

modellen-sectie

CONSTRAINTANALYSE EN MODELBOUW

G. Broekstra.

1. Constraintanalyse

Informatietheorie is te beschouwen als een tak van de wiskunde, en in het bijzonder van de waarschijnlijkheidsrekening. Voor wat de toepassingen van begrippen en principes uit de informatietheorie betreft, zijn het meest bekend die van de wetenschap van de fysische kommunikatiesystemen : de kommunikatietechniek. Het is dan ook niet geheel zonder reden dat informatietheorie wordt vereenzelvigd met communicatietheorie : "Information theory is the study of fundamental aspects of problems encountered in information generation, storage, and transmission".¹⁾

Een ietwat andere opvatting vinden we bij Watanabe, die zegt:

"Information theory has become recognized as providing rational tools effective in unraveling structural relationships existing within systems".²⁾ Watanabe geeft aan dat de aanzet tot de ontwikkeling van de informatietheorie oorspronkelijk wortelt in het systeemdenken (beiden vinden ook hun historische oorsprong in het begin van deze eeuw), wanneer hij stelt: "Historically speaking, it may be an exaggeration but not a misrepresentation to contend that information theory was born out of the need for a mathematical tool to investigate the problem of organization in an assembly of individuals".²⁾ Als zodanig is het gerechtvaardigd om informatietheorie, als analysemethode, te beschouwen als onderdeel van het begrippen- en methodenarsenaal van de systeemtheorie waarin immers vraagstukken van structuur, e.d., een centrale rol spelen. Informatiebegrippen zijn, evenals systeembegrippen, interdisciplinaire 'scharniercategorieën',³⁾ die als methodologisch hulpmiddel ervaringen (verschijnselen, maar ook weer andere begrippen zoals die in verschillende disciplines vigeren) helpen ordenen. Vanuit een dergelijke opvatting hanteert b.v. Garner enkele begrippen (onzekerheid en structuur) uit de informatietheorie om bepaalde aspecten van psychologische vraagstukken te belichten. Voor hem geldt: "the information measure is so valuable not because it is the basis of a theory of communication, but rather because it provides a very general type of mathematics," en verderop: "our use of it will primarily be as a method of logical analysis, in particular as a method of logical multivariate analysis".⁴⁾

Niettemin is het opvallend dat bepaalde uitwerkingen van de informatietheorie (zie b.v. Ashby⁵⁾) als systeemmethodologisch hulpmiddel nog betrekkelijk

weinig ingang hebben gevonden. Wel zien we dat in toenemende mate en bij uiteenlopende probleemstellingen informatietheoretische begrippen en principes worden toegepast. Ik noem hier b.v. de economie ⁶⁾, de psychologie ⁷⁾, de financieringstheorie ⁸⁾, de sociologie ⁹⁾, de organisatie-theorie ¹⁰⁾, en de methodologie ¹¹⁾. Conant geeft de volgende suggestie: "not much use seems to have been made of the result, perhaps in part because the descriptors 'N-dimensional Information Theory' or 'Uncertainty Analysis' did not adequately represent what can actually be seen as the analysis of constraints in multivariable systems. In any statistically-analyzable system of several variables interacting in a lively way, some variables (or sets of them) exert effects on others. These effects are reflected statistically as non-independence of the variables involved, and it is this deviation from independence which we indicate by the term 'constraint'." ¹²⁾ Met deze opmerking van Conant is tevens de term 'constraint' ingevoerd. We zullen straks informatietheoretische definities van dit begrip behandelen. Thans stellen we reeds voor en zullen dat verder onderbouwen, dat de ontwikkeling en de toepassing van het informatietheoretisch begrippenarsenaal t.b.v. het zgn. probleem van structuuridentificatie ('structural modelling') kan worden aangeduid met de term 'constraint analysis'.

We zullen nu eerst enkele basisbegrippen van de theorie van 'constraint analysis' behandelen. Er zal niet of nauwelijks aandacht worden besteed aan het bewijzen van bepaalde uitspraken of formules. Het gaat hier om een 'bird's eye view'; in de nog te noemen literatuur kan men de nodige bewijsvoering terugvinden.

Het meest fundamentele begrip van de informatietheorie is de entropiefunctie. Gegeven een variabele X met discrete waardenverzameling $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ en een bijbehorende complete verdeling van kansen (b.v. geïnterpreteerd als relatieve frekwenties)

$$f(x_i), (i = 1, 2, \dots, r; \sum_{i=1}^r f(x_i) = 1)$$

(hoewel de $f(.)$ vaak refereert naar het continue geval, zullen we hier alleen het discrete geval behandelen), dan wordt de entropiefunctie van deze verdeling gedefinieerd als

$$H(X) = - \sum_{i=1}^r f(x_i) \log f(x_i) \quad (1)$$

waarvan de eenheid wordt uitgedrukt in bits, wanneer de logaritme het grondtal 2 heeft. Dit is een niet-negatieve grootheid, die de waarde nul aanneemt indien een of andere $f(x_i) = 1$ (terwijl dus de overige $f(x_j)$'s, $j \neq i$, gelijk zijn aan nul). De entropiefunctie krijgt zijn maximale waarde als alle $f(x_i)$'s aan elkaar gelijk zijn, d.w.z. $f(x_i) = \frac{1}{r}$ voor alle i , in de uitkomstenruimte, terwijl dan $H(X) = \log r$.

Met deze eigenschappen van de entropiefunctie is het plausibel dat uit systeem-theoretisch oogpunt de entropiefunctie kan worden geïnterpreteerd als een maat voor 'activiteit van een variabele'. Als de verzameling waarden slechts één element bevat, dan is er geen activiteit en $H(X) = 0$.

De grootst mogelijke activiteit treedt op wanneer alle waarden even vaak voorkomen, dwz. wanneer de kansverdeling rechthoekig is, en dus $H(X) = \log r$.

We zullen kortweg spreken van de variabiliteit van een variabele in plaats van de variabiliteit van de kansverdeling behorende bij de betreffende waardenverzameling van die variabele. Als een waardenverzameling b.v. twee elementen bevat, is de variabiliteit maximaal wanneer $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$, en $H(X) = 1$ bit, de eenheid van informatie.

