

Spectraalanalyse van slaap

door

H. Koppelaar*

en

F.M. Zwart**

* Rijksuniversiteit Utrecht, Subfaculteit Psychologie
Vakgroep PSM,
St.Jacobsstraat 14, 3511 BS Utrecht.
Tel.: 030-328711

** Rijksuniversiteit Utrecht, Faculteit der Geneeskunde
Researchafdeling Psychiatrie
Tel.: 030-313154

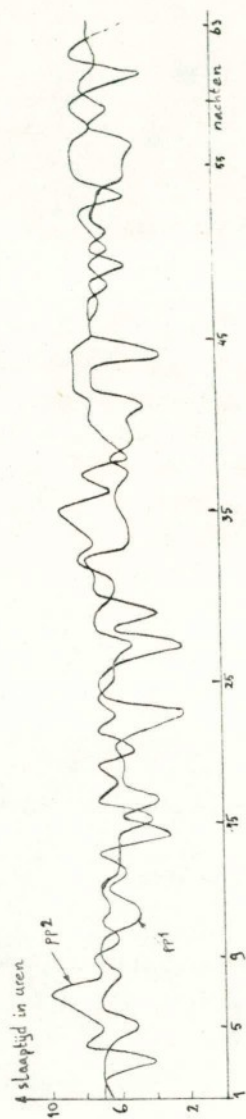


fig. 1.

Het psychologische probleem

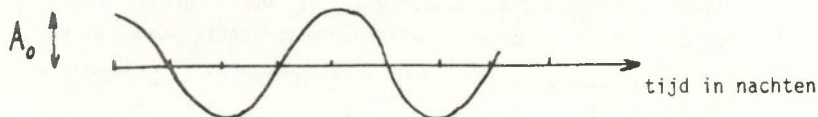
In 1974 werd begonnen met een onderzoek naar mogelijkheden van een niet-medicamenteuze behandeling van slapeloosheid. Gedragstherapeutische procedures werden op effecten getoetst en er werd een behandelingsprogramma ontwikkeld (Klip, 1979). Eén van de kenmerken van dit programma is een dagelijkse registratie van een aantal gegevens: Zelfbeoordeling van de slaap vindt iedere ochtend plaats voor wat betreft inslaaptijd, slaapduur, frequentie van wakker worden, slaapkwaliteit, uitgerustheid en het innemen van slaapmiddelen. Dergelijke verzamelingen van herhaalde registraties over een aantal tijdstippen gedurende een langere periode (in dit geval van 56 dagen) kunnen worden weergegeven in een grafische voorstelling met op de x-as de achtereenvolgende tijdstippen en op de y-as de registraties of metingen. De slaapduur per nacht, gedurende een periode van acht weken dagelijks geregistreerd, zal voor een normale slaper een vrij regelmatige, slechts weinig variërende curve te zien geven. Voor iemand met slaapklachten echter blijkt de curve niet zo voorspelbaar. Hoewel er curven voorkomen die weinig schommelingen vertonen, zijn de meeste zeer onregelmatig: Het aantal uren slaap per nacht varieert sterk. Figuur 1 laat een aantal curven zien dat het aantal uren slaap per nacht weergeeft van over slapeloosheid klagende personen.

De curven verschillen in (on)regelmatigheid en de vraag doet zich voor of er een maat kan worden gevonden voor de variabiliteit van de curven, zodat mogelijk een onderscheid zou kunnen worden

