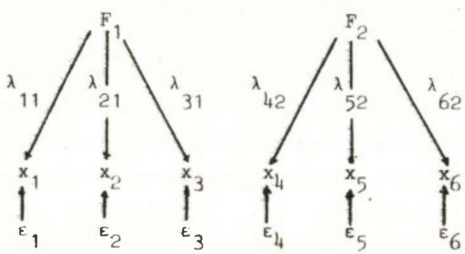
Enkele kanttekeningen betreffende factoranalyse met restricties.

W.E. Saris en G.J. Mellenbergh.

In veel onderzoek in de sociale wetenschappen heeft men te maken met niet direct meetbare begrippen. Men zoekt dan naar indicatoren voor deze begrippen die wel direct meetbaar zijn. Veelal wordt dan gezocht naar indicatoren die slechts een relatie hebben met dat éne begrip dat ze moeten indiceren en geen of zo min mogelijk relatie met andere begrippen.

In factoranalytische termen zou dit betekenen dat deze indicatoren slechts een lading hebben op de ene factor die ze moeten indiceren en niet op de andere factoren. We kunnen deze situatie in het volgende diagram weergeven voor 2 ongecorreleerde factoren (ongemeten) en 6 indicatoren (gemeten):



Het blijkt uit dit diagram dat er wordt aangenomen dat de meetfouten (ε_i) voor de verschillende variabelen ongecorreleerd zijn dus $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)=0$ als $i \neq j$. We hebben ook aangenomen dat de meetfouten ongecorreleerd zijn met de niet direct gemeten factoren F_1 en F_2 dus $E(\varepsilon_i F_k)=0$. Verder neemt men ook aan dat $E(\varepsilon_i) = E(F_k) = 0$. Deze aannamen worden altijd gemaakt zowel bij factoranalyse met als zonder restricties.

Het bijzondere van de factoranalyse met restricties is dat men ook aanneemt dat bepaalde ladingen 0 of enige andere vaste waarde moeten hebben op basis van theoretische overwegingen zoals we hiervoor vermeld hebben.
In vergelijkingen zou men dit model als volgt weergeven:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_{11}F_1 + 0\,F_2 + \varepsilon_1 \\
x_2 &= \lambda_{21}F_1 + 0\,F_2 + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
x_6 &= 0\,F_1 + \lambda_{62}F_2 + \varepsilon_6
\end{aligned}
$$

of in matrixnotatie

$$x = \Lambda f + \varepsilon \qquad (1)$$

waarbij

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ 0 & \lambda_{42} \\ 0 & \lambda_{52} \\ 0 & \lambda_{62} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Λ is dan de matrix met ladingen en we zien dat een aantal coëfficiënten in dit model worden verondersteld gelijk aan 0 te zijn.
Dergelijk soort modellen zijn reeds lang in gebruik in de sociale wetenschappen. Bijvoorbeeld in de econometrie maakt men gebruik van lineaire structurele modellen waarin vergelijkbare hypothesen worden geformuleerd. Hetzelfde geldt voor de sociologie en politicologie waarin dit soort modellen bekend staan onder de naam "padanalyse modellen".
Sinds de jaren 70 bestaan er ook programma's die de parameters in dit soort modellen kunnen schatten. Belangrijk in deze is vooral het werk van Jöreskog en Van Thillo (1972) die een algemeen programma (LISREL) hebben ontwikkeld om lineaire structurele modellen te schatten en toetsen. Een meer specifiek programma is bijv. ACOVS (1970) hetgeen gebruikt is in het eerste artikel voor de toetsing van de theorie van Guilford.
Een belangrijk boek in dit verband is ook het boek van Lawley en Maxwell (1971) "Factor analysis as a statistical method" waarin uitgebreid ingegaan wordt op dit soort modellen.
Theoretisch zijn de schattingsproblemen en toetsingsproblemen voor dit soort modellen met restricties opgelost. Er wordt daarbij niet uitgegaan van vergelijking (1) zoals hiervoor is weergegeven omdat de variabelen f en ε ongemeten zijn. Echter uit (1) en de aannamen volgt dat

$$\Sigma = E(xx') = \Lambda\Phi\Lambda' + \Psi \qquad (2)$$

waarbij

$$\Phi = E(ff') \text{ en } \Psi = E(\varepsilon\varepsilon')$$

De variantie-covariantiematrix Σ is te schatten m.b.v. de steekproef variantie-covariantiematrix (S) waarvan ook de verdeling bekend is onder bepaalde voorwaarden. Schatten kan men de parameters in Λ, Φ en Ψ via kleinste kwadraten methoden of de methode van de meest aannemelijke schatters

Als x multivariate normaal verdeeld is, is er ook een toets van het model mogelijk. Een functie van de aannemelijkheids ratio is dan bij benadering bij grote steekproeven χ^2 verdeeld (Lawley and Maxwell, 1971).
Hoewel er dus mogelijkheden voor schatting en toetsing zijn wordt nog slechts zeer weinig van deze methoden gebruik gemaakt.
Meestal vergeet men na de operationaliseringsfase weer wat men heeft gedaan en voert een analyse uit waarbij geen restricties aan de ladingen worden gesteld maar men hoopt dat een analyse via "principal component" en "varimax rotatie" of enige andere procedure het gewenste patroon van hoge ladingen zal opleveren. Een toets op dergelijke hypothesen gebruikt men meestal niet en vele hypothesen kunnen zo blijven bestaan zonder grondig getest te zijn en worden dan ook niet gecorrigeerd.
Het argument tegen dit soort procedures is meestal dat men niet kan verwachten dat bepaalde ladingen 0 zullen zijn.
Hiertegenover kan men echter stellen dat naar dit soort indicatoren wel gezocht wordt en dat introductie van bepaalde 0 ladingen de theorie aanmerkelijk kan vereenvoudigen hetgeen toch steeds de bedoeling is. Bovendien zal men altijd aannamen moeten maken om schattingen te krijgen, bijv. in de varimax- of oblimim rotatie.
Het is echter de vraag of deze aannamen altijd aansluiten bij de eigen theorie. Het laatste is eenvoudig te doen via factoranalyse met restricties.
Don Mellenbergh laat in het eerste artikel zien hoe men dit soort theorieën kan toetsen en geeft ook een weg aan om tot correcties van de oorspronkelijke theorie te komen.
In het tweede artikel gaan we in op alternatieve procedures om correcties in dit soort theorieën te introduceren. Deze procedures hebben het voordeel dat ze modellen kunnen opleveren die simpeler zijn dan die waartoe de procedure van Mellenbergh leidt.

Wim Saris
Don Mellenbergh.

- Lawley, D.N. & Maxwell, A.E., Factor analysis as a statistical method (2nd ed.), London: Butterworths, 1971.
- Jöreskog, K.G., Gruvaeus, G.T. & van Thillo, M., ACOVS - A general computer program for analysis of covariance structures. Research Bulletin 70-15, Princeton, New York: Educational Testing Service, 1970.
- Jöreskog, K.G. & van Thillo, M., LISREL - A general computer program for estimating a linear structural equation system involving multiple indicators of unmeasured variables, Research reprint 73-5, Uppsala University, Statistics Department, 1973.