

De Modellen-Sectie

GRAPHENTHEORIE

W.J. van der Linden - Subfaculteit Psychologie, R.U. Utrecht

De graphentheorie is een niet-traditionele vorm van wiskunde die de studie van punten en pijlen betreft en zich bij uitstek leent voor het opstellen van structurele modellen.

Toepassingen in de gedragswetenschappen zijn mogelijk op die gebieden waar structurele verschijnselen het onderwerp vormen: sociometrische analyses, machts-, communicatie-, status-, cognitieve balanstheorieën, enz.

In dit artikel geven we een korte inleiding in de graphentheorie.¹⁾ Een complicatie daarbij is dat de graphentheorie nog niet voorzien is van een standaardterminologie. Bovendien geven de definities van de diverse auteurs nogal eens onderlinge verschillen te zien.

In de eerste plaats hebben we ons voor de engelse terminologie gebaseerd op het boek van Harary, Norman en Cartwright, een veel gebruikt en geciteerd werk dat onder de gedragswetenschappelijke inleidingen een vooraanstaande plaats inneemt. Vervolgens hebben we ons voor nederlandse vertalingen van de termen gebaseerd op het artikel van Felling. Gaf het artikel van Felling geen vertaling, dan maakten we deze zelf.

In de eerste paragraaf hierna introduceren we de *gerichte graph*, in een volgende paragraaf de *ongegerichte graph* en tenslotte verkennen we in de laatste paragraaf een aantal *andere soorten graphen*. *adv* *afsnittes* *ob* *nodus* *disj* *bestemd* *heftig* *disj*

DE GERICHTE GR

Een *gerichte gr*
verzameling *pw*
("directed line

In figuur 1 zie
tweetal punten

Dit is een zeer
die de bouwste
meer complexe

verderop zullen
pijl in figuur
getrokken dat t

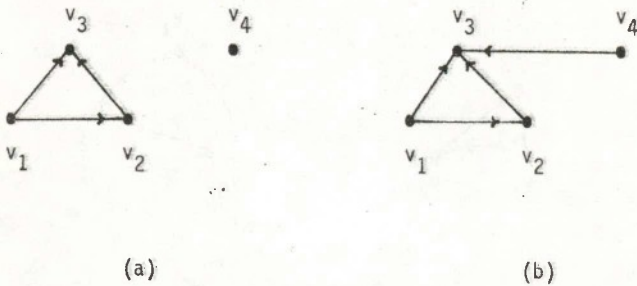
met v_j . Het pur
het punt v_j noe
We zeggen dat e

als het punt he
We kunnen nu de
graph:

D1 - Een *g*
punte
ieder
het e

Een paar eigens
voren. In de ee
verzameling pun
uit pijlen best
graph. Dit volg
tie dat eist da

Het tweede kenmerk van deze definitie is dat iedere pijl moet incideren met twee punten, maar dat *het omgekeerde niet het geval hoeft te zijn*. We spreken eveneens van een gerichte graph als deze punten bevat die niet met een pijl incideren, dus strikt genomen mag de verzameling pijlen leeg zijn. In figuur 2 zijn zowel (a) als (b) gerichte graphen,



Figuur 2.

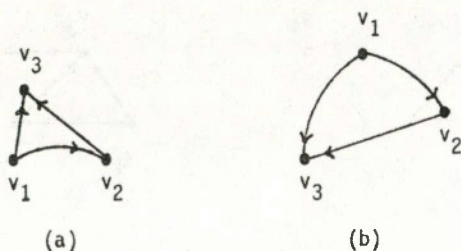
ook al is er in (a) een punt dat geïsoleerd ligt en met geen enkele pijl incideert.

