

## Het schatten van factor scores

J. Mulder, W.M. de Pijper, W.E. Saris

### Samenvatting

In dit artikel worden een aantal methoden om factor scores te schatten behandeld. Tevens wordt een nieuwe methode geïntroduceerd die factor scores oplevert die aan een nieuw geformuleerd criterium voldoen. De behandelde methoden worden aan de hand van een voorbeeld met gegenereerde data vergeleken. De analyses zijn uitgevoerd met het computerprogramma FASC, dat verkrijgbaar is voor belangstellenden.(1)

### Inleiding

We zullen ons in dit artikel bezighouden met de vraag hoe we tot schatting van factor scores kunnen komen. D.w.z. hoe we tot schatting kunnen komen van de waarden van een aantal eenheden op factoren, op grond van de waarden van die eenheden op een aantal indicatoren van die factoren.

Over het schatten van factor scores is voornamelijk geschreven door psychologen en statistici. De belangstelling voor het onderwerp dateert uit de dertiger jaren: Thurstone (1935)(2) en Bartlett (1937)(3), die elk een methode om factor scores te schatten geven. Anderson and Rubin(1956)(4) leiden nog een andere methode af. In de recentere literatuur over dit onderwerp wordt veelal een overzicht over en vergelijking van de verschillende methoden gegeven, b.v. McDonald and Burr (1967)(5), Harris (1967)(6), Alwin (1973)(7) en Susmilch (1975)(8).

In dit artikel zullen we eerst het model aangeven waarvan we verder uitgaan. Daarna zullen we, voortgaande in de lijn van denken van Lawley and Maxwell (9), drie methoden om factor scores te schatten aangeven. Tenslotte volgt er een korte beschrijving van het programma FASC, en worden de methoden aan de hand van een voorbeeld met gegenereerde data vergeleken.

### Het model

We gaan uit van het algemeen gangbare factor analyse-model: er zijn een aantal, minstens op interval-niveau gemeten, variabelen, die beïnvloed worden door een (in het algemeen) kleiner aantal factoren, en door error-termen. We zullen de volgende symbolen gebruiken:

$x$  : de vector van gemeten variabelen ( $n \times 1$ )

$\Lambda$  : de matrix met factor-ladingen (nxp)  
 $f$  : de vector van factoren (px1)  
 $e$  : de vector van error-termen (nx1)  
 $\hat{f}$  : de vector van factor score-schatters (px1)

We kunnen het model dan als volgt in matrix-notatie weergeven:

$$x = \Lambda f + e \quad (I)$$

Er wordt over het algemeen, en ook hier, verondersteld dat aan de volgende assumpties is voldaan:

- $E(e) = 0$
- de factoren en variabelen zijn gestandaardiseerd
- de matrix  $E(e e')$  is diagonaal
- $E(f e') = 0$

Als we  $E(x x')$ ,  $E(f f')$  en  $E(e e')$  resp.  $\Sigma$ ,  $\Phi$  en  $\Psi$  noemen kunnen we uit (I) afleiden:

$$\begin{aligned} E(x x') &= E(\Lambda f + e)(\Lambda f + e)' \\ &= E(\Lambda f f' \Lambda') + E(\Lambda f e') + E(e f' \Lambda') + E(e e') \\ \Sigma &= \Lambda \Phi \Lambda' + \Psi \quad (II) \end{aligned}$$

De factoren zijn dus niet noodzakelijk orthogonaal. In de sociaal-culturele wetenschappen is het (in tegenstelling tot b.v. de psychologie) veelal zinvoller te werken met gecorreleerde factoren. Men werkt immers vaak met modellen waarin sprake is van een aantal ongemeten variabelen, die elk via een aantal items gemeten worden. Men is dan geïnteresseerd in de relaties tussen deze ongemeten variabelen.(10)

#### Criteria voor de schatters

Over het algemeen worden schattingscriteria aangelegd om tot een zo goed mogelijke schatting van parameters voor de populatie te komen op grond van steekproefgegevens. Maar bij het schatten van factor scores gaat het niet om schatting van populatie-parameters op basis van steekproef-gegevens. Het is dan ook niet zinvol om een aantal van de gangbare schattingscriteria aan te leggen, met name niet die waarin sprake is van asymptotische eigenschappen. Aangezien we er niet van uit zijn gegaan dat we de verdelingen van de variabelen kennen, zullen we ook geen schattingscriteria aanleggen die kennis over de verdeling veronderstellen.

