

Een overwegend elementaire, op inductie gebaseerde afleiding van de chi-kwadraat eigenschappen van kwadratensommen in een gemengd tweewegs variantie-analyse model

A. L. Beem ¹

Samenvatting

De chi-kwadraat eigenschappen van de kwadratensommen van hoofd- en interactie-effecten worden met inductie afgeleid voor een gebalanceerd gemengd tweewegs variantie-analyse model. De berekeningen zijn tamelijk elementair, maar wel wordt gebruikt dat in een multivariate normale verdeling de variabelen simultaan onafhankelijk zijn als hun covarianties gelijk zijn aan nul. De methode leidt vrij rechtstreeks tot de Huynh-Feldt voorwaarden voor de validiteit van de F-test, zonder dat aangetoond wordt dat deze voorwaarden ook noodzakelijk zijn.

¹Afdeling Biologische Psychologie, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1111, 1081 HV Amsterdam. Tel. 020-4448811. E-mail: AL.Beem@psy.vu.nl

1. Inleiding

Searle and Pukelsheim (1985) en Searle (1987) geven een tamelijk elementaire afleiding van de chi-kwadraat eigenschappen van de kwadratsommen in de ongebalanceerde eenwegs klassificatie met een vast hoofdeffect. Hun afleiding maakt gebruik van inductie en onafhankelijkheid onder normaliteit en werd geïnspireerd door Stigler (1984), die met eenvoudige middelen de onafhankelijkheid van het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie in een steekproef uit een normale populatie behandelt. De auteurs hebben in de eerste plaats het didactische oogmerk om een toegankelijke afleiding te geven van bekende resultaten, waarbij geen gebruik wordt gemaakt van "substantial mathematical machinery".

De eenwegs klassificatie is het elementaire vaste effecten model en wordt daarom gebruikt om de voornaamste kenmerken van de variantie-analyse te illustreren. In inleidingen tot gemengde modellen, die zowel vaste als stochastische hoofd- en interactie-effecten bevatten, wordt daarvoor het tweewegs model gebruikt. Leerboeken behandelen tenminste een van de volgende drie formuleringen van dit model. Het algemene model van Scheffé (1959) is verenigbaar met elke correcte covariantiestructuur van de observaties. Door zijn algemeenheid is de verdelingstheorie voor dit model enigszins ingewikkeld (Imhof, 1962). In een tweede model, dat beschreven wordt door onder andere Searle (1971), zijn alle stochastische effecten ongecorreleerd, waardoor de covarianties van de observaties hetzelfde en positief zijn. Een derde model, dat bijvoorbeeld door Graybill (1961) beschreven wordt, heeft eenzelfde covariantiestructuur als het tweede, maar de covarianties kunnen negatief zijn. Deze modellen zijn vaak vergeleken (bijvoorbeeld Harville, 1978; Hocking, 1973; Nelder, 1977, 1994; Samuels, Casella, en McCabe, 1991; Searle, 1971).

Afleidingen van de chi-kwadraat eigenschappen van de kwadratsommen in het tweede en derde model maken impliciet of expliciet gebruik van matrix algebra en een algemene stelling over de verdeling van kwadratische vormen van normaal verdeelde stochasten (bijvoorbeeld Graybill, 1961; Searle, 1971). In zulke afleidingen is het minder duidelijk dan bij de methode van Searle en Pukelsheim dat de chi-kwadraat eigenschappen van de kwadratsommen slechts een variatie zijn op het thema van de verdeling van de steekproefvariantie van een normale populatie. Dit geldt in het bijzonder voor kwadratsommen die gecorreleerde observaties bevatten. Daarom wordt hier gedemonstreerd, dat de methode van Searle en Pukelsheim eenvoudig kan worden uitgebreid naar de tweewegs modellen zoals beschreven door Graybill (1961) en Searle (1971). Deze toepassing van de methode blijkt bovendien ook betrekkelijk eenvoudig en rechtstreeks te leiden tot de Huynh-Feldt voorwaarden voor de validiteit van de F-test in dit soort modellen. De berekeningen gaan uit van het derde model, maar deze parameterisatie is niet essentieel voor de berekeningen. Met een kleine wijziging kan de methode gebruikt worden voor andere gemengde modellen die een gelijksoortige covariantiestructuur impliceren.

Zehna (1991) vraagt zich af of de afleiding van Stigler wel juist is, omdat Stigler slechts bivariate normaliteit gebruikt, terwijl multivariate normaliteit (of eigenlijk trivariate normaliteit) vereist lijkt voor de gewenste conclusie van simultane onafhankelijkheid uit paarsgewijze onafhankelijkheid. Bij een inleidende behandeling van gemengde mo-

dellen lijkt de introductie van multivariate normaliteit zeker niet buitenissig. Dat kan desnoods gebeuren zonder details te geven, met alleen het vooropgezette doel om tot simultane onafhankelijkheid te kunnen besluiten uit paarsgewijze onafhankelijkheid. Het kunnen neerschrijven of herkennen van de multivariate normale verdeling voegt daaraan weinig toe voorzover het begrip betreft. De methode van Searle and Pukelsheim hoeft daarom niet onjuist te zijn in deze context. Het lijkt me dat de methode voldoende inzicht oplevert en didactische waarde heeft om het gebruik te rechtvaardigen, ook als hij formeel onvolledig is. Het gebruik van de methode vereist vier resultaten: (a) als in een multivariate normale verdeling de covarianties nul zijn, dan zijn de variabelen simultaan onafhankelijk; (b) lineaire combinaties van multivariaat normaal verdeelde variabelen zijn normaal verdeeld; (c) een chi-kwadraat verdeelde variabele χ_k^2 met k vrijheidsgraden is definieerbaar als een kwadratenom van k onafhankelijke en identiek verdeelde standaard normaal verdeelde variabelen; (d) sommen van onafhankelijke chi-kwadraat variabelen zijn chi-kwadraat verdeeld (wat direct volgt uit c). Hier verschillen (a) en (b) van de door Searle en Pukelsheim gebruikte resultaten (een beoordelaar merkte op dat het onjuist om, zoals Searle en Pukelsheim doen, (b) te formuleren voor willekeurig normaal verdeelde variabelen).