Vaak wordt de entropiefunctie ook een maat voor onzekerheid genoemd. Hiermee wordt bedoeld dat de gemiddelde onzekerheid die

een waarnemer heeft ten aanzien van het optreden van een gebeurtenis (hier: het door een variabele 'aannemen' van een bepaalde waarde) eveneens door de entropiefunctie kan worden weergegeven. Wanneer slechts één waarde optreedt, is er geen onzekerheid: $H=0$; wanneer alle waarden even vaak voorkomen is de onzekerheid, waarin de waarnemer verkeert, vóórdat de gebeurtenis optreedt, maximaal. Aan deze interpretatie van de entropiefunctie koppelt men dan een maat voor de gemiddelde hoeveelheid informatie die verkregen is nadat de gebeurtenis met zekerheid plaats vond. D.w.z. geen informatie wordt verkregen als er geen onzekerheid was, de maximale hoeveelheid informatie wordt (gemiddeld) verkregen als de onzekerheid maximaal was. Deze interpretaties (die van hoeveelheid onzekerheid en informatie) spelen een belangrijke rol in de theorie van communicatie (met name bij het onderdeel syntaxis). Voorts kan de entropiefunctie ook gebruikt worden als maat voor de intensiteit van selecties of allocaties (voor toepassingen in o.a. de economie, zie Theil⁹⁾). Al deze interpretaties zijn in wezen terug te voeren op het (meer neutrale) be-

grip van variabiliteit, als eigenschap van een verdeling (hoe deze ook tot stand is gekomen; als relatieve frekwenties van een serie gebeurtenissen, als verzameling frakties van een bepaald geheel, etc.). Als zodanig past het begrip natuurlijkerwijs in het begrippenapparaat van de systeemtheorie.

In het algemeen verwijst het begrip 'constraint' naar een discrepantie of verschil tussen wat (maximaal) mogelijk (of nominaal) is en wat feitelijk is. Zo kunnen we het begrip 'constraint' invoeren voor één variabele als pendant van het begrip variabiliteit. Voor variabele $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ is de maximale of nominale variabiliteit gelijk aan $\log r$, terwijl de feitelijke kansverdeling een variabiliteit heeft die gelijk is aan $H(X)$. We definiëren nu de verdelingsconstraint ('distributional constraint') als

$$VC(X) = \log r - H(X) \quad (2a)$$

Zo kan ook de relatieve verdelingsconstraint gedefinieerd worden als de genormaliseerde versie hiervan

$$VCN(X) = 1 - \frac{H(X)}{\log r} \quad (2b)$$

De relatieve constraint voor de kansverdeling van X is dan gelijk aan nul wanneer $H(X) = \log r$, en maximaal en gelijk aan 1 wanneer $H(X) = 0$. Op dezelfde wijze kan ook de variabiliteit genormaliseerd worden. De term achter het 'min'-teken in verg. (2b) is dan te definiëren als de relatieve variabiliteit.

De entropiefunctie kan ook worden gedefinieerd voor (de n -variate kansverdeling van) een verzameling van variabelen. Hiertoe definiëren we het Cartesisch product X van de afzonderlijke waardenverzamelingen, dat is, gegeven de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$, $X = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$, waarvan een element, een n -tuple, wordt aangegeven met $x \in X$. Dus als $x_1 = \{0,1\}$ en $x_2 = \{a,b\}$, dan is $X = \{(0,a), (0,b), (1,a), (1,b)\}$, en $(0,a) \in X$. Wanneer de kansverdeling gegeven is door $f(x)$, dan is een maat voor de variabiliteit van de verzameling van variabelen $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$H(S) \equiv H(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum f(x) \log f(x) \quad (3)$$

waarbij de sommering in feite staat voor de n sommeringsoperaties die moeten

worden uitgevoerd voor elke variabele. Deze functie heeft dezelfde eigenschappen als hierboven zijn genoemd voor $H(X)$. Als in ons voorbeeld van twee variabelen $f(0,a) = f(0,b) = f(1,a) = f(1,b) = \frac{1}{4}$, dan is $H(X_1, X_2) = 2$ bit. Op analoge wijze als voor één variabele kan ook het begrip verdelingsconstraint voor n variabelen worden ingevoerd.

Het is nu interessant om te weten in hoeverre de variabiliteit van een verzameling variabelen niet kan worden toegeschreven aan een deelverzameling van deze variabelen. Het begrip partiële of conditionele variabiliteit wordt hiervoor ingevoerd. Gegeven b.v. een verzameling $S = \{X_1, X_2\}$, dan is de variabiliteit van S , die niet kan worden toegeschreven aan die van b.v. $S_1 = \{X_1\}$, gedefinieerd door de conditionele entropiefunctie

$$H_{S_1}(S_2) = H(S) - H(S_1) \quad (4)$$

waarin $S_2 = S - S_1 = \{X_2\}$. M.a.w. de variabiliteit van S kan gedacht worden te zijn opgebouwd uit twee bijdragen, die van de deelverzameling S_1 plus die van het complement S_2 , gegeven (of constant houdend) de bijdrage van S_1 . Ook dit is een niet-negatieve grootheid, waarvan de waarden liggen tussen nul, als S_1 S_2 volledig 'bepaald', en $H(S_2)$, als S_1 en S_2 statistisch onafhankelijk zijn. Het is nu te bewijzen, dat

$$H_{S_1}(S_2) \leq H(S_2) \quad (5)$$

hetgeen, nu eens geïnterpreteerd in termen van onzekerheid, uitdrukt dat kennis van de toestand van het subsysteem S_1 in het algemeen niet de verwachte onzekerheid over de toestand van S_2 zal doen toenemen. Combinatie van verg. (4) en (5) levert dan het resultaat dat

$$H(S) \leq H(S_1) + H(S_2)$$

waarin het 'gelijk'-teken geldt als en alleen als de twee deelverzamelingen S_1 en S_2 statistisch onafhankelijk zijn. M.a.w. door het bestaan van niet-onafhankelijkheid tussen de twee deelverzamelingen zal de variabiliteit van het systeem als geheel kleiner zijn dan de som van de delen (nl. de 'marginale' variabiliteiten der afzonderlijke deelverzamelingen).

Deze statistische afhankelijkheid kan geïnterpreteerd worden als het aanwezig

zijn van een relatie tussen S_1 en S_2 . Het verschil tussen de maximaal mogelijke variabiliteit (gegeven de marginale variabiliteiten), $H(S_1) + H(S_2)$, en de feitelijke variabiliteit is dus een maat voor de 'constraint' in het systeem, die het gevolg is van de relatie tussen S_1 en S_2 . Deze relationele constraint ('relational constraint') wordt nu gedefinieerd door het genoemde verschil. In de communicatietheorie gebruikt men hiervoor het begrip informatie-transmissie. Beschouwen we bij wijze van voorbeeld het geval van een deelverzameling van twee variabelen, dwz. $S = \{X_1, X_2\}$, dan wordt de relationele constraint tussen twee variabelen gedefinieerd als

$$T(X_1 : X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \quad (6)$$

We zouden hier ook kunnen spreken van (een definitie voor) een maat voor de hoeveelheid (sterkte, intensiteit) van een relatie tussen twee variabelen (evt. in een systeem van n variabelen, waarbij het effect van de overige variabelen wordt genegeerd, dat is, ze worden niet constant gehouden). Het is duidelijk dat deze grootheid eveneens niet-negatief is; bovendien is uit verg. (6) te zien dat het een symmetrische grootheid is, dwz.