We zullen ons hier dan ook verder beperken tot een drietal criteria, waarvan de eerste twee frequent in de literatuur voorkomen:(11)

- de schatter moet een zo klein mogelijke kwadratische fout hebben, d.w.z. de diagonaal elementen van  $E(\hat{f} - f)(\hat{f} - f)'$  moeten minimaal zijn
- de schatter moet zuiver zijn, d.w.z. er moet gelden:  $E(\hat{f}|f) = f$
- de schatter moet structuur-bewarend zijn, d.w.z. er moet gelden:  $E(\hat{f} \hat{f}') = \Phi$

Deze derde eis stellen we op grond van de overwegingen uit de vorige paragraaf.

Vanwege het belang van het eerste criterium zullen we dit steeds aan de schatters stellen. Combinatie van deze drie criteria levert dan de volgende mogelijkheden op:

- 1) de schatter met de kleinste kwadratische fout
- 2) de schatter die van de klasse van zuivere schatters de kleinste kwadratische fout heeft
- 3) de schatter die van de klasse van structuur-bewarende schatters de kleinste kwadratische fout heeft
- 4) de schatter die van de klasse van zuivere en structuur-bewarende schatters de kleinste kwadratische fout heeft

In de literatuur worden over het algemeen nóg twee criteria aangelegd: (12)

- de schatter moet univocal zijn, d.w.z. er moet gelden:  $E(\hat{f} \hat{f}') = B$ , waarin  $B$  een diagonale matrix is
- de schatter moet orthogonaal zijn, d.w.z. er moet gelden:  $E(\hat{f} \hat{f}') = I$

Dit laatste criterium kan worden opgevat als een speciaal geval van ons derde criterium, en vervalt dus. Ten aanzien van het andere kan opgemerkt worden dat dit slechts te verwezenlijken is in het geval van orthogonale factoren. Aangezien we niet in zulke gevallen geïnteresseerd zijn vervalt dit criterium.

#### De schatters

Ons uitgangspunt is dat de factor score-schatters een lineaire functie vormen van de variabelen: (13)

$$\hat{f} = A'x,$$

waarin  $A$  een matrix is van de orde  $(n \times p)$ . Het probleem is nu hoe  $A$  zó te kiezen dat voldaan wordt aan één of meer van de gestelde criteria. We zullen hier slechts de resultaten van de afleidingen geven, en niet de afleidingen zelf.

- 1) de schatter met de kleinste kwadratische fout

$$\hat{f} = \Phi \Lambda' \Sigma^{-1} x \quad (\text{III})$$

Deze schatter is gevonden door Thurstone. Deze methode wordt aangeduid met de naam regressie-methode. Ter onderscheiding van de andere schatters zullen we hem verder aanduiden met  $\hat{f}_r$ . De afleiding van deze schatter wordt gegeven in Lawley and Maxwell, p. 109.

- 2) de schatter die van de klasse van zuivere schatters de kleinste kwadratische fout heeft

$$\hat{f} = (\Lambda' \Psi^{-1} \Lambda)^{-1} \Lambda' \Psi^{-1} x \quad (\text{IV})$$

Deze schatter is ontwikkeld door Bartlett. De schattingsmethode wordt aangeduid als de methode van Bartlett. Ter onderscheiding van de andere schatters zullen we hem verder aanduiden met  $\hat{f}_B$ . De afleiding van deze schatter wordt gegeven in Lawley and Maxwell, p. 109-111.

- 3) de schatter die van de klasse van structuur-bewarende schatters de kleinste kwadratische fout heeft

$$\hat{f} = F D^{-\frac{1}{2}} G K' E^{\frac{1}{2}} S' \Phi \Lambda' \Sigma^{-1} x \quad (\text{V})$$

waarin:

F : de matrix met orthonormale eigenvectoren van  $\Phi$ ,

D : de matrix met eigenwaarden van  $\Phi$ ,

G : de matrix met orthonormale eigenvectoren van  $D^{\frac{1}{2}} F' \Phi F D^{\frac{1}{2}}$ ,

K : de matrix met orthonormale eigenvectoren van  $E^{\frac{1}{2}} S' \Phi \Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda \Phi S E^{\frac{1}{2}}$ ,

E : de matrix met eigenwaarden van  $\Phi \Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda \Phi$ ,

S : de matrix met orthonormale eigenvectoren van  $\Phi \Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda \Phi$  is.