2. Het model

Voor waarnemingen y_{ijk} met $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, b$, en $k = 1, \dots, n$, is het model

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}. \quad (1)$$

De α_i zijn de vaste hoofdeffecten. De stochastische effecten zijn de hoofdeffecten β_j , de interactie-effecten γ_{ij} , en de fouten of storingen e_{ijk} . De effecten α_i en γ_{ij} voldoen aan $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$ en $\sum_{i=1}^a \gamma_{ij} = 0$ voor alle j . De verwachting van de stochastische effecten is nul en hun varianties en covarianties zijn

$$\begin{aligned} v(\beta_j) &= \sigma_\beta^2, v(\gamma_{ij}) = (a-1)\sigma_\gamma^2/a, v(e_{ijk}) = \sigma_e^2, \\ cov(\gamma_{ij}, \gamma_{i'j'}) &= -\sigma_\gamma^2/a, i \neq i', j = j', \\ cov(\gamma_{ij}, \gamma_{i'j'}) &= 0, j \neq j'. \end{aligned} \quad (2)$$

De effecten β_j en e_{ijk} zijn normaal, onafhankelijk en identiek verdeeld en zijn onafhankelijk van de interactie effecten, die multivariaat normaal verdeeld zijn. De covarianties van de interactie-effecten zijn een gevolg van de voorwaarde dat ze tot nul sommeren over de niveaus van het vaste effect (de voorwaarde kan ook worden opgevat als een gevolg van $v(\gamma_{ij})$ en $cov(\gamma_{ij}, \gamma_{i'j'})$ in (2) en de verwachting van nul van de γ_{ij}).

De inductiemethode vereist een aangepaste notatie. In een notatie vergelijkbaar met die van Searle en Pukelsheim worden de celgemiddelden geschreven als $m_{ij} = \sum_{k=1}^n y_{ijk}/n$, de rij- en kolom gemiddelden als

$$m_{i|b} = \sum_{j=1}^b m_{ij}/b, i = 1, \dots, a, \text{ en } m_{j|a} = \sum_{i=1}^a m_{ij}/a, j = 1, \dots, b, \quad (3)$$

en het algemeen gemiddelde kan, afhankelijk van de context, geschreven worden als

$$M_a = \sum_{i=1}^a m_{i|b}/a, M_b = \sum_{j=1}^b m_{j|a}/b, \text{ of als } M_{ab} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b m_{ij}/ab. \quad (4)$$

De notatie in (3) benadrukt dat gesommeerd wordt over b kolommen of a rijen. Het symbool voor de verticale streep verwijst naar het rij- of kolomnummer, het symbool erna naar het aantal niveaus waarover gesommeerd wordt. Als een rij of kolom wordt toegevoegd aan de klassificatie, dan worden $m_{j|a+1} = \sum_{i=1}^{a+1} m_{ij}/(a+1)$, $m_{i|b+1} = \sum_{j=1}^{b+1} m_{ij}/(b+1)$, $m_{a+1|b} = \sum_{j=1}^b m_{(a+1)j}/b$ and $m_{b+1|a} = \sum_{i=1}^a m_{i(b+1)}/a$ vergelijkbaar gedefinieerd. De verwachting van de steekproefgemiddelden wordt geschreven als μ met het overeenkomstige subscript (e.g., $\mu_{ij} = E(m_{ij})$).

Searle en Pukelsheim bewezen de chi-kwadraat eigenschappen van de kwadraten-som van het hoofdeffect in de ongebalanceerde eenwegs klassificatie door inductie over het aantal niveaus. Met de in de inleiding genoemde bekend veronderstelde resultaten kan hun methode direct worden toegepast op de kwadraten-som van het hoofdeffect B , want deze kwadraten-som bevat geen gecorreleerde waarnemingen. Daarom wordt deze kwadraten-som hier slechts kort behandeld. Omdat de kwadraten-sommen van het hoofdeffect A en het interactie-effect AB gecorreleerde waarnemingen bevatten, worden hun chi-kwadraat eigenschappen in de volgende twee secties afgeleid met behulp van de methode van Searle en Pukelsheim. Daarbij worden de volgende implicaties van (1)–(4) gebruikt:

$$\begin{aligned} v(m_{ij}) &= \sigma_\beta^2 + (a-1)\sigma_\gamma^2/a + \sigma_\epsilon^2/n \\ cov(m_{ij}, m_{i'j'}) &= \sigma_\beta^2 - \sigma_\gamma^2/a, \text{ als } i \neq i' \text{ en } j = j' \\ v(m_{i|b}) &= v(m_{ij})/b \\ cov(m_{i|b}, m_{i'|b}) &= cov(m_{ij}, m_{i'j})/b \\ v(m_{j|a}) &= v(m_{ij})/a + (a-1)cov(m_{ij}, m_{i'j})/a \\ v(M_a) &= v(m_{i|b})/a + (a-1)cov(m_{i|b}, m_{i'|b})/a \\ cov(m_{i|b}, M_a) &= v(m_{i|b})/a + (a-1)cov(m_{i|b}, m_{i'|b})/a \\ cov(m_{a+1|b}, M_a) &= cov(m_{i|b}, m_{i'|b}). \end{aligned} \quad (5)$$

De varianties en covarianties in de eerste twee regels zijn hetzelfde voor alle i en i' .