In het vervolg moeten we om een paar dingen denken. In de eerste plaats zullen we pijlen wel eens weergeven door *geordende paren* (v_i, v_j) in plaats van x_i . Dit voorkomt dat we in de figuren alle pijlen van een identificerend symbool x_i moeten voorzien. In de tweede plaats moeten we erop bedacht zijn dat de ruimtelijke voorstelling van graphen een aantal assumpties mist die in de gewone, euclidische meetkunde wel van kracht zijn. We noemen de

volgende assumpties:

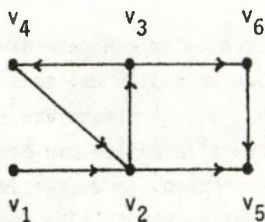
- de *lengte* van de pijlen heeft geen betekenis;
- de *vorm* van de pijlen heeft evenmin betekenis: pijlen mogen recht of krom zijn, zig-zaggen, etc.;
- tenslotte bezitten de *posities* van de punten ten opzichte van elkaar geen betekenis.

De beide constructies in figuur 3 stellen dus dezelfde graph voor, ook al zijn er verschillen in de posities van de punten en de lengte en de vorm van de pijlen:



Figuur 3.

Bijna alle gedragswetenschappelijke toepassingen maken gebruik van de begrippen (semi-)sequentie, (semi-)pad en (semi-)cyclus die we hier definiëren. Ter illustratie van deze begrippen maken we gebruik van de gerichte graph in figuur 4.



Figuur 4.

In de graph van figuur 4 zijn de punten v_1 op diverse manieren met elkaar verbonden. Vergelijken we de subgraph $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_5, v_5$ met de subgraph $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4$ dan valt ondanks het grote aantal verschillen één overeenkomst duidelijk op: beide subgraphen vormen een opeenvolging van punten en pijlen, waarbij de pijlen een kopstaart ligging vertonen. Zo'n opeenvolging van punten en pijlen noemen we een sequentie:

D2 - Een *sequentie* ("sequence") is een wisselende opeenvolging van punten en pijlen die begint en eindigt met een punt en als eigenschap heeft dat ieder punt dat met meer dan één pijl incideert het tweede punt vormt van de pijl die voorafgaat en het eerste punt van de pijl die volgt.

Merk op dat deze definitie niet eist dat ieder punt slechts één keer in de sequentie voorkomt. In figuur 4 is de opeenvolging van pijlen die de punten $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$ passeert ook een sequentie.²⁾

Laten we de eis van kopstaart ligging in een sequentie vallen, d.w.z. hoeft ieder tweede punt van een pijl niet te incideren met ieder eerste punt van de volgende pijl uit de sequentie, dan spreken we van een semisequentie:

D3 - Een *semisequentie* ("semisequence") is een wisselende opeenvolging van punten en pijlen die begint en eindigt met een punt en als eigenschap heeft dat één van de beide punten van de vorige pijl incideert met de volgende pijl.

Een voorbeeld van een semisequentie in figuur 4 is de opeenvolging van pijlen die de punten $v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_2, v_4$ passeert. De voorbeelden van sequenties die we hierboven gaven,

zijn tevens voorbeelden van semisequenties, want uit een vergelijking van D2 en D3 volgt dat iedere sequentie een semisequentie is.

Het punt waarmee een sequentie of semisequentie begint, noemen we het *beginpunt* ("initial point"), terwijl het punt waarmee een sequentie of semisequentie eindigt *eindpunt* heet ("terminal point").

We kunnen nu twee soorten sequenties of semisequenties onderscheiden: open en gesloten (semi-)sequenties.

D4 - Een *open sequentie of semisequentie* is een (semi-)sequentie waarvan beginpunt en eindpunt niet samenvallen.

D5 - Een *gesloten sequentie of semisequentie* is een (semi-)sequentie waarvan beginpunt en eindpunt samenvallen.

Zowel voor sequenties als voor semisequenties geldt dat de opeenvolging van pijlen meerdere malen hetzelfde punt mag passeren. Met andere woorden, *bij sequenties en semi-sequenties mogen de punten met meer dan twee pijlen incideren*.
Laten we deze eigenschap vallen, dan definiëren we de begrippen (semi-)pad en (semi-)cyclus:

D6 - Een *pad* ("path") is een open sequentie waarvan de punten met niet meer dan twee pijlen incideren.

D7 - Een *semipad* ("semipath") is een open semisequentie waarvan de punten met niet meer dan twee pijlen incideren.