Aangezien door Anderson and Rubin een oplossing is gegeven voor het geval van orthogonale factoren (14) zullen we deze schatter aanduiden als: generaliseerde Anderson-Rubin-schatter (kortweg: GAR). Ter onderscheiding van de andere schatters zullen we hem verder aanduiden met  $\hat{f}_{GAR}$ .

Deze schatter is door ons zelf ontwikkeld, de afleiding wordt gegeven in de Appendix.

- 4) de schatter die van de klasse van zuivere en structuur-bewarende schatters de kleinste kwadratische fout heeft

Het blijkt niet mogelijk te zijn een schatter te construeren die zowel zuiver als structuur-bewarend is. (17)

#### Enige andere methoden

Er bestaan nog een aantal andere methoden om factor scores te schatten, zoals bv. de methode van de ideale variabelen. Het gebruik van deze methoden is echter af te raden, aangezien ze óf niet aan de door ons gestel-



de eisen voldoen óf, als ze wel aan één of meer van de criteria voldoen, toch slechter zijn dan de hiervoor gegeven methoden.

De methode van de ideale variabelen b.v.  $(\hat{f} = (\Lambda' \Lambda)^{-1} \Lambda' x)$  levert zuivere schatters, die in het geval van orthogonale factoren ook univocal zijn, maar dat geldt eveneens voor de methode van Bartlett. En deze laatste methode geeft schatters die bovendien nog voldoen aan het criterium kleinste kwadratische fout.

Op twee van deze andere methoden willen we nog nader ingaan:

$$- \hat{f} = \Phi \Lambda' S^{-1} x$$

Dit is de regressie-methode zoals die voorkomt in SPSS.(15) Het verschil met de door ons gegeven formule (III) is dat hier de steekproef correlatie-matrix S wordt gebruikt in plaats van  $\Sigma$  (te berekenen uit (II)). Het is beter (III) te gebruiken, aangezien (III) de kleinste kwadratische fout geeft.  $\Phi \Lambda' S^{-1} x$  kan dus nooit beter voldoen.

$$- \hat{f} = (\Lambda' \Psi^{-1} \Sigma \Psi^{-1} \Lambda)^{-1} \Lambda' \Psi^{-1} x$$

Dit is de methode van Anderson-Rubin. Deze methode levert schatters op die orthogonaal zijn en die van de klasse van orthogonale schatters de kleinste kwadratische fout hebben. Deze methode is dus op te vatten als een bijzonder geval van de GAR-methode.

#### Het programma FASC

Het programma FASC maakt het mogelijk factor scores te schatten volgens de regressie-methode, de methode van Bartlett en de GAR-methode. Het programma is ontwikkeld door W.M. de Pijper.

Als output kunnen de volgende gegevens verkregen worden:

- 1) de coëfficiënten-matrix, b.v.  $\Phi \Lambda' \Sigma^{-1}$  voor de regressie-methode
- 2) de matrix  $E(\hat{f} - f)(\hat{f} - f)'$
- 3) de matrix  $E(\hat{f} \hat{f}')$
- 4) de matrix  $A' \Lambda$ . Deze matrix geeft de mate van zuiverheid aan. Voor een zuivere schatter moet immers gelden:

$$E(\hat{f}|f) = f$$

$$E(A'x|f) = f$$

$$E(A' \Lambda |f f + A'e|f) = f$$

$$A' \Lambda f = f$$

en dus:  $A' \Lambda = I$

De mate waarin  $A' \Lambda$  afwijkt van I geeft aan in hoeverre de schatter zuiver is. Voor de regressie-methode wordt dus b.v.  $\Phi \Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda$  gegeven.

- 5) de factor scores

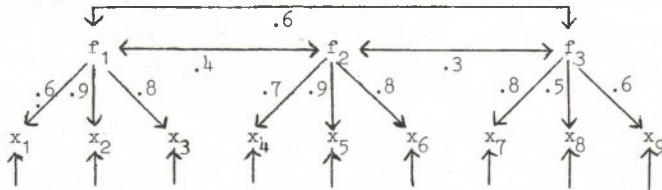
Afhankelijk van de input kan men alleen het onder 1 t/m 4 vermelde, of de gehele output krijgen. De input bestaat namelijk uit:

- óf alleen een factor analyse-oplossing. Deze kan staan op het output-file van SPSS of Lisrel, of kan direct ingevoerd worden.
- óf een factor analyse-oplossing en een data-file waarop de scores van de respondenten op de indicatoren staan.