3. Kwadraten-sommen van de hoofdeffecten

De kwadraten-som voor het effect A met a niveaus is gedefinieerd als

$$A_a = bn \sum_{i=1}^a (m_{i|b} - M_a)^2. \quad (6)$$

De verdeling wordt afgeleid door inductie over a . Voor $a = 2$ geldt $A_2 = 2bn[(m_{1|b} - m_{2|b})/2]^2$ en uit (5) volgt $v[(m_{1|b} - m_{2|b})/2] = 2[v(m_{i|b}) - cov(m_{i|b}, m_{i'|b})]/4 = (n\sigma_\gamma^2 + \sigma_\epsilon^2)/2bn =$

$\sigma_A^2/2bn$. Dus onder de hypothese $H : \mu_{1|b} = \mu_{2|b}$ levert dit op dat $(m_{1|b} - m_{2|b})/2 \sim N(0, \sigma_A^2/2bn)$ en de verdeling van $g = (2bn)^{1/2}(m_{1|b} - m_{2|b})/2\sigma_A$ is $N(0, 1)$. Daarom geldt $g^2 = A_2/\sigma_A^2 \sim \chi_1^2 = \chi_{a-1}^2$ voor $a = 2$.

Nu zal aangetoond worden dat $A_{a+1}/\sigma_A^2 \sim \chi_a^2$ als $A_a/\sigma_A^2 \sim \chi_{a-1}^2$. Van Searle en Pukelsheim gebruiken we

$$\begin{aligned} A_{a+1} &= A_a + abn(m_{a+1|b} - M_a)^2/(a+1) \\ &= A_a + \delta_{a+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Uit (5) volgt

$$\begin{aligned} v(m_{a+1|b} - M_a) &= v(m_{a+1|b}) + v(M_a) - 2cov(m_{a+1|b}, M_a) \\ &= v(m_{i|b}) + v(m_{i'|b})/a + (a-1)cov(m_{i|b}, m_{i'|b})/a - 2cov(m_{i|b}, m_{i'|b}) \\ &= (a+1)[v(m_{i|b}) - cov(m_{i|b}, m_{i'|b})]/a \\ &= (a+1)\sigma_A^2/abn. \end{aligned} \quad (8)$$

Daarom geldt onder $H : \mu_{1|b} = \mu_{2|b} = \dots = \mu_{a+1|b}$ dat $m_{a+1|b} - M_a \sim N(0, (a+1)\sigma_A^2/abn)$ en $\delta_{a+1}/\sigma_A^2 \sim \chi_1^2$. Uit (6) en (7) blijkt dat A_a en δ_{a+1} onafhankelijk zijn onder multivariate normaliteit van de $m_{i|b}$ en $m_{a+1|b}$ als $cov(m_{i|b} - M_a, m_{a+1|b} - M_a) = 0$ for all i . Nu geeft (5)

$$\begin{aligned} cov(m_{i|b} - M_a, m_{a+1|b} - M_a) &= cov(m_{i|b}, m_{a+1|b}) - cov(m_{i|b}, M_a) \\ &\quad - cov(M_a, m_{a+1|b}) + cov(M_a, M_a) \\ &= cov(m_{i|b}, m_{i'|b}) - v(m_{i|b})/a - (a-1)cov(m_{i|b}, m_{i'|b})/a \\ &\quad - cov(m_{i|b}, m_{i'|b}) + v(m_{i|b})/a + (a-1)cov(m_{i|b}, m_{i'|b})/a \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Dit geeft als resultaat dat $A_{a+1}/\sigma_A^2 = A_a/\sigma_A^2 + \delta_{a+1}/\sigma_A^2 \sim \chi_a^2$.

Het is instructief deze afleiding te vergelijken met die van Searle en Pukelsheim voor de eenwegs klassificatie met een vast hoofdeffect. Daar is de onafhankelijkheid van A_a en δ_{a+1} het resultaat van $cov(m_{a+1|b}, m_{a|b}) = 0$ en van $cov(m_{i|b}, M_a) = v(M_a)$ voor $i \leq a$. In het hier behandelde model zijn A_a en δ_{a+1} onafhankelijk omdat zowel $v(m_{i|b})$ als $cov(m_{ij}, m_{i'j})$ hetzelfde zijn voor alle i en i' . Daardoor vallen termen tegen elkaar weg in (9), iets wat onduidelijk blijft in bewijzen die matrix algebra gebruiken. De univariate steekproefvariantie kan natuurlijk ook gezien worden als een kwadratsom van variabelen waarvan alle (co)varianties hetzelfde zijn.

De kwadratensom voor B is $B_b = an \sum_{j=1}^b (m_{j|a} - M_b)^2$. Verwisseling van a en b in (7) geeft de overeenkomstige formule voor B_{b+1} , en σ_B^2 wordt $an\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$. Omdat $m_{b+1|a}$ en $m_{b|a}$ onafhankelijk zijn met dezelfde variantie, ligt de overeenkomst met de door Searle en Pukelsheim behandelde eenwegs klassificatie en met de univariate steekproefvariantie voor de hand.

