

Discussie-rubriek

Het schatten en toetsen van lineaire structurele modellen met restrikties op gemiddelden met behulp van LISREL.

Wim van Putten

Vakgroep Methoden en Technieken

Subfakulteit Psychologie

Rijksuniversiteit Leiden.

1. Inleiding

In dit artikel zullen we een methode aangeven waarmee men lineaire structurele modellen waarin ook de gemiddelden van variabelen een rol spelen met behulp van LISREL [1] kan schatten en toetsen. Tot voor kort leek het niet mogelijk om binnen LISREL ook gemiddelden in modellen op te nemen. Onlangs echter hebben Jöreskog en Sörbom methode(n) bedacht om dergelijke modellen met behulp van LISREL te analyseren. Zij bereiden daar momenteel een publicatie over voor en tevens een aanpassing van de LISREL-handleiding. Hun methode zal vermoedelijk niet wezenlijk verschillen van de hier gepresenteerde.

De methode die wij hier presenteren is bedacht nadat een vraag die ons kwelde, namelijk:

"Waarom kan of moet men in bepaalde gevallen de matrix M van 2e orde momenten rond nul analyseren in plaats van de steekproef covariantiematrix S , en geeft LISREL dan ook inderdaad maximum likelihoodschattingen?"

bevredigend beantwoord was.

Op het antwoord van deze vraag, hoewel vermoedelijk standaard, wordt in de LISREL-handleiding niet ingegaan; het gebruik van de momentenmatrix wordt zonder nadere toelichting voorgesteld als zijnde korrekt. Ook in artikelen van Jöreskog wordt hier niet expliciet op ingegaan [2]. Inzicht in het antwoord op deze vraag maakt echter duidelijk waarom met LISREL inderdaad maximum likelihoodschattingen gevonden worden in bijvoorbeeld structurele modellen in de ekonometrie en tevens maakt het duidelijk dat het introduceren van een konstante variabele $= 1$ in structurele modellen de mogelijkheid biedt gemiddelden in het model op te nemen.

De afleiding die we in paragraaf 3 en 4 zullen geven is in principe zonder kennis van LISREL te volgen; we gebruiken wel de LISREL-notatie zodat het lezen voor diegenen die daar vertrouwd mee zijn vergemakkelijkt wordt. In paragraaf 2 geven we eerst een voorbeeld van data en een model waarin

gemiddelden een rol spelen. In paragraaf 3 geven we de algemene klasse van modellen aan waartoe we ons hier zullen beperken. In paragraaf 4 behandelen we de loglikelihoodfunctie en leiden daarvoor een geschikte uitdrukking af. In paragraaf 5 gaan we in op toetsing van hypothesen, vrijheidsgraden en χ^2 . In paragraaf 6 duiden we mogelijke toepassingen aan en in paragraaf 7 passen we onze ideeën toe op de data van paragraaf 2.

2. Een voorbeeld

Als voorbeeld nemen we data die ook door Jöreskog als illustratie bij LISREL gebruikt worden:

Tabel 1

Gemiddelden, standaard deviaties en korrelaties voor oudere en jongere broers in Project Talent.

Oudere broers (N=3675)	Gemiddelde	Standaard- deviatie	korrelaties					
x_1 Opleiding vader	12.08	3.16	1.000					
x_2 Beroep vader	36.71	18.96	.493	1.000				
x_3 Verbaal	108.47	14.96	.293	.216	1.000			
x_4 Math	115.39	18.82	.293	.182	.189	1.000		
Y Opleiding op 22-jarige leeftijd	14.15	1.89	.317	.283	.371	.500	1.000	
Jongere broers (N=2704)	Gemiddelde	Standaard- deviatie	korrelaties					
x_1 Opleiding vader	11.45	3.29	1.000					
x_2 Beroep vader	33.73	19.06	.459	1.000				
x_3 Verbaal	104.90	14.74	.270	.191	1.000			
x_4 Math	115.75	18.36	.205	.138	.197	1.000		
Y Opleiding op 22-jarige leeftijd	14.13	1.90	.342	.311	.384	.445	1.000	

Bron: Project Talent eleventh grade sample, gemeten in 1960, gevolgd door nameting in 1966. De steekproef omvat alleen de oudste en op één na oudste zonen in gezinnen van twee of meer kinderen. De steekproef is *niet* gebaseerd op oudere en jongere broers in hetzelfde gezin.