gemaakt naar type van de slapeloosheidsklacht. In dit artikel wordt een mogelijke wijze van analyseren van deze curven te onderscheiden naar mate en sterkte van periodiciteit: dat wil zeggen in hoeverre is er sprake van een regelmatig patroon, in de zin van het periodiek voorkomen van een langere slaapduur dan op de overige dagen. De aanwezigheid van een dergelijke periodiciteit kan in bepaalde gevallen condities op het spoor doen komen die van belang kunnen zijn bij het bepalen van de behandelingsstrategie. In het algemeen is een visuele inspectie van de curve niet voldoende om tot een duidelijk aanwezige periodiciteit te besluiten. Voor een deel heeft dit te maken met de onbetrouwbaarheid van de registraties (die zelfbeschrijvend van aard zijn), maar ook is het mogelijk dat een maskering van periodiciteiten optreedt als gevolg van de invloed van meerdere condities tegelijkertijd, die min of meer onafhankelijk van elkaar de vorm van de curve bepalen. De gebruikte analysemethode, die hierna zal worden beschreven, is uit de natuurwetenschappen afkomstig, wordt spectraalanalyse genoemd en ontleedt een gegeven curve in een aantal deelcurven, elk met een eigen periodiciteit (frequentie). Nagegaan wordt of deze methode bruikbaar kan worden gemaakt om slaapcurven te karakteriseren naar hun regelmatigheid.

De analysemethode naïef verklaard.

Met behulp van spectraalanalyse kunnen we nagaan of een decompositie van een tijdreeks in een aantal periodieke componenten mogelijk is. Ten behoeve van de uitleg van de spectraalanalyse van een tijdreeks gaan we ervan uit dat de reeks uit slechts één periodieke beweging bestaat. Deze periodieke beweging geven we weer door de cosinusfunctie, $\cos(\omega t)$ van figuur 2.



Figuur 2. $x_t = A_0 \cos(\pi/2)t$

Korthedshalve zullen we voortaan de waarde van de periodieke component x op tijdstip t aangeven met x_t . De maximale afwijking van de golfbeweging ten opzichte van de horizontale tijdas noemt men de amplitude A . Deze geeft de intensiteit van de schommelingen aan. Telkens als de tijd t met T vermeerderd of vermindert, volgt dezelfde waarde van x . Daarom heet T de periode van de beweging. De grootte ω geeft het aantal fluctuaties in radialen weer en heet frequentie. Kiest men afzonderlijke waarden voor A en ω , dan geven we deze aan met $A_0, A_1 \dots$ resp. $\omega_0, \omega_1 \dots$. In figuur 2 is de amplitude A_0 terwijl de periode T gelijk is aan 4 dagen, de frequentie is $1/4$ golfbeweging per dag, dat is $\omega = 2\pi/4 = 1.57$ radialen per dag. Een maat voor de fluctuatie in het verloop van een tijdreeks is de variantie. Voor een tijdreeks x_t , die gemeten wordt op tijdstippen $1, 2, 3, \dots, n$, wordt de variantie gedefinieerd als:

$$\text{var } x_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_t)^2$$

waarbij $\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ het gemiddelde van de reeks is.

In ons voorbeeld van figuur 2 is het gemiddelde, berekend over de metingen x_1, x_2, x_3, x_4 gelijk aan:

$$\bar{x}_t = 1/4(0 + (-A_0) + 0 + A_0) = 0$$

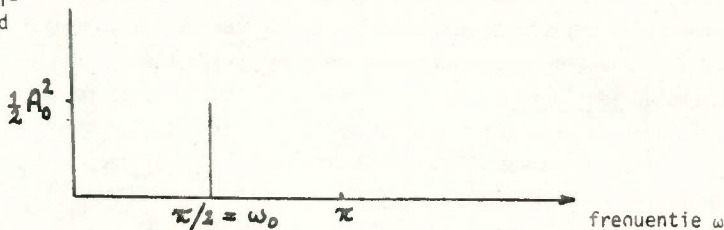
en de variantie bedraagt:

$$\text{var } x_t = 1/4((0 - 0)^2 + (-A_0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (A_0 - 0)^2) = 1/2 A_0^2.$$

Deze deelreeks omvat precies één periode. Berekenen we de variantie echter over twee of meer perioden, dan verkrijgen we steeds dezelfde waarde. De variantie is voor de gehele reeks dan ook $1/2 A_0^2$. De boven gedefinieerde variantie noemen we nu de spectraaldichtheid, die voor de frequentie $\omega = \omega_0$ de waarde $1/2 A_0^2$ heeft.