Een voorbeeld van een pad in de graph van figuur 4 is de sequentie die achtereenvolgens de punten v_1, v_2, v_3, v_4 bevat. Een voorbeeld van een semipad in deze graph is de semisequentie die achtereenvolgens de punten v_2, v_5, v_6, v_3, v_4 bevat.

D8 - Een *cyclus* ("cycle") is een gesloten sequentie waarvan de punten met niet meer dan twee pijlen incideren.

D9 - Een *semicyclus* ("semicycle") is een gesloten semisequentie waarvan de punten met niet meer dan twee pijlen incideren.

Een voorbeeld van een cyclus in figuur 4 is de opeenvolging van pijlen die de punten v_4, v_2, v_3, v_4 bevat. Een voorbeeld van een semicyclus in deze graph is de opeenvolging van pijlen die de punten v_6, v_5, v_2, v_3, v_6 bevat. Vergelijken we D6 met D7 en D8 met D9 dan zien we *dat ieder pad een semipad is en dat iedere cyclus een semicyclus is.* Dit is een consequentie van het gegeven dat deze definities de begrippen sequentie en semisequentie bevatten en we eerder constateerden *dat iedere sequentie een semisequentie is.*

Er zijn nog twee nieuwe begrippen die we in deze paragraaf invoeren: verbondenheid en lengte.

D10 - Twee punten in een gerichte graph zijn *verbonden* ("joined") als er in deze gerichte graph een semipad bestaat dat het ene punt als beginpunt en het andere punt als eindpunt heeft.

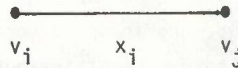
D11 - De *lengte* ("length") van een (semi-)sequentie, (semi-)pad of (semi-)cyclus is het aantal pijlen die deze bevat.

Voorbeelden van het al of niet verbonden zijn van punten in een gerichte graph vinden we in figuur 2. In graph (b) zijn v_1 en v_4 verbonden, terwijl ze dit in graph (a) niet zijn. In figuur 4 bestaat de semisequentie $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_1$ uit vijf pijlen. De lengte van deze semisequentie is dus 5.

DE ONGERICHTE GRAPH

Na de vorige paragraaf kunnen we over de *ongerichte graph* kort zijn. In plaats van ongerichte graph spreekt men ook wel van *lineaire graph*, of kortweg *graph*. Hoewel de laatste naam strikt genomen een soortnaam is, zullen we ons aan dit gebruik houden en in het vervolg een ongerichte graph kortweg *graph* noemen.

In figuur 5 vinden we de bouwsteen van deze soort graphen. Deze bestaat uit een tweetal punten v_i en v_j en een lijn x_i . In tegenstelling tot de gerichte graph bestaat de graph dus uit punten en lijnen. Pijlen



Figuur 5.

komen in een graph niet voor. Het onderscheid tussen het eerste punt en het tweede punt dat bij de *asymmetrische pijl* zinvol is, missen we noodzakelijk bij de *symmetrische lijn*.

We spreken bij een graph wel van het *incideren* van een punt en een lijn. We bedoelen daarmee dan dat het punt samenvalt met een van de uiteinden van de lijn.

We geven de volgende definitie van een graph:

D12 - Een *graph* of *ongerichte graph* is een niet-lege verzameling punten en een verzameling lijnen waarvan iedere lijn incideert met twee punten die er de uiteinden van vormen.

Evenals bij de gerichte graph (zie definitie D1) vermeldt de definitie van de graph dat de verzameling punten *niet-leeg* dient te zijn. Maar tevens laat ze toe dat de verzameling lijnen leeg mag zijn en dat er punten zijn die niet met lijnen incideren.

Voor graphen geldt eveneens dat de *lengte* en *vorm* van de lijnen en de relatieve *posities* van de punten geen betekenis hebben.

Het onderscheid tussen *sequentie* en *semisequentie*, *pad* en *semipad* en *cyclus* en *semicyclus* heeft wel zin bij gerichte graphen, maar niet bij graphen. Bij deze laatste spreken we daarom kortweg van *sequenties*, *paden* en *cycli*. Hun respectievelijke definities krijgen we door in D3, D6 en D8 het woord "pijl" te vervangen door het woord "lijn".