4. Interactie kwadratensom

De interactie kwadratensom is gedefinieerd als

$$\begin{aligned}
 AB_{ab} &= n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (m_{ij} - m_{i|b} - m_{j|a} + M_{ab})^2 \\
 &= n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b m_{ij}^2 - bn \sum_{i=1}^a m_{i|b}^2 - an \sum_{j=1}^b m_{j|a}^2 + abn M_{ab}^2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

De interactie is alleen schatbaar als $a \geq 2$ en $b \geq 2$ (en natuurlijk als $n \geq 2$). De berekeningen beginnen daarom met $a = 2$ en $b = 2$. Omdat zowel het aantal rijen als het aantal kolommen kan variëren, zal de inductie in dit geval gaan over a en b afzonderlijk. Daarbij wordt verondersteld dat het resultaat voor AB_{22} ook geldt voor willekeurige a en b . Op grond daarvan worden vervolgens de chi-kwadraat eigenschappen van $AB_{a(b+1)}$ en $AB_{(a+1)b}$ berekend.

Definieer $q_{ij} = m_{ij} - m_{i|b} - m_{j|a} + M_{ab}$. Dan geldt voor $a = 2$ en $b = 2$ dat $q_{11} = q_{22} = -q_{12} = -q_{21}$ en (10) kan geschreven worden als $n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q_{ij}^2 = 4nq^2$ voor $q = q_{11}$. De variantie van q wordt, door (5) en (10), $v(q) = v[(m_{11} - m_{21})/4] + v[(m_{12} - m_{22})/4] = [v(m_{ij}) - \text{cov}(m_{ij}, m_{i'j'})]/4 = [n\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2]/4n = \sigma_{AB}^2/4n$. Voor $h = (4n)^{1/2}q/\sigma_{AB}$ geldt dan dat $h \sim N(0, 1)$ omdat $E(q) = 0$, en dus $h^2 = A_{22}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_1^2 = \chi_{(a-1)(b-1)}^2$ voor $a = 2$ en $b = 2$.

Voor de inductie zijn uitdrukkingen voor $AB_{a(b+1)}$ en $AB_{(a+1)b}$ analoog aan A_{a+1} nodig. Voor hun berekening (die ongetwijfeld wel eens eerder gedaan is) ontleen we aan Searle en Pukelsheim

$$m_{i|b+1} = m_{i|b} + (m_{i(b+1)} - m_{i|b})/(b+1) \tag{11}$$

$$M_{a(b+1)} = M_{ab} + (m_{b+1|a} - M_{ab})/(b+1). \tag{12}$$

Substitutie van $b+1$ voor b in de tweede vorm van (10) en gebruik van (11) en (12) geeft

$$\begin{aligned}
 AB_{a(b+1)} &= n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b m_{ij}^2 - an \sum_{j=1}^b m_{j|a}^2 \\
 &\quad + n \sum_{i=1}^a m_{i(b+1)}^2 - (b+1)n \sum_{i=1}^a m_{i|b+1}^2 \\
 &\quad - an m_{b+1|a}^2 + a(b+1)n M_{a(b+1)}^2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Substitutie van (11) in de tweede regel van (13) geeft

$$\begin{aligned}
 & n \sum_{i=1}^a \{m_{i(b+1)}^2 - [(b+1)m_{i|b}^2 + 2m_{i|b}m_{i(b+1)} - 2m_{i|b}^2 + (m_{i(b+1)} - m_{i|b})^2/(b+1)]\} \\
 &= -n \sum_{i=1}^a [bm_{i|b}^2 - (m_{i(b+1)} - m_{i|b})^2 + (m_{i(b+1)} - m_{i|b})^2/(b+1)] \\
 &= -bn \sum_{i=1}^a [m_{i|b}^2 - (m_{i(b+1)} - m_{i|b})^2/(b+1)], \tag{14}
 \end{aligned}$$

substitutie van (12) in de derde regel van (13) geeft

$$\begin{aligned}
 & -anm_{b+1|a}^2 + an[(b+1)M_{ab}^2 + 2M_{ab}m_{b+1|a} - 2M_{ab}^2 + (m_{b+1|a} - M_{ab})^2/(b+1)] \\
 &= abnM_{ab}^2 - an[(m_{b+1|a} - M_{ab})^2 - (m_{b+1|a} - M_{ab})^2/(b+1)] \\
 &= abnM_{ab}^2 - abn(m_{b+1|a} - M_{ab})^2/(b+1), \tag{15}
 \end{aligned}$$

en na samenvoeging van (13), (14) en (15) volgt tenslotte

$$\begin{aligned}
 AB_{a(b+1)} &= AB_{ab} + \sum_{i=1}^a bn(m_{i(b+1)} - m_{i|b})^2/(b+1) \\
 &\quad - abn(m_{b+1|a} - M_{ab})^2/(b+1). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Voor $z_i = (m_{i(b+1)} - m_{i|b})/(b+1)^{1/2}$ en $m_{z|a} = \sum_{i=1}^a z_i/a$ kan dit geschreven worden als

$$\begin{aligned}
 AB_{a(b+1)} &= AB_{ab} + bn \sum_{i=1}^a (z_i - m_{z|a})^2 \\
 &= AB_{ab} + \delta_{a(b+1)}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Omdat $m_{i(b+1)}$ en $m_{i|b}$ onafhankelijk zijn, krijgen we

$$\begin{aligned}
 v(z_i) &= [v(m_{i(b+1)}) + v(m_{i|b})]/(b+1) \\
 &= [v(m_{ij}) + v(m_{ij})/b]/(b+1) = v(m_{ij})/b
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 cov(z_i, z_{i'}) &= [cov(m_{i(b+1)}, m_{i'(b+1)}) + cov(m_{i|b}, m_{i'|b})]/(b+1) \\
 &= [cov(m_{ij}, m_{i'j}) + cov(m_{ij}, m_{i'j})/b]/(b+1) \\
 &= cov(m_{ij}, m_{i'j})/b.
 \end{aligned}$$