Variabelen: Opleiding geherkodeerd met Duncan-skores. Verbaal is "verbal knowledges"-faktor-skore (zie Lohnes, Measuring Adolescent Personality)

uit totale Project Talent testbatterij. Math is een (orthogonaal veronderstelde) faktorscore uit dezelfde bron. Opleiding op 22-jarige leeftijd is aantal jaren (met sukses) gevolgd onderwijs door respondenten in 1966, gekorrigeerd voor diegenen die nog onderwijs volgen.

We zijn hier geïnteresseerd in regressie van Y naar X_1 tot en met X_4 . Als we g als indeks voor de groepen gebruiken ($g=1$: oudere broers; $g=2$: jongere broers) dan ziet de regressievergelijking voor groep g er als volgt uit:

$$Y^g = C^g + \gamma_1^g X_1^g + \gamma_2^g X_2^g + \gamma_3^g X_3^g + \gamma_4^g X_4^g + Z^g \quad (2.1)$$

waarbij Z^g niet gekorreleerd is met X_1^g tot en met X_4^g , $\mu_{Z^g} = E Z^g = 0$ en C^g een konstante is waarvoor geldt

$$\mu_Y^g = C^g + \gamma_1^g \mu_{X_1^g} + \gamma_2^g \mu_{X_2^g} + \gamma_3^g \mu_{X_3^g} + \gamma_4^g \mu_{X_4^g} \quad (2.2)$$

Probleem: Schat en toets model (2.1) onder de restrictie dat de regressiecoëfficiënten in beide groepen gelijk zijn, oftewel onder de aannames dat

$$\begin{aligned} C^1 &= C^2 \\ \gamma_i^1 &= \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Resultaten van schatting en toetsing komen in paragraaf 7 aan de orde.

3. Een algemene klasse van modellen

We gaan uit van $p + q$ geobserveerde variabelen, gesplitst in twee sets: $x = (x_1, \dots, x_q)'$ en $y = (y_1, \dots, y_p)'$ en het volgende model voor de relaties tussen de x_i 's en de y_j 's.

$$y = A \eta + \epsilon \quad (3.1)$$

$$B \eta = \Gamma x + \zeta \quad (3.2)$$

waarin $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)'$ een vektor van niet-geobserveerde variabelen.

$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)'$ vektor van foutenvariabelen.

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)'$ vektor van residuen.

B = niet-singuliere $(m \times m)$ -matrix.

Γ = $(m \times q)$ -matrix.

Λ = $(p \times m)$ -matrix van "faktorladingen".

Met betrekking tot de verdeling van ϵ en ζ nemen we aan dat beide multivariaat normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en covariantiematrices respectievelijk Θ en Ψ . Korter kunnen we dit noteren met:

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Theta) \quad (3.3)$$

$$\zeta \sim \mathcal{N}(0, \Psi) \quad (3.4)$$

Tevens veronderstellen we ϵ en ζ onafhankelijk van elkaar en onafhankelijk van x . (3.5)

Met betrekking tot x onderscheiden we twee gevallen:

- a. x wordt als niet-random opgevat maar fixed; de waarde van x bepaalt gedeeltelijk de waarde van η volgens (3.2). In dit geval zijn we geïnteresseerd in de voorwaardelijke verdeling van y gegeven x .
- b. x wordt random opgevat met verdeling $\mathcal{N}(\mu_x, \Phi)$. In de modelspecificatie worden echter géén restricties opgelegd aan de parameters van de verdeling van x . In dit geval zijn we geïnteresseerd in de simultane verdeling van y en x . Daar echter aan de verdeling van x geen restricties worden opgelegd zal ook in dit geval alleen de voorwaardelijke verdeling van y gegeven x van belang zijn.