$$T(X_1 : X_2) = T(X_2 : X_1).$$

De relationele constraint is afwezig, $T(X_1 : X_2) = 0$, als en alleen als de twee variabelen statistisch onafhankelijk zijn, dwz. $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$ voor alle waarden $x_1 \in X_1$ en $x_2 \in X_2$. De constraint is maximaal als x_1 x_2 en/of x_2 x_1 deterministisch bepaalt, en gelijk aan de kleinste waarde van de twee entropieën, $H(X_1)$ of $H(X_2)$. Dit is gemakkelijk in te zien, wanneer we verg. (6) herschrijven mbv. vergelijkingen van de vorm van verg. (4). We krijgen dan

$$T(X_1 : X_2) = H(X_1) - H_{X_2}(X_1) \quad (7a)$$

of

$$T(X_1 : X_2) = H(X_2) - H_{X_1}(X_2) \quad (7b)$$

In termen van onzekerheid geredeneerd, kan men aan (7a) zien dat, indien er geen onzekerheid bestaat over welke waarde van X_1 dan ook, gegeven een waarde van X_2 , dus $H_{X_2}(X_1) = 0$, de informatieoverdracht tussen X_1 en X_2 maximaal is en gelijk aan $H(X_1)$; of, iets anders gezegd, kennis over de waarde van X_2 , levert geen nieuwe kennis (informatie) over de waarde van X_1 . Deze laatste

ligt immers volledig vast, en is dan redundant te noemen. Met het begrip redundantie zitten we weer dicht bij de betekenis van het begrip constraint.⁴⁾ Er kan nog iets meer licht worden geworpen op de betekenis van b.v. verg. (7a) door de termen van de vergelijking als volgt te rangschikken

$$H(X_1) = T(X_1:X_2) + H_{X_2}(X_1)$$

De interpretatie kan nu zijn dat de variabiliteit van X_1 opgesplitst (of 'verklaard') wordt in een deel dat het gevolg is van de variabiliteit van X_2 (middels de relationele constraint) en een residue variabiliteit, die niet aan X_2 wordt ontleend; deze laatste is de intrinsieke variabiliteit ('ruis') van X_1 .

Evenzo kan de bivariate variabiliteit opgesplitst worden in een aantal bijdragen. Door gebruik te maken van de verg. (7a) en (7b), tezamen met verg. (6), krijgen we

$$H(X_1, X_2) = T(X_1:X_2) + H_{X_1}(X_2) + H_{X_2}(X_1)$$

Het is nu van belang om m.b.v. verg. (6) de samenstelling van de bivariate verdelingsconstraint nader onder de loep te nemen. Door verg. (6) opnieuw te rangschikken, en gebruik te maken van het feit dat, gegeven dat de waardenverzamelingen X_1 en X_2 respectievelijk r_1 en r_2 elementen bevatten, de verzameling $X_1 \times X_2$ (d.w.z. het Cartesisch product van X_1 en X_2) $r_1 r_2$ elementen bevat, krijgen we dat

$$\log r_1 r_2 - H(X_1, X_2) = \log r_1 - H(X_1) + \log r_2 - H(X_2) + T(X_1:X_2)$$

of

$$VC(X_1, X_2) = VC(X_1) + VC(X_2) + RC(X_1, X_2) \quad (8)$$

waarin, naar analogie, $RC(X_1, X_2) = T(X_1:X_2)$. In woorden, de bivariate verdelingsconstraint is additief opgebouwd uit drie elementen, n.l. de marginale verdelingsconstraints van X_1 en X_2 afzonderlijk en de relationele constraint tussen X_1 en X_2 . We zien uit (8) dat, alleen in het geval dat X_1 en X_2 statistisch onafhankelijk zijn, de bivariate verdelingsconstraint gelijk is aan de som van de afzonderlijke univariate constraints. In alle overige gevallen is

zij groter dan deze som.

We zullen nu een eenvoudig voorbeeld geven. Met de volgende kanstabel, waarin $X_1 = \{0,1\}$ en $X_2 = \{0,1\}$,

		X_2		
		0	1	
X_1	0	0,1	0,2	0,3
	1	0,3	0,4	0,7
		0,4	0,6	1

laat zich berekenen dat $H(X_1) = 0,881$ bit, $H(X_2) = 0,971$ bit, $H(X_1, X_2) = 1,846$ bit, en $T(X_1: X_2) = 0,006$ bit. De 'sterkte' van de relatie tussen X_1 en X_2 , uitgedrukt in procenten van de maximaal mogelijke sterkte ($H(X_1)$), is dan 0,68%; een zeer zwakke relationele constraint dus. Dit is ook te zien aan de grootte van b.v. $H_{X_1}(X_2) = 0,965$, die praktisch gelijk is aan $H(X_2)$; m.a.w. X_1 oefent (gemiddeld) praktisch geen invloed uit op de activiteit van X_2 , en omgekeerd. Verg. (8) ziet er numeriek ingevuld als volgt uit:

$$0,154 = 0,119 + 0,029 + 0,006$$

We zien dat de belangrijkste bijdrage tot de bivariate verdelingsconstraint afkomstig is van X_1 . De relationele constraint is betrekkelijk klein t.o.v. de verdelingsconstraints.

Ter completering van deze beschouwing over het begrip relationele constraint, merken we op dat, zoals kan worden gesproken van een partiële of conditionele variabiliteit, ook een conditionele relationele constraint kan worden gedefinieerd; b.v.

$$T_{X_3}(X_1: X_2) = H_{X_3}(X_1) - H_{X_2 X_3}(X_1)$$

is de relationele constraint tussen X_1 en X_2 , waarbij X_3 constant wordt gehouden. Dit soort definities komt eenvoudigweg tot stand door de termen in de definitievergelijking (hier (7a)) allen van dezelfde indices (hier X_3) te voorzien. Dit principe staat bekend als 'McGill en Garner's Rule', die in het algemeen zegt, dat een identiteit in de informatietheorie geldig blijft als alle termen daarin voorzien worden van dezelfde index of indices.⁵⁾ Uiteraard is dit ook

te bewijzen; we laten dat echter achterwege.

Een voor de hand liggende generalisering van het begrip relationele constraint tussen twee variabelen naar die tussen n variabelen ($n \geq 3$), $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, kan naar analogie van verg. (6) worden verkregen:

$$T(S) \equiv T(X_1: X_2: \dots: X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i) - H(S) \quad (9)$$

waarin $H(S) \equiv H(X_1, X_2, \dots, X_n)$. We zullen hier spreken van structurele constraint; dwz. het begrip relationele constraint is een bijzonder geval van structurele constraint, n.l. voor $n = 2$. De structurele constraint is een maat voor de afwijking van statistische onafhankelijkheid, of voor de hoeveelheid interactie, in het systeem van n variabelen als geheel. De structurele constraint verdwijnt als en alleen als de variabelen simultaan onafhankelijk zijn, en is positief in alle overige gevallen. Het belang van deze grootheid wordt door Ashby a.v. aangegeven: "it measures the total quantity of relationships that exist in the system - the total quantity of law... that can be extracted from the data. Thus it is possible to measure how much law a given body of data contains before the particular details of the law/or laws have been discovered".⁵⁾ Structurele constraint als maat voor hoeveelheid structuur of 'organisatie' wordt ook door Watanabe van belang geacht voor wat hij noemt 'structure analysis': "We stated that the degree of 'organization' becomes larger if the degree of indeterminacy of the system as a whole decreases in spite of a large degree of individual indeterminacy. If there is no organization, a large amount of indeterminacy of individuals will result in a large amount of indeterminacy of the whole. Thus the strength of organization will be measured by the balance between the indeterminacy of the parts and the indeterminacy of the whole. If we remember that entropy is a measure of indeterminacy, then it will not be too far-fetched to assume that the degree of organization is given by: organization = (sum of entropies of parts) - (entropy of whole)"²⁾

