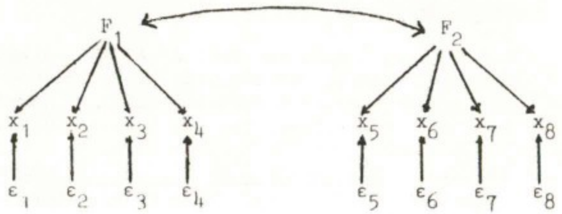
Procedures voor het opsporen van specificatie-fouten.

W.E. Saris.

In alle gevallen waarin men hypothesen toetst, doet zich het probleem voor dat men bij verwerping van een model zou willen weten op welke plaatsen het model verbeterd zou moeten worden om een betere fit te krijgen met de data.
Op de eerste plaats is dit uiteraard een theoretisch probleem, echter in vele gevallen hebben we slechts ideeën over het model wat betreft zijn algemene vorm en niet wat betreft details. Zo zou men wel kunnen zeggen dat de operationalisering van twee begrippen als volgt geformuleerd zou moeten worden:



Figuur 1: Het algemene operationaliseringsmodel

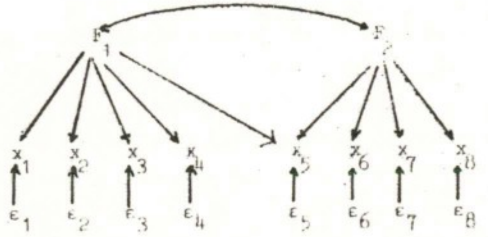
Wanneer dan echter in onderzoek een correlatiematrix gevonden wordt als vermeld in tabel 1 die een significant slechte fit geeft bij dit model dan zal men veelal niet weten hoe een dergelijk model te corrigeren.

Nog moeilijker wordt het wanneer men weet dat de modellen vermeld in figuur 2 a,b en c allen exact deze data kunnen beschrijven. Een keuze tussen deze modellen op basis van theoretische overwegingen lijkt veelal zeer problematisch. Men zou een procedure willen hebben die in het geval van een slechte fit die correcties aanwijst die de eenvoudigste modellen opleveren en een goede fit hebben. Men zou namelijk als men geen theoretische argumenten heeft, model a kunnen verkiezen boven b en c vanwege de eenvoud. Men zou ook wensen een procedure te hebben die niet te tijdrovend is (zoals alle mogelijkheden uitproberen) en die éénduidig is zodat de analyse bij wijze van spreken automatisch zou kunnen worden gedaan.
Aan het opstellen van dergelijke procedures is de laatste tijd enig onderzoek gewijd. Costner en Schoenberg (1973) hebben een procedure ontwikkeld voor factoranalyse-modellen waarbij men eerst een analyse moet uitvoeren van combinaties van 2 indicatoren per construct en vervolgens van combinaties van 3 indicatoren per construct om dan op basis van telling van de frequentie van het aantal malen dat een slechte fit voorkomt te bepalen waar de fouten zitten.

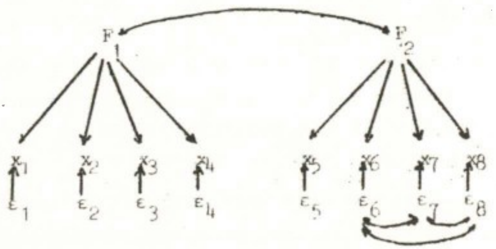
Tabel 1: Een hypothetische correlatie-matrix

x_1	1.0							
x_2	.49	1.0						
x_3	.49	.49	1.0					
x_4	.49	.49	.49	1.0				
x_5	.217	.217	.217	.217	1.0			
x_6	.147	.147	.147	.147	.511	1.0		
x_7	.147	.147	.147	.147	.511	.49	1.0	
x_8	.147	.147	.147	.147	.511	.49	.49	1.0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