De begrippen *verbondenheid* en *lengte* behouden hun definities D10 en D11.

ANDERE SOORTEN GRAPHEN

Voor een kennismaking met de gedragswetenschappelijke toepassingen hebben we nog een aantal graphentheoretische begrippen nodig. We introduceren eerst de gesigioneerde graph.

Een gesigioneerde graph is geschikt om empirische relaties af te beelden die zowel positief als negatief voor kunnen komen.

We definiëren de gesigioneerde graph als volgt:

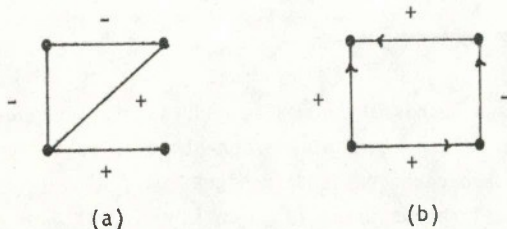
D13 - Een *gesigioneerde graph* ("signed graph") is een graph waarvan aan iedere pijl of lijn een plus- of minteken toegevoegd is.

Een gesigioneerde graph kan zowel gericht als ongericht zijn. Omdat een uitdrukking als "een gesigioneerde, ongerichte graph" nogal lang is, gaan we op de volgende - in de Engelse literatuur gebruikelijke - afkortingen over.

Zoals we al eerder overeengekomen zijn, noemen we een ongerichte graph kortweg *graph*. Een gerichte graph krijgt voortaan de naam *digraph* ("directed graph"). Is een graph gesigioneerd, dan plaatsen we voor graph of digraph de uitdrukking "s-" ("signed graph"). Is de graph ongesigioneerd, dan laten we deze uitdrukking weg.

Een gesigioneerde, ongerichte graph noemen we dus voortaan een *s-graph*, terwijl we een gesigioneerde, gerichte graph *s-digraph* noemen. Evenzo heten een ongesigioneerde, ongerichte graph en een ongesigioneerde, gerichte graph voortaan respectievelijk *graph* en *digraph*.

Een voorbeeld van een s-graph en s-digraph vinden we in figuur 6:



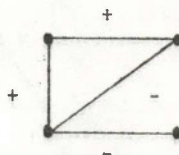
Figuur 6

Na deze introductie van s-graphen en s-digraphen kunnen we een operatie of bewerking op graphen voorstellen: de negatie.

D14 - We verkrijgen de *negatie* van een s-graph of s-digraph door de lijnen of pijlen van teken te laten wisselen.

De s-graph die we in figuur 7 aantreffen, is de negatie van de s-graph (a) uit figuur 6.

We zien dat iedere lijn die in figuur 6 (a) een plus-teken toegevoegd kreeg, in figuur 7 een minteken bezit, en omgekeerd.

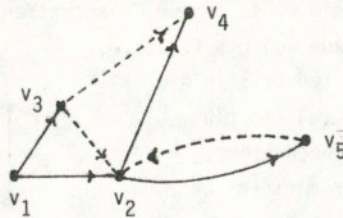


Figuur 7.

Een ander soort graphen is de multi-graph, ook wel genoemd de graph van het type T (waarbij $T = 2, 3, \dots$). In alle voorgaande soorten graphen was in de definitie sprake van slechts *één verzameling pijlen of lijnen*. Deze graphen zijn daardoor slechts geschikt voor de afbeelding van systemen die één soort relatie kennen. Willen we systemen met meer dan één soort relatie afbeelden, dan dienen we in de graphen meer dan één verzameling pijlen of lijnen op te nemen. Dergelijke graphen zijn multi-graphen of graphen van het type T :

D15 - Een *multi-graph* of *graph van het type T* is een niet-lege verzameling punten en een aantal verzamelingen lijnen of pijlen waarvan iedere lijn of pijl incideert met twee punten. In het geval van lijnen vormen deze twee punten de uiteinden van de lijn en in het geval van pijlen vormen deze twee punten het eerste en het tweede punt van de pijl.