De term 'constraint' kan nog wat nader toegelicht worden. Ashby (verwijzend naar Wiener¹³⁾) gebruikte de term 'constraint', die wordt geïntroduceerd door een relatie R (in verzamelingtheoretische zin), gegeven een verzameling E , voor de verzameling $E-R$. Gebruik makend van de methoden der informatietheorie was Ashby's idee om de totale entropie $H(S)$ te laten corresponderen met R , de maximale entropie $H(X_1) + \dots + H(X_n)$ met E , en de totale transmissie met de constraint $E-R$. Ter onderscheiding van de methoden van 'constraint analysis'

gebaseerd op verzamelingtheoretische begrippen, zullen we spreken van probabilistische constraintanalyse wanneer informatietheorie als hulpmiddel wordt gebruikt. 14,26)

Op dezelfde wijze als dat gebeurde in verg. (8) kan gemakkelijk aangetoond worden dat de verdelingsconstraint van de n-variate verdeling opgebouwd gedacht kan worden uit de som van de univariate verdelingsconstraints plus de structurele constraint.

We zullen nu onze aandacht richten op enkele manieren waarop de structurele constraint, geldend voor een systeem als geheel, kan worden opgebouwd uit constraints die betrekking hebben op delen (deelverzamelingen) van het systeem. We zullen hiertoe volstaan met enkele eenvoudige voorbeelden. Het eerste betreft de opsplitsing van de totale structurele constraint in structurele (of relationele) constraints die verwijzen naar deelsystemen. Veronderstel dat $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$; een mogelijke opsplitsing is dan

$$T(S) = T(X_1 : X_2) + T(X_3 : X_4) + \tilde{T}(X_1, X_2 : X_3, X_4) \quad (10)$$

De totale structurele constraint is opgebouwd uit additieve combinaties van (i) de structurele (of hier, relationele) constraint in het subsysteem $S_1 = \{X_1, X_2\}$, (ii) de structurele (relationele) constraint in het subsysteem $S_2 = \{X_3, X_4\}$, en (iii) de structurele (relationele) constraint tussen S_1 als geheel (als één variabele beschouwd) en S_2 als geheel. Een andere mogelijkheid is de volgende. Gegeven weer $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$:

$$T(S) = T(X_1 : X_2) + T(X_1, X_2 : X_3) + T(X_1, X_2, X_3 : X_4) \quad (11)$$

Hierbij is de eerste component de relationele constraint van X_1 en X_2 , de tweede die van X_1 en X_2 samen en X_3 , en de derde die van het subsysteem $\{X_1, X_2, X_3\}$ en X_4 . Weer een andere mogelijkheid ontstaat door samenvoeging van de eerstgenoemde twee termen:

$$T(S) = T(X_1 : X_2 : X_3) + T(X_1, X_2, X_3 : X_4) \quad (12)$$

waarbij in feite twee deelsystemen worden onderscheiden, n.l. $\{X_1, X_2, X_3\}$ en $\{X_4\}$. De eerste term heeft betrekking op de structurele constraint in

het subsysteem $\{x_1, x_2, x_3\}$, terwijl de tweede term de relationele constraint tussen de twee subsystemen is (de structurele constraint in 1 variabele heeft natuurlijk geen betekenis).

In al deze gevallen wordt een systeem van variabelen uitputtend opgesplitst in een aantal disjuncte (zonder gemeenschappelijke elementen) subsystemen. De totale structurele constraint is dan opgebouwd uit additieve combinaties van de structurele (of relationele) constraints in de subsystemen en de structurele constraint tussen de subsystemen. In feite geeft verg. (11) een voorbeeld van een hiërarchische opsplitsing. Eerst worden de subsystemen $\{x_1, x_2, x_3\}$ en $\{x_4\}$ onderscheiden (zie verg. (12)). Vervolgens wordt het subsysteem $\{x_1, x_2, x_3\}$ opgesplitst in de subsystemen $\{x_1, x_2\}$ en $\{x_3\}$. De eerste twee termen rechts van het '='-teken in (11) zijn dan resp. de relationele constraint in subsubstysteem $\{x_1, x_2\}$ en de relationele constraint tussen de twee subsubsystemen (de 'structurele' constraint in $\{x_3\}$ is weer gelijk aan nul). Het zoeken naar opsplitsingen of decomposities waarbij de constraints tussen subsystemen relatief zwak zijn vergeleken met die in de subsystemen kan de bestudering van een complex systeem aanzienlijk vereenvoudigen.

Het is echter ook mogelijk om de totale structurele constraint te analyseren volgens de bijdragen die naar verschillende graden van complexiteit in het systeem verwijzen. Allereerst onderscheiden we de bijdragen afkomstig van de (relationele) constraints in paren van variabelen. Deze hebben we reeds besproken. Men kan nu ook spreken van de constraint die ontstaat doordat drie (of meer) variabelen als één drietal (meer-tal) optreden. Het gaat hier dan om bijdragen tot de totale structurele constraint die niet te herleiden zijn tot de relationele constraints van paren van variabelen: 'It thus measures the degree to which the system (here of three variables) is irreducibly complex, i.e. not to be treated by examination of the variables two at a time'.⁵⁾

We definiëren nu de interactionele constraint (van de tweede orde) op een van de volgende equivalente manieren.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = T_{x_3}(x_1 : x_2) - T(x_1 : x_2) \quad (13a)$$

$$= T_{x_1}(x_2 : x_3) - T(x_2 : x_3) \quad (13b)$$

$$= T_{x_2}(x_3 : x_1) - T(x_3 : x_1) \quad (13c)$$

De interactionele constraint (of kortweg : interactie) heeft een unieke waarde en kan zowel negatief, nul als positief zijn. De conditionele relationele constraint werd hierboven reeds gedefinieerd. Zoals de relationele constraint kan worden gezien als de mate van restrictie die aan de variabiliteit van één variabele door de ander wordt opgelegd, zo kan de interactionele constraint worden opgevat als de mate van restrictie die aan de variabiliteit van één variabele wordt opgelegd door unieke combinaties van de andere twee. Deze interpretatie is eigenlijk alleen valide voor positieve waarden van de interactie. Wanneer Q echter negatieve waarden aanneemt is hier alleen een betekenis aan te ontleen wanneer het als onderdeel van een patroon van structurele (en interactionele) constraints wordt gezien. In dat geval heeft het dan vaak de functie van een correctieterm.^{4,15)}

Hogere-orde interacties worden uitgedrukt in termen van lagere-orde (conditionele) interacties, b.v. een mogelijke definitie van de derde-orde interactie is:

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) = Q_{X_4}(X_1, X_2, X_3) - Q(X_1, X_2, X_3) \quad (14)$$

waarbij de tweede-orde conditionele interactie kan worden verkregen door in b.v. verg. (13a) de rechterleden van de index X_4 te voorzien.