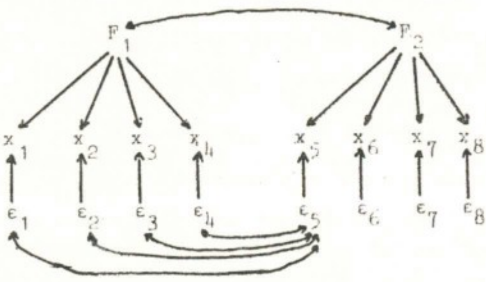
Model a



Model b



Model c



Figuur 2 a,b,c Drie factoranalytische modellen die dezelfde correlatie-matrix van tabel 1 kunnen reproduceren

Deze procedure is zeer specifiek voor dit model en zeer bewerkelijk. Bovendien is de procedure niet éénduidig bij grotere en complexere modellen.
Een alternatieve procedure is gebruikt door Kalleberg (1973) en wordt ook door Blalock e.a. (1975) aangeraden. Allereerst berekent men de verschillende mogelijke oplossingen van de parameters. Vervolgens gaat men na welke parameters de grootste spreiding vertonen. Zou het model goed zijn dan zouden al deze oplossingen gelijk moeten zijn. De spreding geeft dus een indicatie van de fouten. Ook deze procedure is echter te bewerkelijk en niet éénduidig. Bij beide procedures bestaat bovendien ook geen criterium wanneer wel en wanneer geen correcties moeten worden aangebracht.
Eenvoudig toepasbare procedures zijn ontwikkeld door Byron (1973) en Sörbom (1975) die we in de volgende paragrafen zullen introduceren.

<u>Maximum likelihood schatting onder voorwaarden.</u>
Byron heeft zijn procedure ontwikkeld voor lineair structurele modellen zoals gebruikt worden in de econometrie, Sörbom ontwikkelde zijn programma voor restricted factoranalyse -modellen. Ook de procedure van Byron zou direct toegepast kunnen worden op de factoranalyse-modellen.
Beiden gaan uit van maximum likelihood schattingsprocedures voor modellen waarin bepaalde restricties zijn ingevoerd d.w.z. dat van alle mogelijke parameters in het model bepaalde parameters een vaste waarde krijgen (bijv.: 0). Wanneer we alle parameters in een lange vector θ brengen dan zou men de restricties als volgt kunnen weergeven:

$$H\theta = c$$

waarbij H een matrix met slechts 1 of 0 elementen is en c een vector is met constanten. Een element van H bijv. $h_{ij} = 1$ als θ_j (dus de j^e parameter) een bepaalde waarde moet krijgen, n.l. c_i. Het aantal rijen van H is gelijk aan het aantal restricties.
Bij maximum likelihood schattingsprocedures wordt meestal de logarithme van de likelihood functie gemaximaliseerd. In het geval van restricties moet men ook deze functie maximaliseren, echter nu onder voorwaarden dat $H\theta = c$.
Als de functie die gemaximaliseerd moet worden $F(\theta)$ is, dan kan men ook, omdat $(H\theta - c) = 0$, de volgende vorm maximaliseren:

$$F(\theta) + v'\,(H\theta - c) \quad \text{onder voorwaarde } H\theta = c.$$

De coëfficiënten in de vector v worden de "Lagrange Multipliers" genoemd.

Voor het maximum van deze functie geldt dat de afgeleiden naar alle te schatten parameters gelijk aan nul moeten zijn; of te wel:

$$\delta F(\theta)/\delta\theta \quad + H'v = 0$$

Zouden geen restricties zijn ingevoerd dan had moeten gelden dat

$$\delta F(\theta)/\delta\theta \quad = 0$$

Als de restricties juist gekozen zijn dan vallen deze twee oplossingen samen en moeten dus alle afgeleiden nul zijn en omdat H alleen 0 en 1 elementen bevat moeten de Lagrange multipliers ook nul zijn (afgezien van steekproeffluctuaties). Zijn de restricties niet juist gekozen dan verschillen de oplossingen en zijn voor een aantal gekozen parameters de afgeleiden niet nul. In die gevallen geldt

$$\delta F(\theta)/\delta\theta_j \quad = -v_j$$

Hieruit blijkt dat de Lagrange multipliers een indicatie geven van de juistheid van de hypothesen (restricties). Silvey (1958) heeft hierop dan ook een test gebaseerd.