Een multi-graph of graph van het type T geven we weer met verschillende soorten lijnen of pijlen. In figuur 8 zien we een *graph van het type 2*. Dit is een digraph waarvan de pijlen uit de ene verzameling *doorgetrokken* en de pijlen uit de andere verzameling *gestreept* zijn:



Figuur 8.

Eerder leerden we de negatie-operatie kennen die bestond uit het verwisselen van de plus- en mintekens in een s-graph of s-digraph. We gaan nu kennis maken met een tweede operatie op graphen: de eliminatie.

We onderscheiden twee soorten eliminatie: eliminatie van lijnen of pijlen en eliminatie van punten.

D16 - We *eliminieren lijnen of pijlen* van een graph door deze uit de betreffende verzameling van deze graph te nemen.

D17 - We *eliminieren punten* van een graph door deze punten uit de verzameling en tevens de lijnen of pijlen die met deze punten incideren uit de betreffende verzameling van deze graph te nemen.

Het resultaat van beide eliminaties heeft in de graphentheorie een verschillende naam:

D18 - Een *partiële graph* is een graph waaruit lijnen of pijlen geëlimineerd zijn.

D19 - Een *subgraph* is een graph waaruit punten geëlimineerd zijn.

Zijn er uit een graph zowel punten als lijnen of pijlen geëlimineerd, dan spreken we van een *partiële subgraph*.

Als laatste 2 begrippen geven we *connectiviteit* en *articulatie punt*:

D20 - Een graph is *connectief* als alle punten verbonden zijn.

D21 - Een *articulatie punt* ("articulation point") van een connectieve graph is een punt waarvan de eliminatie een disconnectieve graph oplevert.

Voor het begrip *verbondenheid* uit D20 verwijzen we terug naar D10.

NOTEN

- 1) De inleiding die we hier presenteren is nogal nonchalant. Met name de verzamelingen- en relatietheoretische notatie ontbreekt.
Onze inleiding is gebaseerd op de volgende literatuur:
BERGER, COHEN, SNELL AND ZELDITCH - Types of formalization in small-group research. Boston, 1962.
CARTWRIGHT AND HARARY - Structural balance: a generalization of Heider's theory. Psychological Review 63, 1956, 277-293.
COOMBS, DAWES AND TVERSKY - Mathematical psychology: an elementary introduction. New Jersey, 1970, 78-94.
FELLING - De graphtheorie als formeel analysemodel voor het beschrijven van machts- of invloedsstructuren. Acta Politica, 1973, 133-203.
FLAMENT - Applications of graph theory to group structure. New Jersey, 1963.
HARARY - On the notion of balance of a signed graph. Michigan Mathematical Journal 2, 1953, 143-146.
HARARY - The number of linear, directed, rooted and connected graphs. Transactions of the American Mathematical Society 78, 1955, 445-463.
HARARY - On local balance and N-balance in signed graphs. Michigan Mathematical Journal 3, 1955, 37-41.
HARARY - Structural duality. Behavioral Science 2, 1957, 255-265.
HARARY - On the measurement of structural balance. Behavioral Science 4, 1959, 316-323.
HARARY - A criterion for unanimity in French's theory of Social power. In: CARTWRIGHT, ed. - Studies in social power. Ann Arbor: Institute for social research, 1959, 168-182.
HARARY - A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues. Journal of mathematics and physics 38, 1959, 104-111.
HARARY, NORMAN AND CARTWRIGHT - Structural models: an introduction to the theory of directed graphs. New York, 1965.
KAUFMANN - Points and arrows: the theory of graphs. London, 1972.
NORMAN AND ROBERTS - A derivation of a measure of relative balance for social systems and a characterization of extensive ratio systems. Journal of Mathematical Psychology 9, 1972, 66-91.
ROSENBERG AND ABELSON - An analysis of cognitive balancing. In: HOVLAND AND ROSENBERG, eds. - Attitude organization and change. New Heaven, 1960, 112-163.
TAYLOR - Balance in small groups. New York, 1970.
- 2) (Semi-)sequenties, (semi-)paden en (semi-)cycli zullen we in het vervolg meestal noteren door alleen de opeenvolging van punten te noemen. Het eerste punt is daarbij - uiteraard - het beginpunt en het laatste punt het eindpunt.