De opsplitsing van de totale constraint in termen van relationele en interactionele constraints wordt nu voor het systeem $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$T(S) = \sum_{ij} T(X_i : X_j) + \sum_{ijk} Q(X_i, X_j, X_k) + \dots + Q(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (15)$$

waarbij begrijpelijkerwijs de sommeringen uitgevoerd worden voor alle onderscheidbare vormen. Zo wordt (15) voor het geval van drie variabelen

$$T(X_1 : X_2 : X_3) = T(X_1 : X_2) + T(X_1 : X_3) + T(X_2 : X_3) + Q(X_1, X_2, X_3) \quad (16)$$

De bijdragen tot de totale structurele constraint zijn dus afkomstig van de relationele constraints in de drie verschillende paren van variabelen en van de interactie tussen de drie variabelen. De relatieve grootte van de opeenvolgende termen in verg. (15) geeft enig inzicht in de complexiteit van het systeem, n.l. voor zover deze is toe te schrijven aan het gekombineerde gedrag van twee, drie of meer variabelen te zamen.

We zullen nu een voorbeeld geven van een systeem van vier variabelen (dit is een variant van een drie-variabelen

voorbeeld van Ashby⁵⁾). Vier spionnen (dHr. A., B., C. en D.) worden er van verdacht samen te spannen. Men nam waar dat ieder elke dag een bezoek bracht of aan Groningen (G) of aan Maastricht (M). Men stelde vast dat op iedere dag de kans even groot was dat de vier spionnen volgens één van de volgende acht combinaties verspreid waren

A in :	G	G	G	G	M	M	M	M
B in :	G	G	M	M	G	G	M	M
C in :	G	M	G	M	G	M	G	M
D in :	G	M	M	G	M	G	G	M

De vraag is nu of de 'bewegingen' van de spionnen iets met elkaar hadden uit te staan. Berekenen we nu de variabiliteiten voor 1,2,etc. variabelen, dan vinden we dat $H(I)=1$, $H(I,J)=2$, $H(I,J,K)=3$, en $H(A,B,C,D)=3$ bit, waarin I,J,K op de juiste wijze gelijk worden gesteld aan A,B,C, of D. Met deze gegevens berekenen we de relationele constraints: $T(I:J)=0$ voor alle (zes) combinaties van A,B,C, en D. M.a.w. elke spion opereert onafhankelijk van elke andere spion. Evenzo vinden we dat $Q(I,J,K)=0$ voor elke (vier) combinaties van A,B,C en D, d.w.z. elke spion opereert onafhankelijk van de combinatie van twee andere spionnen. Dit is ook vast te stellen door $T(I:J:K)$ direct volgens de definitievergelijking (9) te berekenen: deze is voor elke combinatie van A,B,C en D gelijk aan nul. Tot slot berekenen we dat $Q(S) \equiv Q(A,B,C,D) = 1$ bit, en daarmee gelijk aan $T(S)$. Dus de derde orde interactie tussen de vier spionnen bepaalt volledig de totale structurele constraint. Wanneer de plaats van welk drietal dan ook bekend is, is de plaats van de vierde spion volledig bepaald. Gecoördineerde actie kan dus bewezen worden geacht.

Met dit voorbeeld sluiten we deze inleiding van enkele begrippen, definities en (decompositie) principes van de theorie van 'constraint analysis' af. Van de tweede vorm van decompositie (de eerste betrof de opsplitsing in structurele constraints in en tussen subsystemen) is aangetoond dat ze een belangrijke rol speelt bij het oplossen van structuuridentificatieproblemen.¹⁵⁾ Aangezien dit probleem ook op een manier kan worden benaderd die intuïtief beter aanspreekt, zullen we er in deze korte inleiding niet verder op ingaan.

2. Voorbeeld van de identificatie van een gedragssysteem.

Als eerste toepassing van de theorie van constraintanalyse zullen we een eenvoudig voorbeeld geven van de identificatie van een gedragssysteem, zoals dat door Klir is gedefinieerd.¹⁶⁾ Het voorbeeld is zodanig simpel gehouden dat de lezer met de hand en zonder gebruik te maken van tabellen of enig rekentuig de berekeningen zelf kan herhalen. Voor een uitvoeriger behandeling raadplege men de literatuur.^{16,17)} Het voorbeeld betreft een tweetal variabelen waarvan de activiteitenmatrix samengesteld is door periodieke herhaling van het volgende 'blok':

	t_{i-1}	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}	t_{i+5}	t_{i+6}	t_{i+7}	t_{i+8}
x_1 :	.	0	0	0	1	1	0	1	1	.
x_2 :	.	0	0	1	0	0	1	1	1	.

Op tijdstip t_{i+8} herhaalt dit patroon zich, zodat de toestand op t_{i+8} gelijk is aan die op t_i , etc. We zien dat het hier gaat om een systeem van twee variabelen met waardenverzamelingen $x_1 = x_2 = \{0,1\}$. Indien dit het enige zou zijn wat gegeven is, kunnen we vaststellen dat hiermee een bovengrens wordt gesteld aan de complexiteit van de probleemsituatie (of onzekerheid) die door de onderzoeker wordt 'meegenomen'.

Deze uitspraak kan informatie-theoretisch worden gekwantificeerd door de nominale variabiliteit (onzekerheid van de onderzoeker m.b.t. de toestand van het systeem) te berekenen, n.l. die waarbij de variabelen onafhankelijk zijn, terwijl hun waarden met dezelfde kans optreden. Op dit kennis-niveau wordt het primitiefsysteem dan gekarakteriseerd door een mate van onzekerheid gegeven door

$$H_0(x_1, x_2) = \log 2 + \log 2 = 2 \text{ bit}$$

Wanneer de datamatrix is gegeven zou men deze onzekerheid kunnen reduceren door de feitelijke kansen (relatieve frekwenties) te bepalen van elk der variabelen afzonderlijk, terwijl de veronderstelling van onafhankelijkheid wordt gehandhaafd. De onzekerheid van de onderzoeker kan in dit voorbeeld dan door een eenvoudige telling worden berekend, en is

$$H_1(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2) = 2 \text{ bit}$$

In het algemeen geldt $H_1 \leq H_2$; alleen in dit speciale geval blijkt dat $H_1 = H_2$.