Het bovenstaande algemene model (3.1) en (3.2) is zonder verdere restricties op de parameters, dat wil zeggen de elementen van de modelmatrices Λ , B , Γ , Θ en Ψ niet geïdentificeerd. In een concreet model zijn aan deze parameters dan ook restricties opgelegd. Sommige parameters hebben in het model een vaste gegeven waarde; andere zijn onderling aan elkaar gelijk gesteld. Er zijn dus minder vrije parameters dan elementen van de modelmatrices. De vrije parameters waarin de Λ , B , Γ , Θ en Ψ zijn uit te drukken geven we aan met $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_t)'$.

4. De loglikelihood funktie

Zij gegeven N onderling onafhankelijke waarnemingen (y_i^i, x_i) , $i = 1, \dots, N$. Als maat voor fit tussen deze data en een specifiek model gekarakteriseerd door de parameters Π in geval a en (Π, μ_x, ϕ) in geval b gebruiken we de logarithme van de likelihoodfunctie.

In geval a is dat de logarithme van de voorwaardelijke likelihood van y gegeven x , genoteerd met $L_{y|x}(\Pi)$.

In geval b noteren we de loglikelihood met $L_{y,x}(\Pi, \mu_x, \phi)$. Aan gezien voor kansdichtheden geldt: $f(y, x) = f(y|x) \cdot f(x)$, geldt voor de loglikelihood:

$$L_{y,x}(\Pi, \mu_x, \phi) = L_{y|x}(\Pi) + L_x(\mu_x, \phi)$$

Het maximaliseren van de loglikelihood komt dus neer op het maximaliseren van $L_{y|x}(\Pi)$ naar Π en het maximaliseren van $L_x(\mu_x, \phi)$ naar μ_x en ϕ . Aangezien op μ_x en ϕ geen restricties zijn gelegd geldt

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_x &= \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^i \\ \hat{\phi} &= S_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^i - \bar{x})(x^i - \bar{x})'.\end{aligned}$$

Voor het bepalen van maximumlikelihoodschattingen van de parameters Π doet het er dus niet toe of we x als random of als fixed opvatten. We beperken ons daarom in het vervolg tot geval a: x fixed.

We zullen nu uit de verdeling van $y|x$ een uitdrukking voor $L_{y|x}$ afleiden. Daartoe voeren we enige vereenvoudigende notaties in. De vektor van alle geobserveerde variabelen geven we aan met z , $z = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Matrices van 2e orde momenten en kruismomenten rond nul geven we aan met M ..

$$\text{Bijvoorbeeld } M_{xy} = \frac{1}{N} \sum x^i y^i.$$

Uit (3.1) en (3.2) volgt dat

$$y = \Lambda B^{-1} \Gamma x + \Lambda B^{-1} \zeta + \varepsilon \quad (4.1)$$

$$\text{Laat } \Lambda B^{-1} \Gamma = G \quad (4.2)$$

$$\text{en } \Lambda B^{-1} = H \quad (4.3)$$

Dan is (4.1) te herschrijven als

$$y = G x + H \zeta + \epsilon \quad (4.4)$$

Uit de aannames over de verdeling van ϵ en ζ (3.3), (3.4) en (3.5) volgt dan dat

$$y|x \sim \mathcal{N}(Gx, H\psi H' + \Theta)$$

oftewel: $y|x$ is multivariaat normaal verdeeld met

$$\text{gemiddelde } \mu_{y|x} = Gx$$

$$\text{en covariantiematrix } \Sigma_{y|x} = H\psi H' + \Theta$$

Merk op dat deze covariantiematrix niet van x afhangt. Indien we de bijbehorende kansdichtheid met $f(y|x)$ noteren kunnen we de loglikelihood van de waarnemingen $y^i|x^i$, $i=1, \dots, N$ als volgt uitdrukken:

$$\begin{aligned} L_{y|x} &= \sum_{i=1}^N L_{y^i|x^i} = \sum_{i=1}^N \log f(y^i|x^i) \\ &= C - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \log |\Sigma_{y|x}| + (y^i - Gx^i)' \Sigma_{y|x}^{-1} (y^i - Gx^i) \right\} \\ &= C - \frac{N}{2} \left\{ \log |\Sigma_{y|x}| + \text{tr } \Sigma_{y|x}^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y^i - Gx^i)(y^i - Gx^i)' \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Daar } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y^i - Gx^i)(y^i - Gx^i)' =$$

