Aanzet tot dynamiseren van structuur in de Sociale Wetenschappen

Henk Koppelaar, René van Hezewijk

In de sociale wetenschappen worden verschillende structuren door graphen weergegeven. We zullen hier ingaan op drie gevallen.

(1) In causale modellen zijn punten variabelen en stellen de lijnen directe causale relaties voor (Blalock, 1969).

(2) In markovketens stellen de punten categorieën voor en de lijnen overgangskansen (Kemeny, Snell en Thompson, 1969).

(3) In de Balanstheorie stellen de punten personen of zaken voor en de lijnen relaties tussen de eenheden (Van der Linden, 1977).

In alle drie de gevallen is de graphentheorie adequaat gereedschap voor een statische weergave van een stand van zaken. De schoen wringt echter als graphentheorie gebruikt wordt voor structuurproblemen die dynamisch zijn, d.w.z. voor structuren (relaties) die in de tijd veranderen. Daarom stellen we in dit artikel een aanzet tot dynamisering van de graphentheorie voor.

De Incidentiematrix. Het gebruik van graphentheorie als structurerend gereedschap heeft het nadeel dat de gepresenteerde graph statisch is. In veel toepassingen verandert de structuur, is deze essentieel dynamisch. Dit dynamische aan een structuur willen we kunnen modelleren m.b.v. systeemtheoretische middelen, door middel van een soort "differentiële-graph systemen", waartoe we eerst een dynamische incidentiematrix invoeren.

Om te beginnen met een voorbeeld: laat de interactie tussen de grootheden $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ aangegeven worden d.m.v. variabelen a met dubbele indices. Dus bijvoorbeeld de invloed van x_3 op x_1 is a_{31}, terwijl bijvoorbeeld de invloed van x_1 op x_3 is a_{13}, kortweg gerepresenteerd in een incidentiematrix:

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

De beïnvloeding tussen de grootheden is tijdsafhankelijk, dus de elementen van A zijn functies van de tijd.
We zijn nu geïnteresseerd in de dynamica van een proces dat de verandering van de incidentiematrix A modelleert. Dit model wordt gesteld in termen van differentiaalvergelijkingen, in de volgende paragraaf.

Het representeren van dynamische graphen. Laat A een n x n - matrix zijn waarbij a_{ij} tijdsafhankelijk is, dan wordt A dus "dynamisch" genoemd.
A op zichzelf wordt verondersteld onderworpen te zijn aan een "verborgen" systeem, zodanig dat dit verborgen systeem lineair is met de structuurmatrix Q

$$\frac{d}{dt} A = QA \tag{1}$$

waarin A tijdsafhankelijk is en Q niet. Om notationele redenen behandelen we vergelijking (1) zodanig dat A een vector van lengte n^2 wordt, waarbij de indices beschouwd worden als n - ary getallen.

Bijvoorbeeld: $\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} = [a_0, a_1, a_{10}, a_{11}]^T,$

waarin de T betekent dat de vector getransponeerd moet worden en waarin de vector-indices binaire getallen zijn.
Met n - ary getallen en A geschreven als n^2-vector wordt de verborgen structuurvergelijking:

$$\frac{d}{dt} a_j = \sum_i q_j^i a_i \tag{2}$$

Bijvoorbeeld: $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(t) \\ \cos(t) & 0 \end{bmatrix}$

deze A is periodiek en de volgende Q voldoet:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toepassing op causale modellen. We nemen een intergroepsonderzoek onder de loupe met slechts de volgende vier variabelen:

x_0: sterkte onderhandelingspositie

x_1: mate van competitieve oriëntatie

x_2: cohesie

x_3: in/outgroepdifferentiatie

Deze variabelen staan in een bepaalde relatie tot elkaar, zoals bijvoorbeeld blijkt uit Rabbie (1974).
Het blijkt zo te zijn, dat cohesie (x_2) optreedt indien er sprake is van een sterke onderhandelingspositie en een hoge competitieve oriëntatie. Verder blijkt een zwakke o.h.-positie in combinatie met een hoge mate van competitieve oriëntatie een hoge in/outgroepdifferentiatie op te leveren. Wanneer we dit in diagram brengen dan krijgen we fig. 1, waarin de pijlen directe effecten voorstellen. Dit is een statisch model, zonder feedbackrelaties,

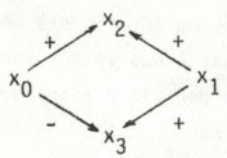

fig. 1

x_0 en x_1 bepalen het niveau van x_2 en x_3, meer niet.
Men zou voor deze graph op een tijdstip t de volgende incidentiematrix kunnen vinden waarbij a_{ij} bijvoorbeeld de padcoëfficiënt p_{ij} voorstelt (Duncan, 1966).