Vergelijking met (5) laat zien dat $v(z_i)$ en $cov(z_i, z_{i'})$ hetzelfde zijn als $v(m_{i|b})$ en $cov(m_{i|b}, m_{i'|b})$. Dus is $\delta_{a(b+1)}$ equivalent aan (6) en daarmee $\delta_{a(b+1)}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{a-1}^2$, voor $\sigma_A^2 = \sigma_{AB}^2$. Omdat $m_{i(b+1)}$ en $m_{b+1|a}$ onafhankelijk zijn van AB_{ab} , volgt onafhankelijkheid van AB_{ab} en $\delta_{a(b+1)}$ uit

$$\begin{aligned}
 & cov(-m_{i|b} + M_{ab}, m_{ij} - m_{i|b} - m_{j|a} + M_{ab}) \\
 &= cov(-m_{i|b} + M_{ab}, m_{ij} - m_{j|a}) + v(-m_{i|b} + M_{ab}) \\
 &= -v(m_{ij} - m_{j|a})/b + v(m_{ij} - m_{j|a})/b = 0,
 \end{aligned}$$

wat niet afhangt van de covariantiestructuur (5). Daarom geldt dat $AB_{a(b+1)}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{(a-1)b}^2$. Uit de onafhankelijkheid van $m_{i|b} - M_{ab}$ en het interactie-effect volgt ook de onafhankelijkheid van A_a en AB_{ab} .

Door verwisseling van a en b en i en j in (16) en (17) krijgen we

$$\begin{aligned} AB_{(a+1)b} &= AB_{ab} + an \sum_{j=1}^b (z_j - m_{z|b})^2 \\ &= AB_{ab} + \delta_{(a+1)b} \end{aligned} \quad (18)$$

voor $z_j = (m_{(a+1)j} - m_{j|a})/(a+1)^{1/2}$ en $m_{z|b} = \sum_{j=1}^b z_j/b$. Omdat de z_j onafhankelijk zijn en

$$\begin{aligned} an v(z_j) &= an[v(m_{(a+1)j}) + v(m_{j|a}) - 2cov(m_{(a+1)j}, m_{j|a})]/(a+1) \\ &= an[v(m_{ij}) + v(m_{ij})/a + (a-1)cov(m_{ij}, m_{i'j})/a - 2cov(m_{ij}, m_{i'j})]/(a+1) \\ &= n\sigma_\gamma^2 + \sigma_e^2 = \sigma_{AB}^2, \end{aligned}$$

volgt dat $\delta_{(a+1)b}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{b-1}^2$. Onafhankelijkheid van $\delta_{(a+1)b}$ en AB_{ab} volgt uit

$$\begin{aligned} &cov(m_{(a+1)j} - m_{j|a} - m_{a+1|b} + M_{ab}, m_{ij} - m_{i|b} - m_{j|a} + M_{ab}) \\ &= cov(m_{(a+1)j} - m_{j|a}, m_{ij} - m_{i|b}) - a cov(m_{(a+1)j} - m_{j|a}, m_{ij} - m_{i|b})/a \\ &\quad - cov(m_{a+1|b} - M_{ab}, m_{ij} - m_{i|b}) + a cov(m_{a+1|b} - M_{ab}, m_{ij} - m_{i|b})/a \\ &= 0, \end{aligned}$$

wat wel afhangt van de covariantiestructuur (5) (zoals ook de onafhankelijkheid van B_b en AB_{ab}). Dus $AB_{(a+1)b}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{a(b-1)}^2$, en omdat ook $AB_{a(b+1)}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{(a-1)b}^2$ volgt daaruit tenslotte dat $AB_{ab}/\sigma_{AB}^2 \sim \chi_{(a-1)(b-1)}^2$.

De formule voor het aantal vrijheidsgraden voor AB_{ab} kan expliciet berekend worden door herhaalde toepassing van (17) en (18). Uit (18) geeft het toevoegen van n_r rijen aan de 2×2 klassificatie $1 + n_r = a - 1$ vrijheidsgraden omdat $a = n_r + 2$, en uit (17) geeft het vervolgens toevoegen van n_c kolommen $a - 1 + n_c(a - 1) = (a - 1)(b - 1)$ vrijheidsgraden omdat $b = n_c + 2$.

Omdat A_a en AB_{ab} onafhankelijk zijn en $\sigma_A^2 = \sigma_{AB}^2$, kan $F = [(A_a(a - 1)(b - 1))/[AB_{ab}(a - 1)]]$ gebruikt worden voor de toets dat A geen effect heeft.

5. Kwadratensom van de fouten

De kwadratensom van de fouten is $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - m_{ij})^2$. Zoals opgemerkt door Searle en Pukelsheim, kan $\sum_{k=1}^n (y_{ijk} - m_{ij})^2$ opgevat worden als een eenwegs klassificatie kwadratensom met een observatie in elke klasse en daarom $\sum_{k=1}^n (y_{ijk} - m_{ij})^2/\sigma_e^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Voor verschillende j zijn de observaties onafhankelijk, maar ook, voor $i \neq i'$, $cov(y_{ijk} - m_{ij}, y_{i'jk} - m_{i'j}) = cov[(n-1)e_{ijk}/n, (n-1)e_{i'jk}/n] = 0$ en dus $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - m_{ij})^2/\sigma_e^2 \sim \chi_{ab(n-1)}^2$.