$$= \sum_{i=1}^N (y^i y^{i'} - Gx^i y^{i'} - y^i x^{i'} G' - Gx^i x^{i'} G')$$

$$= M_{yy} - G M_{xy} - M_{yx} G' - G M_{xx} G'$$

$$= (I, -G) \begin{pmatrix} M_{yy} & M_{yx} \\ M_{xy} & M_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix}$$

$$= (I, -G) M_{zz} \begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix},$$

geldt

$$L_{y|x} = C - \frac{N}{2} \left\{ \log |\Sigma_{y|x}| + \text{tr } [\Sigma_{y|x}^{-1} (I, -G) M_{zz} \begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix}] \right\}$$

$$L_{y|x} = C - \frac{N}{2} \left\{ \log |\Sigma_{y|x}| + \text{tr} \left[\begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix} \Sigma_{y|x}^{-1} \begin{pmatrix} I & -G \end{pmatrix} M_{zz} \right] \right\} \quad (4.5)$$

We zullen nu bovenstaande uitdrukking (4.5) voor de loglikelihood vereenvoudigen door $|\Sigma_{y|x}|$ en $\begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix} \Sigma_{y|x}^{-1} \begin{pmatrix} I & -G \end{pmatrix}$ anders te schrijven. Daartoe introduceren we de "quasi-covariantiematrix"

$$\tilde{\Sigma}_{zz} = \begin{pmatrix} G\Phi G' + \Sigma_{y|x} & G\Phi \\ \Phi G' & \Phi \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

met $\Phi = M_{xx}$. Merk op dat dit niet een echte covariantiematrix is (dat zou het wel zijn indien x random was en indien $\Phi = \Sigma_{xx}$) en dat de uitdrukking van $\tilde{\Sigma}_{zz}$ als functie van A, B, Γ, Φ, Ψ , en Θ dezelfde is als de uitdrukking van Σ_{zz} in het LISREL-model bij FIXED- x (zie LISREL-manual pagina 5 en 69).

Door de laatste q kolommen van $\tilde{\Sigma}_{zz}$ met G' te vermenigvuldigen en van de eerste p af te trekken verandert de determinant niet en vinden we dat

$$\begin{aligned} |\tilde{\Sigma}_{zz}| &= \begin{vmatrix} \Sigma_{y|x} & G\Phi \\ 0 & \Phi \end{vmatrix} \\ |\tilde{\Sigma}_{zz}| &= |\Sigma_{y|x}| \cdot |\Phi| \end{aligned} \quad (4.7)$$

Door het rechterlid van (4.8) met $\tilde{\Sigma}_{zz}$ te vermenigvuldigen ziet men in dat

$$\tilde{\Sigma}_{zz}^{-1} = \begin{pmatrix} I \\ -G' \end{pmatrix} \Sigma_{y|x}^{-1} \begin{pmatrix} I & -G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Met behulp van (4.7) en (4.8) kunnen we (4.5) herschrijven:

$$\begin{aligned} L_{y|x} &= C - \frac{N}{2} \left\{ \log |\tilde{\Sigma}_{zz}| - \log |\Phi| + \text{tr} (\tilde{\Sigma}_{zz}^{-1} M_{zz}) - \text{tr} (\Phi^{-1} M_{xx}) \right\} \\ L_{y|x} &= C' - \frac{N}{2} \left\{ \log |\tilde{\Sigma}_{zz}| + \text{tr} (\tilde{\Sigma}_{zz}^{-1} M_{zz}) \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

met $C' = C + \frac{N}{2} \log |\Phi| + \frac{N}{2} q$ een konstante die niet van de modelparameters afhangt.