In dit tweede geval worden ook de factor scores als output gegeven.

#### Een voorbeeld

We zijn uitgegaan van het volgende model:



We hebben de correlatie-matrix berekend op grond waarvan deze factor analyse-oplossing gevonden zou zijn. Daarna hebben we voor 500 eenheden data gegenereerd, zodanig dat de correlaties tussen deze scores voor alle eenheden de berekende correlatie-matrix opleverden. (16) Op deze data hebben we met behulp van het programma Lisrel een factor analyse uitgevoerd volgens bovenstaand model. De gevonden parameters van het model wijken enigszins af van die uit het oorspronkelijke model, wat te verklaren is door steekproef-afwijkingen. De matrices  $\Phi$  en  $\Lambda$  die uit deze factor analyse-oplossing kwamen waren als volgt:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.000 & & \\ .468 & 1.000 & \\ .582 & .328 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} .471 & .0 & .0 \\ .920 & .0 & .0 \\ .765 & .0 & .0 \\ .0 & .766 & .0 \\ .0 & .894 & .0 \\ .0 & .818 & .0 \\ .0 & .0 & .797 \\ .0 & .0 & .641 \\ .0 & .0 & .649 \end{bmatrix}$$

Met behulp van de gevonden factor analyse-oplossing en de gegenereerde data hebben we factor scores geschat volgens de drie methoden. We zullen hier achtereenvolgens nagaan in hoeverre de schatters volgens de drie methoden voldeden aan de drie gestelde criteria:

- de methoden vergeleken wat betreft de kwadratische fout

We geven hier alleen de diagonaal-elementen van de matrix  $E(\hat{f} - f)(\hat{f} - f)'$

$$E(\hat{f}_R - f)(\hat{f}_R - f)' = (.119 \quad .116 \quad .230)$$

$$E(\hat{f}_B - f)(\hat{f}_B - f)' = (.145 \quad .135 \quad .344)$$

$$E(\hat{f}_{GAR} - f)(\hat{f}_{GAR} - f)' = (.126 \quad .120 \quad .249)$$

We zien dat de regressie-methode, zoals we ook zouden mogen verwachten, de kleinste kwadratische fout oplevert.

- de methoden vergeleken wat betreft het criterium zuiverheid

We zullen hier de matrix  $A'A$  voor de drie methoden geven:

|                                                                                    |      |       |       |
|------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|
|                                                                                    | .817 | .057  | .066  |
| regressie-methode : $\Phi A' \Sigma^{-1} A =$                                      | .053 | .856  | .013  |
|                                                                                    | .156 | .032  | .670  |
|                                                                                    |      | 1.000 | .0    |
| methode van Bartlett : $(A' \Psi^{-1} A)^{-1} A' \Psi^{-1} =$                      | .0   | 1.000 | .0    |
|                                                                                    |      | .0    | 1.000 |
|                                                                                    | .912 | .036  | .015  |
| GAR-methode : $F D^{-\frac{1}{2}} G K' E^{\frac{1}{2}} S' \Phi A' \Sigma^{-1} A =$ | .030 | .926  | -.001 |
|                                                                                    | .115 | .017  | .838  |

De methode van Bartlett levert hier het beste resultaat.

- de methoden vergeleken wat betreft het criterium structuur-bewarend

We hebben om de drie methoden beter te kunnen vergelijken, de variantie-covariantie-matrices van de schatters omgerekend tot correlatie-matrices. De resultaten van de verschillende methoden waren als volgt:

|                       |       |       |       |
|-----------------------|-------|-------|-------|
|                       | 1.000 |       |       |
| regressie-methode:    | .521  | 1.000 |       |
|                       | .680  | .393  | 1.000 |
|                       | 1.000 |       |       |
| methode van Bartlett: | .410  | 1.000 |       |
|                       | .469  | .266  | 1.000 |
|                       | 1.000 |       |       |
| GAR-methode:          | .468  | 1.000 |       |
|                       | .582  | .328  | 1.000 |

We zien dat de GAR-methode perfect voldoet aan het criterium structuur-bewarend. De andere twee methoden geven vrij grote afwijkingen te zien.