In figuur 3 is de spectraaldichtheid van het signaal uit figuur 2 afgebeeld. Het 'spectrum' van figuur 2 is dus in figuur 3 getekend en bevat slechts één component.

spectraal-
dichtheid



Figuur 3. Spectrum van $x_t = A_0 \cos(\pi/2)t$

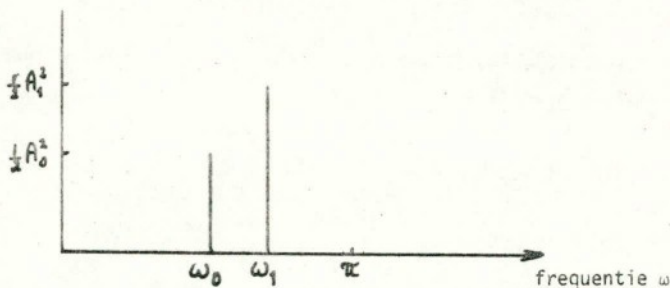
We zullen nu het geval bezien waarin de tijdreeks x_t niet uit één, maar uit twee periodieke bewegingen is opgebouwd.

In formule

$$x_t = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_1 \cos(\omega_1 t) \text{ voor } t = 0, 1, 2, \dots$$

In figuur 4 is het spectrum van deze ingewikkelde tijdreeks in beeld gebracht. Het is te zien dat het spectrum nu twee componenten bevat.

Spectraal-
dichtheid



Figuur 4. Spectraaldichtheid van $x_t = A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \cos \omega_1 t$

Men kan zich nu voorstellen dat een tijdreeks x_t niet uit 2, maar uit n periodieke bewegingen is opgebouwd, met frequentie ω_0 , ω_1 , ω_2 , ..., ω_{n-1} . De spectraaldichtheid neemt dan bij deze frequenties de waarde $1/2 A_0^2$, $1/2 A_2^2$, ..., $1/2 A_{n-1}^2$ aan. Indien de spectraaldichtheid voor ω_1 een grote waarde $1/2 A_1^2$ heeft, betekent dit dat deze variantie belangrijk bijdraagt tot de totale variantie van de reeks x_t en dus relatief meer verklaart van de reeks x_t . In het algemeen geldt dat de varianties van verschillende componenten waaruit de reeks is opgebouwd additief bijdragen aan de totale variantie van de reeks; voorwaarde is, dat de periodieke functies onafhankelijk van elkaar werkzaam zijn en dat is dikwijls zo.

Uit het bovenstaande blijkt dat bij elke waarde van ω een spectraaldichtheid behoort, zodat men zou kunnen zeggen dat het spectrum als geheel een functie van de frequentie is. We geven daarom het spectrum voortaan weer met $f(\omega)$.

De analysemethode uitgelegd met beperkte wiskundige achtergrond.

(Voor een tekst op dit niveau: zie Papoulis). Ruis, signalen en andere tijdreeksen (discreet of continu gemeten), die bij benadering stationair zijn en normaal verdeeld (in de amplitude) met gemiddelde nul, worden meestal in al hun relevante statistische eigenschappen adequaat beschreven door hun 'auto-covariantie'-functie. Bij benadering stationaire data die niet normaal verdeeld zijn, worden veelal ook goed beschreven met deze functie, alhoewel hij niet meer de enige relevante statistische eigenschappen beschrijft, wel de meest nuttige. Een tijdreeks x_t , afkomstig van een random (of stochastisch) proces, is er een uit een ensemble van random reeksen die gerealiseerd hadden kunnen worden. De waarde van x_t op een bepaald ogenblik is dus een random variabele met een waarschijnlijkheidsverdeling veroorzaakt door de verzameling. Verder hebben de waarden van x_t op een aantal tijd-

stippen, zeg $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, n dimensionale simultane waarschijnlijkheidsverdeling, die ook geïnduceerd is door het ensemble. Nemen we nu aan dat het ensemble altijd normale verdelingen induceert, dan is zij volledig beschreven met de ensemble gemiddelden.