6. Huynh-Feldt voorwaarden

De chi-kwadraat eigenschappen van A_a volgden uit (8) and (9) door te gebruiken dat de covariantiestructuur (5) gelijkheden zoals $\sum_{i=1}^a \text{cov}(m_{a+1|b}, m_{i|b})/a = \text{cov}(m_{i|b}, m_{i'|b})$ tot gevolg heeft. Als (5) niet gebruikt wordt voor zulke vereenvoudigingen, dan laat (9) zien dat de chi-kwadraat verdeling van A_a/σ_A^2 nog steeds zou volgen als

$$\begin{aligned} & \text{cov}(m_{i|b}, m_{a+1|b}) - \sum_{i'=1}^a \text{cov}(m_{i|b}, m_{i'|b})/a \\ & - \sum_{i=1}^a \text{cov}(m_{i|b}, m_{a+1|b})/a + \sum_{i=1}^a \sum_{i'=1}^a \text{cov}(m_{i|b}, m_{i'|b})/a^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

en als, door (7), (8) en $v[(m_{1|b} - m_{2|b})/2] = \sigma_A^2/2bn$,

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= bn[v(m_{1|b}) + v(m_{2|b}) - 2\text{cov}(m_{1|b}, m_{2|b})]/2 \\ &= abn[v(m_{a+1|b}) + \sum_{i=1}^a \sum_{i'=1}^a \text{cov}(m_{i|b}, m_{i'|b})/a^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^a \text{cov}(m_{a+1|b}, m_{i|b})/a]/(a+1) \end{aligned} \quad (20)$$

Omdat het op voorhand niet onmogelijk lijkt dat (19) en (20) ook gelden voor andere covariantiestructuren dan (5), suggereren deze gelijkheden dat (5) mogelijk niet noodzakelijk is voor de chi-kwadraat eigenschappen van A . Huynh en Feldt (1970) hebben inderdaad laten zien dat meer algemene noodzakelijke en voldoende voorwaarden bestaan waaronder $(b-1)A_a/AB_{ab}$ een F-verdeling heeft of, wat hetzelfde is, waaronder A_a/σ_A^2 en AB_{ab}/σ_{AB}^2 onafhankelijke chi-kwadraat verdelingen hebben met $\sigma_A^2 = \sigma_{AB}^2$. De niveaus van A worden nu aangeduid met i, j . Dan kan, met $\text{cov}(m_{i|b}, m_{j|b}) = \sigma_{ij}$, $v(m_{i|b}) = \sigma_{ii}$, en $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$, de basisvorm van hun noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor a niveaus geschreven worden als

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i.} + \sigma_{.j} - \sigma_{..} + \lambda(\delta_{ij} - 1/a),$$

waarbij een punt betekent dat het gemiddelde is berekend over het subscript dat door de punt is vervangen. Een equivalente voorwaarde is $v_{ij} = \text{var}(m_{i|b} - m_{j|b}) = 2\lambda$ voor alle $i \neq j$, waaruit volgt dat λ gelijk is aan het verschil tussen de gemiddelde variantie en de gemiddelde covariantie.

Volgens Huynh en Feldt hebben vele auteurs de indruk gewekt dat de covariantiestructuur (5) niet alleen voldoende maar ook noodzakelijk is voor de chi-kwadraat eigenschappen van A_a voor $a > 2$. Afleidingen van de verdeling waren blijkbaar niet al te doorzichtig. In tegenstelling daarmee suggereert de hier toegepaste methode tenminste dat de voorwaarden ook geformuleerd kunnen worden zoals in (19) en (20). Bij de hier gebruikte methode volgen de Huynh-Feldt voorwaarden inderdaad uit (19) en (20). Dat wordt hier

in detail getoond voor het hoofdeffect A . De berekeningen voor het interactie-effect zijn weliswaar ingewikkelder, maar voegen niet iets wezenlijk nieuws toe. Ze zullen daarom alleen worden geschetst.

Het is handig om $M_a = (a+1)M_{a+1}/a - m_{a+1|b}/a$ te gebruiken in de berekeningen. Daardoor wordt (20)

$$2bn v[(m_{1|b} - m_{2|b})/2] = abn v[(a+1)(m_{a+1|b} - M_{a+1})/a]/(a+1),$$

of

$$v_{12} = 2(a+1)[v(m_{a+1|b} - M_{a+1})]/a$$

en (19) kan herschreven worden als

$$\text{cov}(m_{i|b} - M_{a+1}, m_{a+1|b} - M_{a+1}) = -v(m_{a+1|b} - M_{a+1})/a.$$

De kwadraten som (6) hangt niet af van de nummering van de niveaus van A . Daarom is ook de nummering van de niveaus van (7) willekeurig en kunnen deze twee voorwaarden voor alle $i \neq j \neq k$ geschreven worden als

$$\sigma_{ii} + \sigma_{jj} - 2\sigma_{ij} = 2(a+1)(\sigma_{kk} + \sigma_{..} - 2\sigma_{.k})/a, \quad (21)$$

en voor alle $i \neq j$ als

$$\sigma_{ij} - \sigma_{i.} - \sigma_{.j} + \sigma_{..} = (2\sigma_{.j} - \sigma_{jj} - \sigma_{..})/a. \quad (22)$$

Door de symmetrie van de covarianties en de willekeurige nummering van de niveaus kan (22) ook geschreven worden als