De procedure van Byron .

Voortbouwend op het werk van Silvey heeft Byron voorgesteld om te testen of de Lagrange multipliers significant van nul afwijken en vervolgens alle parameters vrij te laten waarvoor dit het geval is.

Silvey heeft aangetoond dat de schattingen van de Lagrange multipliers, als de hypothesen juist zijn, normaal verdeeld zijn en heeft ook aangegeven hoe de variantie-covariantie matrix van de schatters kan worden berekend.

Een probleem is echter dat men juist geïnteresseerd is in deze coëfficiënten wanneer de hypothesen verworpen moeten worden. Desondanks heeft Byron deze procedure met succes toegepast op artificiële data. Het is echter duidelijk dat deze procedure slechts een ad hoc status kan hebben en ingewisseld zou moeten worden voor elke andere informatie die men zou hebben over het model. Wanneer men echter geen andere informatie heeft, kan men toch enige informatie ontlenen aan de hierboven beschreven procedure.

De procedure van Sörbom

In het programma van Sörbom wordt gebruik gemaakt van de waarden van de afgeleiden van de functie naar alle parameters. Er wordt nagegaan welke afgeleide absoluut het grootste is en de bijbehorende parameter wordt in de volgende draai van het programma dan vrij gemaakt zodat deze ook geschat wordt. Vervolgens begint de procedure weer overnieuw en men herhaalt dit net zo lang tot dat een acceptabele passing van de data en het model gevonden is (1).

Beide procedures maken dus gebruik van dezelfde informatie, echter Byron corrigeert het model in één keer terwijl Sörbom een stapsgewijze procedure voorstelt.

Een alternatieve procedure

Door De Pijper,Saris en Zegwaart(1976) is een monte-carlo-studie gedaan naar de resultaten van de procedure van Sörbom bij factoranalyse modellen met restricties. De onderzoekers vonden dat in 48 van de 92 gevallen deze procedure tot complexere modellen leidde dan het model waarmee de data waren berekend. Dit betekent niet dat deze resultaten onjuist zijn want dat is een theoretisch probleem. We kunnen alleen zeggen dat deze procedure niet noodzakelijkerwijs de eenvoudigste modellen oplevert.

De redenen hiervoor zijn:

1) Aangezien de waarden van de verschillende parameters onbekend zijn, is het niet zeker dat de restricties worden losgelaten die de grootste daling of stijging in de functie waarde teweeg zullen brengen. Er kan namelijk sprake zijn van een klein spits "heuveltje" terwijl er elders hogere , maar minder stijle "heuvels" te vinden zijn.

2) De afgeleiden van $F(\theta)$ kunnen afhankelijk van elkaar zijn. Hierdoor is het mogelijk dat door loslating van bepaalde restricties veel meer bereikt kan worden dan met andere.

Om aan de laatste opmerking tegemoet te komen hebben de onderzoekers een alternatieve procedure ontwikkeld die rekening houdt met de onderlinge correlaties tussen de Lagrange multipliers. Uit de analyses op dezelfde data bleek deze procedure veel beter te voldoen. Slechts in 4 van de 92 berekende populatie datasets leverde deze procedure een complexer model op dan het model waarmee de data waren gegenereerd. Ook bij steekproefgegevens werd in 90% van de gevallen waarin een correctie werd aangebracht een juiste correctie aangebracht.

Het criterium dat gehanteerd werd kan voor de i^e parameter als volgt worden geformuleerd:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} v_j$$

Voor alle parameters kan deze grootheid berekend worden en de absolute waarde vergeleken. Op basis daarvan kan de parameter worden vrijgelaten die de grootste waarde voor w heeft. Voor de details over de berekeningen verwijzen we naar het onderzoeksverslag .