$$\bar{x}(t_i) = \text{gemiddelde van } \{x(t_i)\}$$

en met de covarianties

$$\text{cov} = \text{gemiddelde van } \{ [x(t_i) - \bar{x}(t_i)] \cdot [x(t_j) - \bar{x}(t_j)] \}$$

Voor de theorie in deze paragraaf beschouwen we slechts eenvoudige tijdreeksen x_t met $\bar{x}_t = 0$, die continue zijn, zodat discrete optellingen vervangen gedacht worden door integratie. Dan komt er voor de auto-covariantie over de tijdsduur T .

$$\text{autocovar}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt$$

Het verdient aanbeveling om nu even de vorige paragraaf opnieuw te lezen in het licht van de hier beschreven integraal transformaties. Om te beginnen is de auto-covariantie een generalisatie van de variantie. Daarmee wordt ook duidelijk dat, als $\bar{x}_t = 0$ dan is de variantie van x_t uit de vorige paragraaf de gediscrètiseerde versie van de eerste integraal hiervoor, met $\tau = 0$.

Proberen we de integratie uit te voeren voor het signaal $x_t = A \cos \omega_0 t$ dan komt er:

$$\int x_t x_t dt = A_0^2 \int \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2} A_0^2 \left| t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right|$$

De definite integraal, toegepast op het voorbeeld uit vorige paragraaf (figuur 2) met $\omega_0 = \pi/2$ en het integratie-interval $t \in [1,4]$, of symmetrisch: $[-T, T] \equiv [-1.5, 1.5]$ (tijdsverschuiving (= translatie), maakt geen verschil voor de berekening) geeft

$$\int_{-1.5}^{1.5} x_t^2 dt = \frac{1}{4} A_0^2 | \sin(1.5 \pi) - \sin(-1.5 \pi) | = \frac{1}{2} A_0^2$$

Voor het geval van figuur 4 uit de vorige paragraaf krijgen we $\frac{1}{2} A_0^2$ en $\frac{1}{2} A_1^2$ op dezelfde wijze.

De Praktijk

Tot nu toe - we zijn nog altijd bezig met de opbouw van reeksen en niet meer de decompositie - hebben we ons beperkt tot de beschouwing van reeksen, die opgebouwd zijn uit strikt periodieke functies. In werkelijkheid is een tijdreeks vrijwel nooit aldus samengesteld. Immers, bij dergelijke processen zijn steeds toevallige invloeden werkzaam, die maken dat een bepaalde frequentie niet gedurende de gehele periode exact dezelfde waarde zal hebben, maar daar omheen zal schommelen. Voor de amplitude geldt hetzelfde. Door de onzekerheid die aldus over een zekere frequentie ω_i bestaat, kan men stellen dat tot de totale variatie ook wordt bijgedragen door frequenties in de buurt van ω_i .

In het voorafgaande hebben we kunnen zien hoe in theorie een spectrum ontstaat en hoe de 'technische' interpretatie ervan is. De psycholoog die geïnteresseerd is in de periodiciteiten waaraan