We zullen nu op een tweetal verschillende manieren met behulp van zogenaamde maskers tot een samenvatting of reductie van de data trachten te komen. De eerste manier behelst met een gegeven specificatie van een masker, het tellen van de aantallen verschillende samples en het berekenen van de totale structurele constraint. Dit 'basisgedrag' maakt dus geen gebruik van de informatie die in de toestandsvergangen van t_1 naar t_1+1 zit opgesloten. Het betreft uitsluitend het opstellen van een frekwentietabel van voorkomende toestanden gebaseerd op het masker. We geven een voorbeeld; stel dat er drie sampling variabelen S_1, S_2, S_3 ($q=2$) zijn, gespecificeerd door $s_{1,t} = x_{1,t}$, $s_{2,t} = x_{2,t}$, $s_{3,t} = x_{2,t+1}$. D.w.z. het masker ziet er als volgt uit:

S_1	
S_2	S_3

Wanneer dit masker een veelvoud van acht opeenvolgende posities doorloopt (i.v.m. de periodiciteit zijn acht posities natuurlijk voldoende), blijkt dat alle acht combinaties $(0,0,0), (0,0,1), \dots, (1,1,1)$ even vaak voorkomen; dus de entropie $H(S_1, S_2, S_3) = 3 \text{ bit}$. Aangezien $H(S_1) = H(S_2) = H(S_3) = 1 \text{ bit}$, volgt dat $T(S_1 : S_2 : S_3) = 0 \text{ bit}$.

Tabel 1 geeft een overzicht van enkele resultaten van het 'basisgedrag' voor verschillende maskers. De eerste kolom bevat de nummers van de verschillende maskers, de tweede het aantal sampling variabelen, terwijl de derde kolom een schematische weergave van het masker geeft. In de vierde kolom staat de variabiliteit van het basisgedragssysteem, d.w.z. van de verzameling van sampling variabelen als geheel. De vijfde kolom geeft de totale structurele constraint voor elk masker. We zien dat voor maskers bestaande uit twee sampling variabelen alleen voor M_7 de structurele constraint ongelijk aan nul is,

n.l. $T(S_1:S_2) = 0,2$ bit. Voor drie variabelen vinden we alleen voor de maskers M_8 en M_{10} een waarde ongelijk nul, n.l. $T(S_1:S_2:S_3) = 0,5$ bit. Beide maskers zijn in feite uitbreidingen van M_7 .

Een andere mogelijkheid is de bepaling van het toestandsverganggedrag ('state transition behaviour'). In de zesde kolom staan de relationele constraints van de toestanden op basis van het gegeven masker op tijdstip t en de toestanden op $t+1$. De laatste kolom geeft de genormaliseerde versie hiervan, d.w.z.

$$A_{T0} = \frac{T(C:C')}{H(C)}$$

zodat $0 \leq A_{T0} \leq 1$. Als $A_{T0} = 1$ dan determineert toestand c de toestand c' volledig. We zien aan dit voorbeeld dat er twee even 'goede' representaties zijn, n.l. M_9 en M_{11} , waarvoor $A_{T0} = 1$. Gegeven nu een bepaalde begintoestand, kan de dataserie mbv. M_9 of M_{11} volledig worden gereproduceerd. Deze maskers vormen dus de eenvoudigste samenvatting van de data.

In het algemeen zal men er nu naar streven met een zo gering mogelijk aantal sampling variabelen een zo hoog mogelijke graad van determinisme te bereiken. Nu neemt met een toenemend aantal variabelen de constraint niet af. Men kan derhalve een kwaliteitsmaat voor een masker definiëren die b.v. gelijk is aan $A_{T0}/(q+1)$, zodat de toename per variabele kan worden vastgesteld. Voor meer details raadplege men Klir¹⁶⁾ en Broekstra.¹⁷⁾

M	q+1		H(S)	T(S)	T(C:C')	A _{T0}
1	1		1	0	0	0
2			1	0	0	0
3	2		2	0	1,5	0,75
4			2	0	1,5	0,75
5			2	0	1	0,5
6			2	0	1	0,5
7			1,8	0,2	0,85	0,47
8	3		2,5	0,5	2	0,8
9			3	0	3	1
10			2,5	0,5	2	0,8
11			3	0	3	1
12	4		3	1	3	1

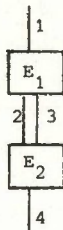
Tabel 1 Maskers, basis- en toestandsoverganggedrag voor voorbeeld genoemd in de tekst.

6. Voorbeeld van de identificatie van een structuursysteem.

Zonder al te veel in details te kunnen gaan, zullen we trachten om aan de hand van een voorbeeld de rol van de constraintanalyse bij de identificatie van een structuursysteem toe te lichten. Een structuursysteem bestaat uit een verzameling elementen en koppelingen tussen die elementen. Elementen zijn gedefinieerd als verzamelingen van variabelen die direct met elkaar zijn gerelateerd. Het laatste behoeft hier feitelijk enige toelichting. Voor technische details raadplege men de literatuur.^{18,19,21)}

In termen van constraintanalyse uitgedrukt, spreken we van een directe (ongerichte) relatie tussen twee variabelen als de relationele constraint tussen de twee, gegeven alle overige variabelen, ongelijk nul is.¹⁵⁾ Een koppeling tussen twee elementen is nu de verzameling van variabelen die beide elementen gemeenschappelijk hebben (m.a.w. de intersectie van de twee elementverzamelingen).

We geven nu een voorbeeld van een structuursysteem van vier variabelen. Element $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ en element $E_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$ zijn verbonden via de koppeling $C_{12} = \{x_2, x_3\}$. Schetsmatig kan dit met een blokdiagram worden weergegeven:



notatie: 123/234

De variabelen x_1, x_2 en x_3 zijn dus direct met elkaar gerelateerd, evenals x_2, x_3 en x_4 . Echter de directe relatie tussen x_1 en x_4 is afwezig. Dus de relationele constraint tussen x_1 en x_4 , voor constante x_2 en x_3 , is gelijk aan nul. Dit is echter ook betrekkelijk eenvoudig direct uit het blokdiagram af te lezen. Om een structuursysteem te vormen moet aan bepaalde voorwaarden zijn voldaan. We zullen daar echter niet op ingaan.

Het aantal mogelijke verschillende directe relaties tussen n variabelen is gelijk aan $\frac{1}{2} n(n-1)$. Het maximale aantal directe relaties is voor vier variabelen dus gelijk aan zes. Wanneer nu één directe relatie wordt weggelaten, zijn er zes verschillende structuursystemen denkbaar, n.l. 123/124; 123/134; 123/234; 124/134; 124/234 en 134/234. Door nu vervolgens weer één directe relatie weg te laten ontstaat er weer een aantal mogelijke structuursystemen, etc. Voor elk aantal directe relaties

Is er dus een klasse van structuursystemen te definiëren, terwijl bovendien is aan te tonen dat er van elke direct opvolgende klasse (één relatie minder) een deelklasse is die uit slechts één structuursysteem van de voorgaande klasse kan worden 'afgeleid', n.l. door één directe relatie weg te laten. De structuurcandidaten van deze deelklasse zijn m.a.w. een verfijning of simplificatie t.o.v. hun voorganger. Zo ontstaat er een hiërarchie van hypothetische structuurcandidaten, die men beginnend met de meest 'complexe', n.l. de kandidaat waarvoor alle variabelen direct zijn gerelateerd, selectief kan doorlopen. Op basis van een nader te definiëren kwaliteitscriterium kan de 'beste' hypothese uit deze klasse van hypothesen worden bepaald.