Laten we bovenstaande uitdrukking voor de loglikelihood vergelijken met de uitdrukking voor loglikelihood in het geval dat x en y beide random

zijn en $E x = 0$ en $E y = 0$. Op een additieve konstante na geldt daarvoor:

$$L_{y,x} = -\frac{N}{2} \left\{ \log |\Sigma_{zz}| + \text{tr} (\Sigma_{zz}^{-1} S_{zz}) \right\} \quad (4.10)$$

met S_{zz} = steekproefcovariantiematrix en Σ_{zz} = modelcovariantiematrix. Zoals reeds eerder vermeld is de uitdrukking van Σ_{zz} in termen van Λ , B , Γ , ϕ en Θ dezelfde als de uitdrukking voor $\tilde{\Sigma}_{zz}$ (4.6). In Σ_{zz} stelt ϕ de covariantiematrix Σ_{xx} voor, terwijl in $\tilde{\Sigma}_{zz}$ $\phi = M_{xx}$. Een ander verschil tussen (4.9) en (4.10) is dat in (4.9) de momentenmatrix M_{zz} de data representeert terwijl in (4.10) de steekproefvariantiematrix S_{zz} dat doet. Als functie van Λ , B , Γ , Ψ en Θ zijn beide uitdrukkingen echter hetzelfde.

5. Toetsing van hypotheses

Voor toetsing van hypotheses gebruiken we als toetsingsgrootheid $\Lambda = -2 \log$ -likelihoodratio; deze is asymptotisch χ^2 verdeeld. Allereerst zullen we het bijbehorende aantal vrijheidsgraden bepalen. Daar $y|x \sim \mathcal{N}(Gx, \Sigma_{y|x})$ is het aantal onafhankelijke onbekende parameters gelijk aan het aantal elementen van G + het aantal elementen van $\Sigma_{y|x} = p \cdot q + \frac{1}{2}p(p+1)$. Stel in een geïdentificeerd model H_0 worden t parameters geschat; dan is het aantal vrijheidsgraden

$$df = p \cdot q + \frac{1}{2}p(p+1) - t. \quad (5.1)$$

(Dit is ook te schrijven als $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) - (t + \frac{1}{2}q(q+1))$).

$\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ is het aantal elementen van $\tilde{\Sigma}_{zz}$ en $t + \frac{1}{2}q(q+1)$ is het aantal geschatte parameters van de matrices Λ , B , Γ , Ψ en Θ + het aantal elementen van ϕ .)

Indien we model H_0 , dat zekere restrikties oplegt aan de matrices G en $\Sigma_{y|x}$, willen toetsen tegen de alternatieve hypothese H_1 waardoor géén restrikties aan G en $\Sigma_{y|x}$ worden opgelegd, dan is $-2 \log$ likelihoodratio

$$\Lambda = -2 \left\{ \max_{H_0} L_{y|x} - \max_{H_1} L_{y|x} \right\}.$$

Stel $\max_{H_0} L_{y|x}$ wordt aangenomen voor $\tilde{\Sigma}_{zz} = \tilde{\Sigma}_0$ (met LISREL te bepalen).

Daar het maximum van $L_{y|x}$ onder H_1 wordt aangenomen voor $\tilde{\Sigma}_{zz} = M_{zz}$ geldt dus

$$\Lambda = N \cdot \left\{ \log |\tilde{\Sigma}_0 M_{zz}^{-1}| + \text{tr} (\tilde{\Sigma}_0^{-1} M_{zz}) - (p+q) \right\} \quad (5.2)$$

Deze berekening van de χ^2 -grootheid komt met die van LISREL overeen (zie LISREL-manual pagina 13 en 14).

6. Toepassingen binnen LISREL

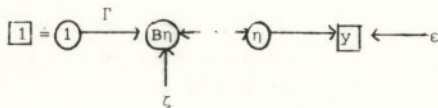
Elk concreet model voor zekere data, dat geformuleerd kan worden volgens (3.1) en (3.2) met zekere restricties op de parameters (sommige parameters een vaste waarde; andere onderling gelijk), kan blijkens de resultaten van paragraaf 4 en 5 met behulp van LISREL geschat en getoetst worden. Een voorbeeld kan men in de LISREL-handleiding vinden, namelijk 'Klein's Model of U.S. economy'. In dat voorbeeld wordt gebruik gemaakt van een dummy - variabele die konstant = 1 is. In andere modellen biedt de introductie van zo'n variabele de mogelijkheid om gemiddelden in die modellen op te nemen (zie ook [2] pagina 93).