de te bestuderen variabele onderhevig is, kan uit de spectra van de variabelen informatie daarover putten. De spectraal-analyse moet dan ook middelen verschaffen om uit data met behulp van een computer het onbekende spectrum te leveren. Het blijkt dat men $f(\omega)$ slechts in een beperkt aantal punten kan schatten. In de praktijk is dat echter toch voldoende om conclusies ten aanzien van het periodieke gedrag te trekken. Het feit dat $f(\omega)$ in bepaalde punten geschat wordt, betekent dat er omtrent de werkelijke waarde van $f(\omega)$ in die punten onzekerheid bestaat. Onder bepaalde voorwaarden kan die onzekerheid in de vorm van kansuitspraken expliciet gemaakt worden. Verder wordt de onbetrouwbaarheid van de schattingen van $f(\omega)$ groter naarmate men in meer punten een schatting verricht. Men zal een keuze moeten maken ten aanzien van het aantal te schatten punten; schat men in veel punten dan verkrijgt men een grote hoeveelheid informatie ten aanzien van $f(\omega)$, maar die informatie is dan weinig betrouwbaar. Schat men in minder punten, dan neemt de hoeveelheid informatie af, maar neemt de betrouwbaarheid daarentegen toe. Is de tijdreeks van lengte n en schat men $f(\omega)$ in k punten, dan is de betrouwbaarheid van de schattingen afhankelijk van de verhouding $\frac{n}{k}$; vaak kiest men k zodanig dat deze verhouding ongeveer drie is.

Het kan voorkomen dat het spectrum geen pieken vertoont. In zulk een geval is er geen regelmatige golfbeweging in de data aanwezig; het verloop van de datareeks wordt dan hoofdzakelijk door het toeval bepaald. De spectraalanalyse van de reeks is dan niet zinvol geweest. Een voorwaarde voor toepassing van spectraalanalyse is dat de tijdreeks stationair is. Onder stationariteit wordt dan verstaan dat de centrale tendentie van de reeks, het niveau waaromheen de waarnemingen verspreid liggen, constant is, terwijl de samenhang tussen de waarnemingen op afzonderlijke tijdstippen onafhankelijk van de tijd is.

Het recept voor de spectraalanalyse

Tot nu toe hebben wij alleen gesproken over de opbouw van reeksen door samenvoeging van periodieke bewegingen. De praktijk vraagt het omgekeerde: gegeven een reeks, welke componenten kunnen we daarin ontdekken. Hiervoor volstaan we met het geven van het analyse-recept. Uiteraard is het gewenste recept een computermethode. Het computerprogramma dat de analyse het snelst uitvoert is het beroemde programma "Fast-Fourier-Transform" (FFT) van Cooley and Turkey (1965). Thans is dit opgenomen in het SPSS (1977) onder de naam SPECTRAL, waarmee de toegankelijkheid gewaarborgd is.

Toepassing op slaapgedrag en conclusies

De dagelijkse rapportage van het aantal uren slaap van proefpersonen levert een tijdreeks op. De tijdreeks geeft tot op het halve uur nauwkeurig het aantal uren weer dat proefpersonen menen per nacht tijdens een slaaptherapie geslapen te hebben. De proefpersonen waren 63 dagen in behandeling.

De spectraalanalyse van de tijdreeksen van slaapuren uit figuur 1 is te vinden in figuur 5 waarin de spectra afgebeeld staan.

De slaapuren dienen per nacht enigszins onafhankelijk van elkaar te zijn. Dit hebben we getest met behulp van een autocorrelatie