In figuur 1 is een hiërarchie van structuurcandidaten voor vier variabelen met de bijbehorende structuurtypen weergegeven.¹⁹⁾ We kunnen een zevental niveaus onderscheiden, waarbij elk structuursysteem met 6,...,0 directe relaties respectievelijk behoort bij het bovenste,...,onderste niveau. Rechts in de figuur staan de verschillende blokdiagrammen. De notatie eronder heeft een tweeledige betekenis. De notatie tussen haakjes van type (1) even wegdenkend, is de eerste betekenis conform de hierboven besproken notatie, d.w.z. b.v. type (4) ij/ik/il betekent dat dit type uit de volgende elementen is samengesteld $\{x_i, x_j\}, \{x_i, x_k\}$ en $\{x_i, x_l\}$ zodat de koppelvariabele x_i is, en waarbij (i,j,k,l) de waarden (1,2,3,4) aannemen.

Dezelfde notatie, nu met inachtneming van hetgeen tussen haakjes staat, is echter ook te gebruiken om de totale structurele constraint van de betreffende kandidaten te berekenen, n.l. als de som van de structurele constraints van de elementen. De bewijsvoering is tamelijk ingewikkeld.¹⁸⁾ Het probleem is dat er hier n.l. geen sprake is van partities in disjuncte deelverzamelingen van variabelen. We zullen echter enkele voorbeelden geven, die het toch wel intuïtief duidelijk maken. Een voorbeeld van type (2) is de structuurcandidaat 123/34. De structurele constraint is hiervoor gelijk aan

$$T(x_1:x_2:x_3:x_4) = T(x_1:x_2:x_3) + T(x_3:x_4)$$

hetgeen in feite gelijk is aan de som van structurele constraints van de afzonderlijke elementen. Een voorbeeld van type (3) is 123/4, waarvoor geldt

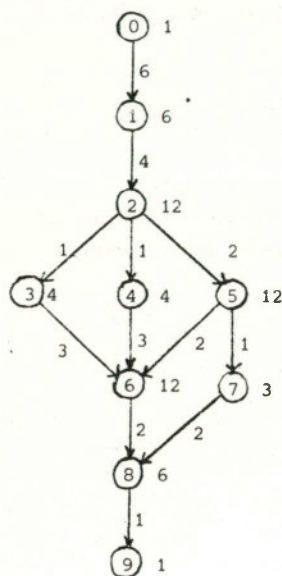
$$T(x_1:x_2:x_3:x_4) = T(x_1:x_2:x_3)$$

daar immers de structurele constraint van X_4 geen betekenis heeft. Een uitzondering vormt nu type (1); een voorbeeld is 123/234

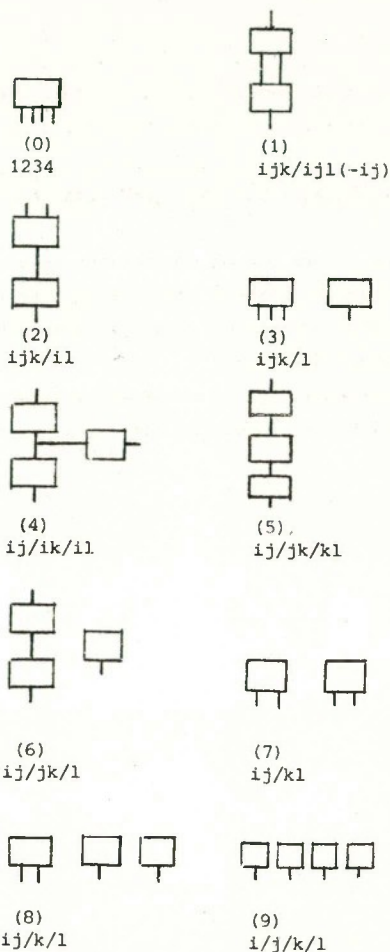
$$T(X_1:X_2:X_3:X_4) = T(X_1:X_2:X_3) + T(X_2:X_3:X_4) - T(X_2:X_3)$$

De eerste twee termen aan de rechterkant zijn weer de structurele constraints van de elementen. De laatste term $T(X_2:X_3)$ is in feite een noodzakelijke correctie, omdat deze anders dubbel zou worden verdisconteerd, n.l. zowel in het eerste als in het tweede element.

Met het bovenstaande zijn we nu gereed voor een concrete toepassing. Gegeven zijn vier variabelen waarvan is vastgesteld dat



(A)



(B)

Fig. 1 (A): hiërarchie van structuurcandidaten; een getal in een cirkel geeft het type kandidaat aan (zie (B)); getallen naast de cirkels geven de aantallen kandidaten van dat type; getallen bij de verbindinglijnen tussen de niveaus geven de aantallen directe opvolgers, die 'afleidbaar' zijn uit een bepaalde voorganger. (B): de blokdiagrammen van de structuurtypes. Voor notatie zie tekst.

het basisgedrag door de volgende tabel van relatieve frekwenties kan worden weergegeven (het betreft een sample van 200 waarnemingen).

(x_1, x_2, x_3, x_4)	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0000	.035
0001	.035
0010	.140
0011	.180
0100	0
0101	.020
0110	.030
0111	.080
1000	.010
1001	.090
1010	.005
1011	.015
1100	.045
1101	.230
1110	.020
1111	.065

Beginnend met structuurcandidaat (0) worden de structurele constraints $T(S)$ berekend (zie tabel 2) op de boven aangegeven wijze. Er is nu een grootheid, T-afstand, notatie Δ , gedefinieerd als

$$\Delta = T_0 - T_i$$

waarin T_0 en T_i staan voor de structurele constraints van kandidaat (0) en

candidaat (i), respectievelijk.

De structurele constraint van kandidaat (0) wordt berekend volgens verq. (9). Het is te bewijzen dat Δ bij benadering χ^2 is verdeeld, ⁽¹⁸⁾ en wel geldt

$$\chi^2 = 1,3863 N \Delta$$

waarin N de samplegrootte (hier 200).

De te toetsen nulhypothese is dus dat de structurele constraint van kandidaat (i) niet afwijkt van die van kandidaat (0), d.w.z. $H_0: \Delta = 0$.

De procedure is nu als volgt (zie tabel 2); op het eerste niveau van de hiërarchie worden de constraints van de opvolgers van kandidaat (0), n.l. 1 t/m 6, berekend. Evenzo de T-afstand en de χ^2 waarden (aan een uiteenzetting over het berekenen van vrijheidsgraden zullen we hier geen aandacht besteden, zie Broekstra ¹⁸⁾). Het blijkt dat kandidaat (4) de kleinste afwijking heeft, die bovendien niet significant is ($p > 0,5$). De opvolgers van (4) zijn de kandidaten (10), (12), (13) en (15) (zie tabel 2). De berekeningen laten zien dat (10) de kleinste T-afstand heeft, die bovendien niet significant van nul afwijkt ($p > 0,5$). De opvolgers van (10) zijn (20), (23), (24) en (32) waarvan (23) als enige niet significant afwijkt van (0) ($p > 0,3$).