Ten slotte hebben we de correlaties berekend tussen de factor scores die volgens de drie methoden waren geschat. We zullen de volgens de drie methoden geschatte factor scores aanduiden met resp. reg1 tot reg3, bart1 tot bart3 en gar1 tot gar3. De correlatiematrix tussen de factor scores zal er als volgt uit:

|       | reg1  | reg2  | reg3  | bart1 | bart2 | bart3 | gar1  | gar2  | gar3  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| reg1  | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |       |
| reg2  | .521  | 1.000 |       |       |       |       |       |       |       |
| reg3  | .681  | .394  | 1.000 |       |       |       |       |       |       |
| bart1 | .995  | .465  | .623  | 1.000 |       |       |       |       |       |
| bart2 | .467  | .998  | .352  | .410  | 1.000 |       |       |       |       |
| bart3 | .533  | .300  | .982  | .469  | .265  | 1.000 |       |       |       |
| gar1  | .998  | .497  | .638  | .999  | .443  | .485  | 1.000 |       |       |
| gar2  | .492  | .999  | .366  | .436  | 1.000 | .275  | .468  | 1.000 |       |
| gar3  | .629  | .356  | .997  | .569  | .316  | .993  | .584  | .329  | 1.000 |

We zien dat ook de factor scores geschat volgens de GAR-methode verreweg het beste voldoen aan het criterium structuur-bewarend. Dat de correlaties tussen gar1, gar2 en gar3 niet exact gelijk zijn aan de correlaties tussen de factoren is te verklaren door steekproefafwijkingen. De correlaties tussen reg1 tot reg3 en bart1 tot bart3 blijken aanzienlijk af te wijken van de correlaties tussen de factoren. Verder is het opvallend dat de factor scores voor dezelfde factor, geschat volgens verschillende methoden, zeer hoog correleren.

### Conclusies

We hebben ons beziggehouden met verschillende methoden om factor scores te schatten. De belangrijkste daarvan zijn de regressie-methode, de methode van Bartlett en de GAR-methode. Hoewel er nog andere methoden bestaan, voldoen deze alle slechter wanneer ze aan de gestelde criteria worden getoetst. Het verdient dan ook aanbeveling deze andere methoden niet te gebruiken.

Tot slot willen we hier aangeven in welk geval welke van de drie methoden het best gebruikt kan worden:

- de methode van Bartlett voldoet het best als er een aantal identieke onderzoeken worden gedaan bij dezelfde eenheden, en men slechts geïnteresseerd is in de scores van de eenheden op de factoren
- de GAR-methode voldoet het best als er sprake is van een model met gecorreleerde factoren en men deze structuur voor de factor scores wil behouden



- de regressie-methode kan in de overige gevallen het beste gebruikt worden

#### Noten

1. Binnenkort zal er een manual van het programma te verkrijgen zijn bij de vakgroep M en T, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1115, Amsterdam
2. Thurstone, L.L., The vectors of mind, Chicago, 1935
3. Bartlett, M.S., The statistical conception of mental factors. In: British Journal of Psychology XXVIII (1937), p. 97-104
4. Anderson, T.W. and Rubin, H., Statistical inference in factor analysis. In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability V (1956), p. 111-150
5. McDonald, R.P. and Burr, E.J., A comparison of four methods of constructing factor scores. In: Psychometrika XXXII (1967), p. 381-401
6. Harris, C.W., On factors and factor scores. In: Psychometrika XXXII (1967), p. 363-379
7. Alwin, D.F., The use of factor analysis in the construction of linear composites in social research. In: Sociological methods and research II (1973), p. 192-214
8. Susmilch, C.E. and Johnson, W.T., Factor scores for constructing linear composites. In: Sociological methods and research V (1975), p. 166-188
9. Lawley, D.N. and Maxwell, A.E., Factor analysis as a statistical method, London, 1971 (2nd ed.)
10. Er kan hier verwezen worden naar publicaties over dit onderwerp van o.a. Costner, Duncan en Jöreskog
11. b.v. McDonald and Burr
12. b.v. Alwin, Susmilch
13. Deze benadering is ontleend aan Lawley and Maxwell, p. 107
14. Anderson and Rubin, p. 139-140
15. SPSS-manual, p. 488
16. De data zijn gegenereerd met het computerprogramma Mulsam, ontwikkeld door W.M. de Pijper
17. J. Mulder, Het schatten van factor scores, doctoraal-scriptie Vrije Universiteit, 1977, p.14

Appendix: Afleiding van de GAR-methode

We stellen voor deze schatter als voorwaarde:

$$E(\hat{f} \hat{f}') = \Phi$$

$$\text{of: } A' \Sigma A = \Phi, \quad (A1)$$

terwijl bovendien de diagonaal-elementen van

$$E(\hat{f} - f)(\hat{f} - f)'$$

minimaal moeten zijn.

$$\text{Of: } A' \Sigma A - 2A' \Lambda \Phi + \Phi \quad (A2)$$

moet minimaal zijn.