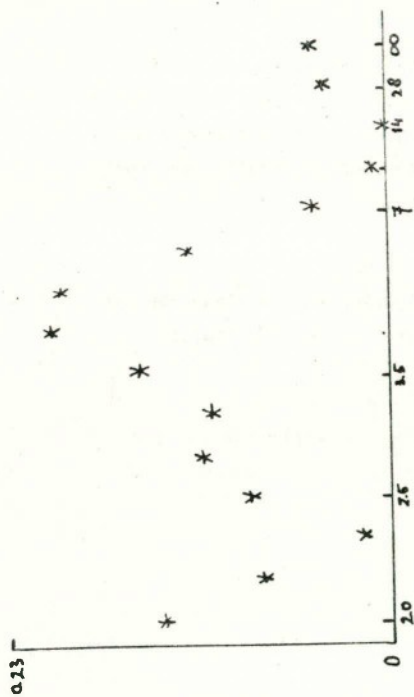
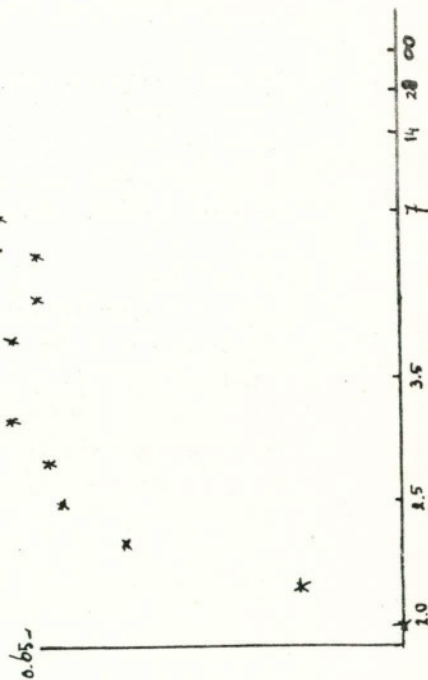


fig. 5. spectraaldichtheden bij fig. 1.



met een tijdsverschuiving van één nacht. De uitkomsten zijn voor zes tijdreeksen (waarvan de eerste twee in figuur 1): +0.0653, -0.4737, +0.0215, +0.4154, -0.0060, +0.1514, dat wil zeggen lage autocorrelaties, zodat we gevoeglijk spectraalanalyse kunnen toepassen.

We bespreken thans figuur 5. De eerste patiënt(e) (proefpersoon van figuur 1) maakt relatief gunstige nachten door met een gemiddelde periode van ongeveer 4 dagen. De slaapcurve is minder vlak dan die van proefpersoon 2, dit is duidelijk te zien in figuur 1 en komt terug in figuur 5. Een vlakke slaapcurve geeft geen pieken in de spectraaldichtheden. Voor de therapeut is het nu interessant om uit dit spectrum die relatieve piek te halen en te relateren aan het leefpatroon van de patiënt(e). Een zinvolle terugkoppeling naar de patiënt(e) lijkt de vraag naar het patroon van (vrije)tijdsbesteding: wacht er regelmatig (om de vier dagen) een onprettige dagtaak? Komt er iedere week tweemaal een avond onaangenaam bezoek? Etc.

De tweede curve van figuur 5 geeft het spectrum van een veel regelmatigere slaap. Geen enkele periodiciteit geeft een piek. Met andere woorden deze patiënt(e) slaapt tamelijk regelmatig, zij het gemiddeld misschien wat kort.

Zo kunnen we de spectra per patiënt(e) evalueren.

In verder onderzoek dient te worden nagegaan in hoeverre deze karakterisering van tijdreeksen bij kan dragen tot de bepaling van behandelingsmogelijkheden en de predictie van behandelingssucces. Het laat zich aanzien dat deze methode gebruiksmogelijkheden biedt in die gevallen, waar sprake is van gedrag dat kan variëren in bijvoorbeeld intensiteit, duur of frequentie en waarvoor over regelmatig terugkerende registratiemomenten wordt beschikt gedurende een langere periode. Te denken valt aan bloeddrukmetingen bij hypertensie, aan migraine- en hoofdpijnlachten, dwanghandelingen, etc. Analyse van baselinegegevens kan leiden tot bepaalde behandelingsbeslissingen; vergelijking met curven, verkregen na een behandelingsperiode kan verandering in het regelmatigheidstype aan het licht brengen.

Referenties

- Aarons, D.
Reagan, M. "Spectral Analysis of Time Series", SPSS-Manual
nr. 434, 1977
- Cooley, J.W.
Tukey, J.W. "An Algorithm for the machine calculation of complex
fourier series", Math. of Comput. 19, 1965,
pp. 297-301
- Klip, E.C. "Slapeloosheid", Intermediar, Vol. 15 nr. 7,
1979, pp. 1-10
- Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic
Processes, McGraw-Hill, 1965.