Tenslotte blijkt dat de opvolgers van (23) allen significant verschillen van (0); voor (42) geldt $p < 0,01$. M.a.w. kandidaat (23) is de eenvoudigste (in de zin van : heeft het geringste aantal relaties) structuur die congruent is met de data.

Hoewel er nog een aantal technische details vast zitten aan de bovenstaande procedure en berekeningen, is de essentie ervan wel met het bovenstaande aangegeven. Het is dus mogelijk om uit een vooraf gedefinieerde hiërarchie van klassen van struktuursystemen via een selectieve beslissingsprocedure de 'beste' hypothese op te sporen. Voor een vergelijking met multivariate analysemethoden van b.v. kwalitatieve data en een voorbeeld van een panel en een survey studie, zie Broekstra. ^{11,25}

Het bovenstaande voorbeeld betrof uitsluitend een gedragssysteem. Iets dergelijks is in principe ook mogelijk voor toestandsovergangsgedrag. Daar is echter tot nu toe nog betrekkelijk weinig aandacht aan besteed. Het lijkt echter wel van belang voor b.v. de identificatie van Markov-systemen.

C	candidaat	T(S)	Δ	χ^2 (df)
0	1234	0,5537		
1	123/124(-12)	0,5410	0,0127	3,52 (4)
2	123/134(-13)	0,5282	0,0255	7,07 (4)
3	123/234(-23)	0,5215	0,0322	8,93 (4)
4 ^x	124/134(-14)	0,5421	0,0116	3,22 (4)
5	124/234(-24)	0,3198	0,2339	64,85 (4)
6	134/234(-34)	0,4080	0,1457	40,40 (4)
10 ^x	124/13	0,5387	0,0150	4,16 (6)
12	124/34	0,2780	0,2757	76,44 (6)
13	134/12	0,5259	0,0278	7,71 (6)
15	134/24	0,3662	0,1875	51,99 (6)
20	124/3	0,2517	0,3020	83,73 (7)
23 ^x	12/13/14	0,5225	0,0312	8,65 (8)
24	12/13/24	0,5041	0,0496	13,75 (8)
32	13/14/24	0,3628	0,1909	52,93 (8)
42	12/13/4	0,4754	0,0783	21,71 (9)
43	12/14/3	0,2355	0,3182	88,22 (9)
46	13/14/2	0,3341	0,2196	60,88 (9)

Tabel 2. Structuurcandidaten, totale structurele constraints, T-afstanden en χ^2 -waarden voor frekwentieverdeling van vier variabelen. De met een x aangeduide kandidaten worden uit hun klasse gekozen als de 'beste'.

4. Conclusies

Er is een poging gedaan om - zij het in verband met de beschikbare ruimte hier en daar wellicht wat erg cryptisch - belangstelling te wekken voor een formeel hulpmiddel dat in ontwikkeling is ten behoeve van modelbouwprocessen. Het is inmiddels gebleken dat constraintanalyse niet alleen een "zeer sterke" basis heeft,^{20,25)} maar dat ook een interessante vergelijking gemaakt kan worden met andere discrete multivariate technieken. Een vergelijkende studie is bijvoorbeeld gemaakt met de resultaten van onderzoek met zgn. log-lineaire modellen.^{11,25)}

De auteur stelt positieve reacties op dit artikel zeer op prijs.

1. F. Jelinek, Probabilistic information theory. McGraw-Hill, New York, 1968.
2. S. Watanabe, Knowing and guessing, Wiley, New York, 1969.
3. C.A. van Peursen, C.P. Bertels en D. Nauta, Informatie, Aula, Utrecht, 1968.
4. W.R. Garner, Uncertainty and structure as psychological concepts. Wiley, New York, 1962.
5. W.R. Ashby, Measuring the internal informational exchange in a system. Cybernetica, 8, 1965, pp. 5-22.
6. H. Theil, Economics and information theory. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1967.
7. F. Attneave, Applications of information theory to psychology. Holt, New York, 1959.
8. B. Lev, Accounting and information theory. American Accounting Association, Evanston, Ill., 1969.
9. H. Theil, Statistical decomposition analysis. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1972.
10. R.C. Conant, Information flows in hierarchical systems. International Journal of General Systems, 1, No. 1, 1974, pp. 9-18.
11. G. Broekstra, On the application of informational measures to the structure identification problem with an example of the multivariate analysis of qualitative data from a panel study. In: Frontiers in systems research: implications for the social sciences, Ed. by R. Cavallo, Suny, 1978.
12. R.C. Conant, Laws of information which govern systems. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, SMC-6, No. 4, 1976, pp. 240-255.
13. W.R. Ashby, Constraint analysis of many-dimensional relations. General Systems IX, 1964, pp. 99-105.
14. G. Broekstra, Two methods of constraint analysis. Paper voor de 4th European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Linz, Oostenrijk, maart 1978.
15. G. Broekstra, Constraint analysis and structure identification. Annals of Systems Research 5, 1976, pp. 67-80; 6, 1977, pp. 1-20.
16. G.J. Klir, On the representation of activity arrays, International Journal General Systems, 2, No. 3, 1975, pp. 149-168.
17. G. Broekstra, Some comments on the application of informational measures to the processing of activity arrays. International Journal of General Systems, 3, No. 1, 1976, pp. 43-51.
18. G. Broekstra, On the representation and identification of structure systems. International Journal of Systems Science, 1978 (in press).
19. G.J. Klir, Computerized Methodology for structure modelling. Annals of Systems Research, 5, 1976, pp. 29-66.
20. A.P.J. Abrahamse, Constraint analysis in structure modelling: a probabilistic approach. In: Frontiers in systems research: implications for the social sciences, Ed. by R. Cavallo, SUNY, 1978.
21. G.J. Klir, Identification of generative structures in empirical data, International Journal of General Systems, 3, No. 2, 1976, pp. 89-104.
22. G. Broekstra, Simplifying data systems: an information theoretic analysis. Proc. Third European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Vienna, April 1976.
23. G. Broekstra, Structure modelling: a constraint (information) analytic approach. Proc. First Int. Conf. Appl. Gen. Systems Res., Binghamton, U.S.A., 1977.
24. G. Broekstra, Structure identification: on terminology in methodology. First Meeting of Int. Fed. Syst. Res., Utrecht, 1977, Working paper, Graduate School of Management, Delft
25. G. Broekstra, Constraint analysis for structure identification: an overview and some social science applications. Proc. Symposium on Modelling and Simulation Technology. Rehovot, Israel. Aug. 1978.
26. G. Broekstra, (Non)probabilistic constraint analysis and a two-stage approximation method of structure identification. Paper for 23rd North American Annual Meeting of the SGSR, Texas, Jan. 1979