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma_{i.} - \sigma_{.j} + \sigma_{..} &= (2\sigma_{i.} - \sigma_{ii} - \sigma_{..})/a, \\ \sigma_{ik} - \sigma_{i.} - \sigma_{.k} + \sigma_{..} &= (2\sigma_{.k} - \sigma_{kk} - \sigma_{..})/a \\ &= (2\sigma_{i.} - \sigma_{ii} - \sigma_{..})/a \end{aligned} \quad (23)$$

voor $i \neq j \neq k$. Daarom is het rechterlid van (22), en dus ook het rechterlid van (21), hetzelfde voor, respectievelijk, alle j en k . De Huynh-Feldt voorwaarden kunnen nu worden afgeleid uit (21)–(23) door te gebruiken dat het rechterlid van deze vergelijkingen constant is. De voorwaarden kunnen echter ook afgeleid worden door alleen (21) of (22) te gebruiken. Hier wordt (21) gebruikt, omdat (21) als volgt kan worden verkregen uit (23). Door het rechterlid van de laatste twee regels van (23) aan elkaar gelijk te stellen en σ_{ii} daaruit op te lossen,

$$\sigma_{ii} = 2\sigma_{i.} + \sigma_{kk} - 2\sigma_{.k}$$

en dus ook

$$\sigma_{jj} = 2\sigma_{.j} + \sigma_{kk} - 2\sigma_{.k}.$$

Hieruit volgt

$$2(\sigma_{i.} + \sigma_{.j}) = \sigma_{ii} + \sigma_{jj} - 2\sigma_{kk} + 4\sigma_{.k}.$$

Substitutie voor $2(\sigma_i + \sigma_j)$ in de som van (22) en de eerste regel van (23) en herschikken van termen geeft tenslotte (21).

De Huynh-Feldt voorwaarden zullen nu afgeleid worden uit (21). Voor $a + 1 > 3$ is het eenvoudig in te zien dat (21) vereist, dat v_{ij} hetzelfde is voor alle $i \neq j$. Schrijf (21) als $v_{ij} = s(k)$. Dan geldt $v_{ij} = s(k) = s(k')$ en $v_{ik} = s(j) = s(k')$. Definieer, om dit in het algemeen te laten zien,

$$v_{i.} = \sum_{j \neq i}^{a+1} v_{ij}/a \text{ en } v_{..} = \sum_i^{a+1} v_{i.}/(a+1).$$

Enig rekenwerk laat dan zien dat (21) ook kan worden geschreven als $v_{ij} = 2v_{k.} - v_{..}$. Deze gelijkheid moet gelden voor alle $k \neq i, j$ en dus kunnen we ook schrijven

$$v_{ij} = 2 \sum_{k \neq i, j} v_{k.}/(a-1) - v_{..}$$

Omdat

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} v_{k.}/a(a-1) &= \sum_{j \neq i} ((a+1)v_{..} - v_{i.} - v_{j.})/a(a-1) \\ &= (a(a+1)v_{..} - av_{i.} - ((a+1)v_{..} - v_{i.}))/a(a-1) \\ &= (a-1)((a+1)v_{..} - v_{i.})/a(a-1) \end{aligned}$$

geldt ook

$$\begin{aligned} v_{i.} &= 2 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} v_{k.}/a(a-1) - v_{..} \\ &= 2 \sum_{j \neq i} v_{j.}/a - v_{..} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} v_{i.} + v_{i.}/(a+1) &= 2 \sum_{j \neq i} v_{j.}/a - \sum_{j \neq i} v_{j.}/(a+1) \\ (a+2)v_{i.}/(a+1) &= (a+2) \sum_{j \neq i} v_{j.}/a(a+1) \\ av_{i.} &= \sum_{j \neq i} v_{j.} \\ v_{i.} &= v_{..} \end{aligned}$$

Door de willekeurige nummering volgt ook $v_{k.} = v_{..}$ en daardoor $v_{ij} = 2v_{k.} - v_{..} = v_{..}$ voor alle $i \neq j$.

Deze gelijkheid kan bijvoorbeeld als volgt worden herleid tot de basisvorm van de Huynh-Feldt voorwaarden. Door de termen in $v_{ij} = v_{..}$ te herschikken krijgen we $\sigma_{ii} + \sigma_{jj} = v_{..} + 2\sigma_{ij}$, en omdat $\sum_i^{a+1} \sum_{j \neq i}^{a+1} (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) = 2a \sum_i^{a+1} \sigma_{ii}$ leidt dit tot

$$\begin{aligned} 2a \sum_i^{a+1} \sigma_{ii} &= a(a+1)v_{..} + 2 \sum_i^{a+1} \sum_{j \neq i}^{a+1} \sigma_{ij} \\ &= a(a+1)v_{..} + 2 \sum_i^{a+1} \sum_j^{a+1} \sigma_{ij} - 2 \sum_i^{a+1} \sigma_{ii} \end{aligned}$$

en dus tot

$$\sum_i^{a+1} \sigma_{ii} = a v_{..}/2 + (a+1)\sigma_{..} \quad (24)$$

Uit $v_{ij} = v_{..}$ en (21) volgt ook

$$\begin{aligned} a\sigma_{ii} &= av_{..} + 2 \sum_{j \neq i}^{a+1} \sigma_{ij} - \sum_{j \neq i}^{a+1} \sigma_{jj} \\ &= av_{..} + 2(a+1)\sigma_{i.} - \sigma_{ii} - \sum_j^{a+1} \sigma_{jj} \end{aligned}$$

en dan vanwege (24)

$$\begin{aligned} (a+1)\sigma_{ii} &= 2(a+1)\sigma_{i.} - (a+1)\sigma_{..} + a v_{..}/2, \\ \sigma_{ii} &= 2\sigma_{i.} - \sigma_{..} + a v_{..}/2(a+1). \end{aligned}$$

Substitutie van het rechterlid van de laatste vergelijking in (21) geeft

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i.} + \sigma_{.j} - \sigma_{..} - v_{..}/2(a+1), i \neq j.$$

De laatste twee vergelijkingen vormen de basisvorm van de Huynh-Feldt voorwaarden met, uit (20), $v_{..} = 2\lambda = 2\sigma_A^2/bn$.