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +.7 & -.6 \\ 0 & 0 & +.5 & +.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bij een volgende waarneming (t + 1) zouden we echter kunnen vinden:

$$A(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +.1 & -.5 \\ 0 & 0 & +.9 & +.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vergelijking 2 geeft ons nu de mogelijkheid om dit dynamische karakter van A te beschrijven. Immers de relaties tussen x_0 t/m x_3 veranderen in de tijd en dat veranderingsproces wordt beschreven door Q. Dus het is zaak om uit twee opeenvolgende metingen in een intergroepsonderzoek de Q te destilleren, waarmee een beschrijving verkregen is van het temporele gedrag van de relaties tussen x_0 t/m x_3. Een toepassing van de vergelijking (1) levert dan (m.b.v. de computer), indien gewenst, voorspellingen op van de intergroepsrelaties A op tijdstippen nà de metingen. Interessante empirische perspectieven dus.

Toepassing op Markovketens. Een aantal pogingen zijn ondernomen om de wijzigingen in de politieke voorkeuren van mensen te beschrijven met behulp van een markovketen. Stel we hebben 3 blokken x_1, x_2, x_3.
In figuur 2 hebben we een mogelijke graph voor dit proces weergegeven.

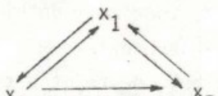

fig. 2

Van tijdstip t naar t + 1 kan de incidentiematrix er als volgt uitzien, waarbij a_{ij} = de kans dat een persoon van blok i naar blok j gaat.

$$A(t) = \begin{bmatrix} .3 & .4 & .3 \\ .6 & .3 & .1 \\ .1 & .5 & .4 \end{bmatrix}$$

Van tijdstip t + 1 naar t + 2 kan de incidentiematrix echter wel verandert zijn, bijvoorbeeld

$$A(t+1) = \begin{pmatrix} .5 & .3 & .2 \\ .5 & .3 & .2 \\ .2 & .6 & .2 \end{pmatrix}$$

Als de afwijkingen groter zijn dan door toeval verwacht mag worden dan is er reden om te zoeken naar parameters die wel statisch zijn door de tijd. Een mogelijkheid hiervoor is geformuleerd in vergelijking 2. Een dergelijk voorstel is ook gedaan door Coleman (1964).

<u>Toepassing op de balanstheorie</u>. Op soortgelijke wijze kan de balanstheorie van Heider worden gedynamiseerd.

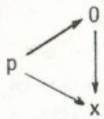

fig. 3

In bovenstaande figuur 3 staat in een graph de structuur afgebeeld die Heider geeft voor de beschrijving van twee personen P en Q die beide een mening hebben over een object X. Voor meer details zie Van der Linden in deze uitgave van de MD-Nieuwsbrief.
De relatie tussen P en O heeft als naam: a_{01}, de relatie tussen P en X: a_{02} en de relatie tussen O en X: a_{12}.

De toestand van Heider's systeem op tijdstip t wordt dus beschreven door de incidentiematrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De relaties van P en O kunnen veranderen. Heider zegt immers, dat als het systeem in onbalans is er een relatie zal veranderen, die het systeem in balans brengt.

Die verandering zal echter ten eerste een bepaalde tijdsduur hebben, zodat het zinvol is de tijd in de matrix A in te voeren. De verandering zal, ten tweede, niet een sprongkarakter hebben, maar zich steeds geleidelijk voltrekken. Er is dus een "verborgen" structuur die de toestanden van het systeem regelt. Deze verborgen structuur wordt beschreven door de matrix Q in

$$\frac{d}{dt} A = QA$$

We hebben zodoende toestand en structuur van Heider's systeem ontrafelt en we zijn weer beland bij vergelijking (1).

Conclusie. In alle drie de genoemde gevallen lijken veranderingen in de structuur niet onwaarschijnlijk. We hebben hier een suggestie gedaan hoe men dergelijke veranderingen zou kunnen beschrijven.
Een evaluatie van deze formulering zal uiteraard moeten wachten op empirische toetsing.
Ook de schattingsproblemen zullen nog wel enige aandacht vragen.
Verder is het domein van de elementen a_{ij} van de matrix A voor iedere toepassing verschillend. Zo wordt in de Markov toepassing gedefinieerd $a_{ij} \in [0, 1]$, terwijl in de Heider toepassing $a_{ij} \in [-1, 1]$. Dit lijkt onbelangrijk, maar is cruciaal voor de schattingsproblematiek van de matrix Q.

Literatuur

1. Blalock, Theory Construction; from verbal to mathematical formulations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.

2. Kemeny, Snell and Thompson, Finite Markov Chains, Van Nostrand Co, Princeton N.J., 1969.

3. Van der Linden, "De theoretische winst van de formele Balanstheorie", MD-Nieuwsbrief, ditzelfde nummer.

4. Rabbie, "Effecten van een competitieve en coöperatieve intergroepsoriëntatie op verhoudingen binnen en tussen groepen", Nederlands Tijdschrift voor de Psychologie 29, 1974, pp. 239-257.

5. Duncan, "Path Analysis: Sociological Examples", American Journal of Sociology 72, 1966, pp. 1-16.

6. Coleman, Mathematical Sociology, The Free Press of Glencoe, London, 1964.