Aangezien deze procedure tamelijk veel computer ruimte vraagt, is er nog slechts een programma beschikbaar voor kleine modellen. Daarom zullen we hieronder alleen de procedure van Sörbom illustreren.

Tabel 2 Analyse volgens de procedure van Sörbom

vrijgelaten parameter	χ^2	DF	overschrijdingskans
0	200	62	> 0.000
$\lambda_{12\ 2}$	150	61	> 0.000
$\psi_{9\ 2}$	136	60	> 0.000
$\psi_{4\ 2}$	127	59	> 0.000
$\lambda_{2\ 3}$	111	58 (4)	> 0.000
$\psi_{6\ 1}$	102	57 (4)	> 0.000
$\psi_{9\ 6}$	94	56	> 0.002
$\phi_{3\ 2}$	73	55	> 0.054

Tabel 3 Analyse volgens de procedure van Sörbom met verwaarlozing van gecorreleerde meetfouten en correlaties tussen de factoren

vrijgelaten parameter	χ^2	DF	overschrijdingskans
0	200	62	> 0.000
$\lambda_{12\ 2}$	150	61	> 0.000
$\lambda_{2\ 3}$	132	60	> 0.000
$\lambda_{2\ 2}$	118	59	> 0.000
$\lambda_{8\ 4}$	113	58 (4)	> 0.000
$\lambda_{6\ 3}$	102	57 (4)	> 0.000
$\lambda_{3\ 3}$	93	56 (4)	> 0.0013
$\lambda_{10,3}$	84	55 (4)	> 0.008
$\lambda_{9\ 3}$	75	54 (4)	> 0.034
$\lambda_{4\ 1}$	68	53 (4)	> 0.076
$\lambda_{2\ 5}$	57	52	> 0.30

Een illustratie van het gebruik van de procedure van Sörbom

De procedure die Sörbom heeft ontwikkeld zullen we hier illustreren a.h.v. de data die ook in het eerste artikel zijn geanalyseerd. In dat geval bleek duidelijk dat de theorie van Guilford verworpen zou moeten worden. Vervolgens werd gekozen om alle parameters groter dan .16 in de unrestricted factoranalyse vrij te laten en toen werd een oplossing verkregen die een goede fit had met de data.

Met behulp van het programma LISREL (2) kan men ook factoranalyse modellen analyseren en de eerste afgeleiden naar de parameters laten berekenen. Wanneer men nu de afgeleide opzoekt die absoluut de grootste waarde heeft en in de volgende draai deze parameter vrij laat dan kan men de procedure van Sörbom toepassen op deze data (3). Het resultaat van deze analyse hebben we weergegeven in tabel 2. Uit deze tabel blijkt dat we uitgaande van het model van Guilford met een slechte fit in 7 stappen tot een redelijk passend model kunnen komen (5). Deze eindoplossing is duidelijk afwijkend van de oplossing van Mellenbergh omdat het zinvol leek om ook correlaties tussen de meetfouten te introduceren (ψ_{ij}) en ook een correlatie tussen de factoren 2 en 3 (ϕ_{32}).

Uit deze analyse zien we dat er reden zou kunnen zijn om de orthogonaliteit van de factoren te verlaten. Of een dergelijke conclusie theoretisch relevant is willen we nu niet ter discussie stellen. We willen hier alleen een procedure illustreren.

Wanneer men zou willen blijven vasthouden aan de aanname dat de factoren orthogonaal zijn dan zou men de afgeleiden naar deze parameters moeten negeren.

Een analyse waarbij we alleen correlaties aanbrengen in de ladingen hebben we weergegeven in tabel 3.

Uit beide analyses blijkt dat men niet zoveel parameters hoeft vrij te maken als door Mellenbergh is gedaan om een goede fit te krijgen.