De berekeningen voor het interactie-effect gaan op soortgelijke wijze. De chi-kwadraat eigenschap van $\delta_{a(b+1)}$ vraagt dezelfde voorwaarden als (19) en (20), omdat de z_i in $\delta_{a(b+1)}$ dezelfde covariantiestructuur hebben als de $m_{i|b}$ in A_a . Eerder bleek al, dat A_{ab} en $\delta_{a(b+1)}$ onafhankelijk zijn ongeacht de covariantiestructuur. Tenslotte moet σ_A^2 in (20) gelijk zijn aan de corresponderende term in de 2x2 klassificatie. Voor de 2x2 klassificatie moet gelden $\sigma_q^2 = \sigma_*^2/4n$. Daaruit volgt dat $v_{12} = 2\sigma_*^2/n$, waarbij v_{12} nu de (co)varianties bevat van de celgemiddelden. De gelijkheid $\sigma_A^2 = \sigma_*^2$ volgt dan uit $v[(m_{1|b} - m_{2|b})] = v_{12}/b$.

Doordat de z_j in $\delta_{(a+1)b}$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn, is de gelijkheid $v(z_j) = \sigma_*^2/an$ voldoende voor de chi-kwadraat verdeling van $\delta_{(a+1)b}$. Uitwerken van $v(z_j)$ en gelijkstellen van $an v(z_j)$ aan $n v_{12}/2$ geeft de gelijkheid (21), waarin de σ_{ij} verwijzen naar (co)varianties van celgemiddelden (dat wil zeggen, het linker- en rechterlid van (21))

is vermenigvuldigd met b). Voor onafhankelijkheid van $\delta_{(a+1)b}$ en A_{ab} is nodig dat de covarianties van z_j en de interactiecontrasten in (10) gelijk zijn aan nul. Deze eis leidt tot (22).

Hoewel de berekeningen voor het interactie-effect langs dezelfde lijnen verlopen, vestigen ze misschien wel meer de aandacht op kenmerken van de voorwaarden voor andere soorten klassificaties. De covariantiestructuren van de rijen van de gekruiste tweewegs klassificatie zijn, op een vermenigvuldigingsfactor na, gelijk aan de covariantiestructuur van het hoofdeffect A . Anders gezegd, hoewel de nummering van de niveaus van de rijen en kolommen willekeurig is, moet deze nummering wel voor elke rij en kolom hetzelfde blijven als de niveaus eenmaal genummerd zijn. Voor geneste klassificaties is dat niet zo. Als bijvoorbeeld de gekruiste tweewegs klassificatie genest is binnen een derde factor, dan mogen de σ_{ij} in (22) verschillen voor de verschillende tweewegs klassificaties. Voor sommige toetsingen hoeven dan alleen de λ 's hetzelfde te zijn.

Deze berekeningen laten zien, dat andere covariantiestructuren dan (5) ook kunnen leiden tot chi-kwadraat eigenschappen van de kwadratensommen. Ze laten niet zien dat de Huynh-Feldt voorwaarden noodzakelijk zijn, maar ze verlenen wel een tamelijk elementaire betekenis aan deze voorwaarden.

Literatuur

- Graybill, F.A. (1961), *An Introduction to Linear Statistical Models (Vol. 1)*, New York: McGraw-Hill.
- Harville, D.A. (1978), Alternative formulations and procedures for the two-way mixed model, *Biometrics*, 34, 441–453.
- Hocking, R.R. (1973), A discussion of the two-way mixed model, *The American Statistician*, 27, 148–152.
- Huynh, H., en Feldt, L.S. (1970), Conditions under which the mean square ratios in repeated measurements have exact F-distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1582–1589.
- Imhof, J.P. (1962). Testing the hypothesis of no fixed main-effects in Scheffé's mixed model, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 3, 1085–1095.
- Nelder, J.A. (1977). A reformulation of linear models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 140, 48–77.
- Nelder, J.A. (1994). The statistics of linear models: back to basics, *Statistics and Computing*, 4, 221–234.
- Samuels, M.L., Casella, G., en McCabe, G.P. (1991), Interpreting blocks and random factors, *Journal of the American Statistical Association*, 86, 798–821.
- Scheffé, H. (1959), *The Analysis of Variances*, New York: Wiley.
- Searle, S.R. (1971), *Linear Models*, New York: John Wiley.
- Searle, S.R. (1987), *Linear Models for Unbalanced Data*, New York: John Wiley.
- Searle, S.R., en Pukelsheim, F. (1985), Establishing χ^2 properties of sums of squares using induction, *The American Statistician*, 39, 301–303.

Stigler, S.M. (1984), Kruskal's proof of the joint distribution of $\overline{X}$ and s^2 , *The American Statistician*, 38, 134–135.

Zehna, P.W. (1991), On Proving That $\overline{X}$ and S^2 are Independent, *The American Statistician*, 45, 121–122.

Ontvangen: 7 januari 2000

Geaccepteerd: 20 april 2000