? Honderd gevangenen worden door een bewaker bijeengeroepen. Hen wordt meegedeeld dat besloten is om ze over te plaatsen. De overplaatsing is naar een berucht strafkamp waar hen een vrijwel zekere dood wacht. Als doekje voor het bloeden doet de gevangenisdirecteur de gevangenen een voorstel dat tot hun vrijlating kan leiden. Op een lange tafel staat een rij van 100 afgesloten, genummerde dozen. In willekeurige volgorde is de naam van elke gevangene in precies één doos opgenomen. De gevangenen mogen één voor één hooguit 50 dozen openen om hun naam te vinden. De gevangenen mogen tijdens de zoektocht geen onderling contact hebben en ze mogen ook niet dozen verplaatsen of namen in de dozen verwisselen. Als het iedere gevangene lukt zijn naam te vinden, dan worden de gevangenen vrijgelaten. Het lijkt een voor de gevangenen kansloze missie. Als iedere gevangene 50 willekeurig gekozen dozen onderzoekt, dan is de kans op vrijlating van de groep gelijk $(\frac{1}{2})^{100}$. Eén van de gevangenen, een aan lager wal geraakte investeringsbankier, komt echter met de mededeling dat ze niet geheel kansloos zijn, maar dat met een kans van iets meer dan 30% de vrijheid lonkt als de gevangenen samenwerken en zijn instructies opvolgen. Wat zijn deze? De dozen worden één op één aan de gevangenen

toegewezen en elke gevangene noteert op een papiertje welke doos bij welke gevangene hoort. Een gevangene gaat eerst naar de aan hem toegewezen doos. Treft hij daar een andere naam dan de zijne, dan gaat hij vervolgens naar de doos die aan de andere naam toegewezen is. Dit gaat voort totdat de gevangene zijn eigen naam vindt of vruchteloos 50 dozen heeft geïnspecteerd. De investeringsbankier rekent de gevangenen voor dat de kans op vrijlating dan de verrassend hoge waarde van 31,2% heeft. De berekeningen zijn vrij ingewikkeld en minder geschikt om onder de kerstboom uit te leggen. Dit ligt anders voor de volgende twee kanspuzzels die ook de kerstboodschap 'samenwerken loont' uitdragen en waarmee je onder de kerstboom een slim neefje of nichtje kan uitdagen.

Een TV-spel

Omroep Laks, de omroep voor jongeren, heeft wekelijks het educatieve tv-programma *Wiskunde kun je leren*, waarin ook aandacht wordt besteed aan kansrekening. Aan het eind van het programma wordt altijd een kansspelletje gespeeld waarmee 5000 euro valt te winnen. Twee personen worden willekeurig gekozen uit het publiek. Deze twee personen worden elk in een apart hokje geplaatst. In het hokje gooit elk van hen een zuivere munt op. De uitkomst van de worp