Hij heeft voor het vijfde factormodel nog slechts 48 vrijheidsgraden over, terwijl wij reeds een redelijke passing krijgen met resp. 55 en 52 vrijheidsgraden. Uit de studie van De Pijper, Saris en Zegwaart blijkt ook dat men bij introductie van teveel vrije parameters het gevaar loopt om toevalsfluctuaties als kenmerken van de data in het model op te nemen. Zo blijken ook 8 parameters uit de oplossing van Mellenbergh niet significant van 0 af te wijken. Hieruit wordt nogmaals duidelijk dat men met eenvoudiger modellen kan volstaan. De procedures die wij hier behandeld hebben kunnen bij het zoeken naar deze modellen behulpzaam zijn.

Willem Saris.

Noten

(1) Sörbom heeft hiervoor een programma ontwikkeld BFSS dat alleen correcties aanbrengt in Λ. In Amsterdam is dit ook aanwezig (BFS I). De Pijper heeft dit programma veralgemeniseerd zodat nu ook correlaties tussen de meetfouten kunnen worden opgespoord (BFS II). In beide programma's wordt verondersteld dat Φ vrij is behalve de diagonaal. Men kan dus geen orthogonale factoranalyse testen.

(2) De versie van LISREL waarmee dit kan is door W.M. de Pijper ontwikkeld op basis van het originele programma van Jöreskog en Van Thillo, 1973.

(3) Omdat we in dit geval een orthogonale factoranalyse moesten draaien was het programma BFS niet geschikt zie (1).

(4) In eerste instantie vonden we in deze gevallen een oplossing met een λ-coëfficiënt > 1 en een variantie van een meetfout die kleiner was dan 0; hetgeen kan gebeuren wanneer het model nog slecht past bij de data.
We hebben dan tijdelijk deze λ parameter op 1 gesteld (fixed) en zijn zo verder gaan analyseren tot dat deze λ-coëfficiënt ook weer vrij geschat kon worden zonder inacceptabele oplossingen op te leveren.

(5) Zoals blijkt stoppen wij eerder met het aanbrengen van correcties in het model dan Mellenbergh. Dit gebeurt aangezien uit ons onderzoek is gebleken dat men zeer veel random errors gaat corrigeren wanneer men doorgaat als de overschrijdingskans groter is dan .10.

(6) Sörbom,1975.

(7) Byron,1972.

Litteratuur

Blalock, H.M., Namboodini, N.K. en Carter, L.F. — Applied multivariate analysis and experimental designs, McGraw-Hill, 1975

Byron, R.P. — Testing for misspecification in econometric systems using full information, in International Econometric Review, vol. 13, 1972, pp. 745 - 756

Costner, H.L. en Schoenberg, R. — Diagnosing indicator ills in multiple indicator models, in Goldberger, A.S. and Duncan, O.D. ed: Structural equation models in the social sciences, Seminar Press, New York, 1973

Jöreskog, K.G. en Van Thillo, M. — LISREL, A general computer program for estimating a linear structural equation system involving multiple indicators of unmeasured variables, Research reprint 73 - 5, Uppsala University, Statistics department, 1973

Kalleberg, A.L. — A causal approach to the measurement of job-satisfaction, in Social science research, vol. 3, 1974, pp. 299 - 321

Lawley, D.N. en Maxwell, A.E. — Factor analysis as a statistical method, Butterworths, London, 1971

De Pijper, W.M., Saris, W.E. en Zegwaart, P. — Het lokaliseren van specificatie-fouten in restricted factoranalyse-modellen, Instituutsmededeling no. 4, Vrije Universiteit, subfaculteit der Sociaal-Kulturele Wetenschappen, 1976

Silvey, S.D. — The Lagrange multiplier test, in Annals of Mathematical Statistics, vol. 30, 1959, pp. 389 - 407

Sörbom, D. — Detection of correlated errors in longitudinal data, in British Journal for Mathematical and Statistical Psychology, vol. 28, 1975, pp. 138 - 151