Dit betekent dat voor de i-de factor de volgende vorm geminimaliseerd moet worden:

$$a_i' \Sigma a_i - 2a_i' \Lambda \Phi_i + \Phi_{ii} - (a_i' \Sigma A - \Phi_i) d_i \quad (A3)$$

waarin  $d_{ki} = 2c_{ki}$  voor  $k \neq i$

$$= c_{ki} \text{ voor } k = i$$

en  $c_{ki}$  een Lagrange multiplier is.

$a_i'$  is de i-de rij van de matrix  $A'$ .

De afgeleide van (A3) naar  $a_i$  is dan:

$$2 \Sigma a_i - 2 \Lambda \Phi_i - 2 \Sigma A C \quad (A4)$$

of algemeen, voor alle factoren:

$$2 \Sigma A - 2 \Lambda \Phi - 2 \Sigma A C \quad (A5)$$

Om het minimum te bepalen stellen we dit gelijk 0:

$$2 \Sigma A - 2 \Lambda \Phi - 2 \Sigma A C = 0 \quad (A6)$$

$$\text{of: } \Sigma A (I - C) = \Lambda \Phi \quad (A7)$$

$$\text{en: } A = \Sigma^{-1} \Lambda \Phi (I - C)^{-1} \quad (A8)$$

Om deze vorm te vereenvoudigen duiden we  $(I - C)^{-1}$  aan met B.

Uit (A1) en (A8) volgt:

$$B' M B = \Phi \quad (A9)$$

waarin  $M = \Phi A' \Sigma^{-1} \Lambda \Phi$ ,

$$\text{en: } M = M' \quad (A10)$$

$$\text{en: } B = B' \text{ omdat } C \text{ symmetrisch is.} \quad (A11)$$

We kunnen nu schrijven:

$$B F D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} F' B = S E^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} S' \quad (A12)$$

waarin

D : de matrix met de eigenwaarden van M

F : de matrix met de orthonormale eigenvectoren van M

E : de matrix met de eigenwaarden van  $\Phi$

S : de matrix met de orthonormale eigenvectoren van  $\Phi$

$$\text{Stel: } N = E^{-\frac{1}{2}} S' B F D^{\frac{1}{2}},$$

dan geldt:

$$B = S E^{\frac{1}{2}} N D^{-\frac{1}{2}} F' \quad (A13)$$

en uit (A12) volgt dat N orthogonaal is.

(A14)

Uit (A9) en (A13) weten we dat:

$$F D^{-\frac{1}{2}} N' T N D^{-\frac{1}{2}} F' = \Phi ,$$

(A15)

waarin:  $T = E^{\frac{1}{2}} S' M S E^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{en: } N' T N = D^{\frac{1}{2}} F' \Phi F D^{\frac{1}{2}}$$

(A16)

$$\text{of: } N' T N = G \Delta G' ,$$

(A17)

waarin: G : de matrix met de orthonormale eigenvectoren van  $D^{\frac{1}{2}} F' \Phi F D^{\frac{1}{2}}$

$\Delta$  : de matrix met de eigenvectoren van  $D^{\frac{1}{2}} F' \Phi F D^{\frac{1}{2}}$

Uit (A17) volgt:

$$G' N' T N G = \Delta ,$$

(A18)

maar G en N zijn beide orthogonale matrices dus:

$$N G = K ,$$

(A19)

waarin: K : de matrix met de orthonormale eigenvectoren van T,

en dus geldt:

$$N = K G'$$

(A20)

Tenslotte volgt uit (A8), (A13) en (A20) dat:

$$A = \Sigma^{-1} \Lambda \Phi S E^{\frac{1}{2}} K G' D^{-\frac{1}{2}} F'$$

(A21)

$$\text{en: } \hat{f}_{GAR} = F D^{-\frac{1}{2}} G K' E^{\frac{1}{2}} S' \Phi \Lambda' \Sigma^{-1} x$$

(A22)