We specificeren dan een LISREL-model met één x-variabele die konstant = 1 is en alle andere geobserveerde variabelen specificeren we als y-variabelen. Dit is geen beperking daar elk LISREL-model volledig in termen van y-variabelen te formuleren is. Het algemene model ziet er dan als volgt uit:

$$y = \Lambda \eta + \epsilon \quad (6.1)$$

$$B\eta = \Gamma \cdot 1 + \zeta \quad (6.2)$$

We kunnen dit ook schematisch als volgt weergeven:



De verwachting van de geobserveerde variabelen is dan gelijk aan

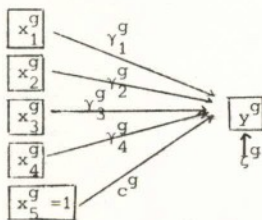
$$E y = \Lambda B^{-1} \Gamma \quad (6.3)$$

Restrikties op gemiddelden zijn in dit geval het beste te specificeren door restrikties op Γ .

Model (6.1) is ook in verschillende groepen te specificeren; door restrikties op de Γ 's tussen de verschillende groepen kunnen restrikties op gemiddelden tussen groepen getoetst worden, bijvoorbeeld of de gemiddelden van variabelen in verschillende groepen gelijk zijn.

7. Uitwerking van het probleem uit paragraaf 2

We kunnen model (2.1) in LISREL-termen specificeren door een extra x-variabele in te voeren: $x_5 = 1$. Schematisch ziet het regressiemodel voor groep g er dan uit als:



Door in LISREL verder te specificeren: FIXED-X, NE = 1, TE = ZE en de momentenmatrix (MA = MM) te analyseren kunnen we bijvoorbeeld de volgende modellen schatten en (onderling) toetsen.

model 1: $\gamma_1^1 = \gamma_1^2$ $i = 1, 2, 3, 4$ en $c^1 = c^2$

: regressiecoëfficiënten en konstante termen in beide groepen gelijk

model 2: $\gamma_1^1 = \gamma_1^2$ $i = 1, 2, 3, 4$

: alleen de regressiecoëfficiënten in beide groepen gelijk

De resultaten van analyses van deze modellen staan in Tabel 2:

Tabel 2

Geschatte waarden van de parameters van model 1 en 2 m.b.v. LISREL (zie tekst).

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	c^1	c^2	χ^2	df
model 1	.056	.014	.032	.039	5.058	5.212	19.5139	4
model 2	.054	.013	.031	.039	5.176		34.9051	5

We moeten dus konkluderen dat beide modellen verworpen dienen te worden. We zouden ook model 2 tegen model 1 kunnen toetsen. Het verschil van de bijbehorende χ^2 -en is 15.3812 met $df = 1$; dit is significant en we verworpen dus model 2 in vergelijking met model 1, d.w.z. ook al zouden we aannemen dat de regressiecoëfficiënten gelijk zijn, dan nog moeten we verworpen dat de konstante termen gelijk zijn.

Tot slot nog een *waarschuwing* voor de LISREL-gebruiker. Bij analyse van modellen à la (3.1) en (3.2) met x-variabelen waarvan het gemiddelde niet nul is en gebruikmakend van de momenten matrix M, kan men op de outputparameterkaart wel een gestandaardiseerde oplossing (SS) vragen, de oplossing die het programma dan als gestandaardiseerd presenteert is echter betekenisloos aangezien in dit geval niet geldt dat $E\eta = 0$ en $E\zeta = 0$ en $E\eta\eta'$ dus niet gelijk is $\Sigma_{\eta\eta}$ (vergelijk met LISREL-handleiding pagina 58 en 60).

Literatuur:

- [1] Jöreskog, K.G. & D. Sörbom; LISREL IV A general computer program for estimation of linear structural equation systems by maximum likelihood methods (1978).
- [2] Jöreskog, K.G. A general method for estimating a linear structural equation system. In A.S. Goldberger & O.D. Duncan (Eds.), Structural equation models in the social sciences. New York: Seminar Press, 1973, 85-112.