

ENKELE NIEUWE PROEFSHEMA'S MET KWANTITATIEVE FACTOREN

Dr. Ir. P.M. Upperman*

Samenvatting

In eerste instantie wordt een aantal bestaande proefschema's besproken. Vervolgens wordt het gebruik van de nieuwe schema's uitgelegd en aangetoond dat deze enkele voordelen bevatten boven degenen die uit de literatuur bekend zijn.

Het gebruik van de nieuwe proefschema's wordt met een drietal voorbeelden toegelicht. Ze tonen aan dat deze proefschema's kunnen worden gebruikt om kwaliteits- en procesverbeteringen te realiseren, omdat het gebruik ervan tot betere instellingen van procesvariabelen leidt. Een belangrijk deel van dit artikel is ontleend aan Upperman (1993).

1. Inleiding.

1.1 Enkele opmerkingen vooraf.

Gedurende de laatste jaren raken onderzoekers en procestechnologen er in toenemende mate van overtuigd dat het toepassen van statistische principes bij het opzetten en analyseren van experimenten in belangrijke mate bijdraagt tot de kwaliteit van hun werk.

Zij kunnen nu uit verscheidene proefopzetten, die in de statistische literatuur te vinden zijn, kiezen. *Steinberg and Hunter* (1984) geven een uitstekend overzicht.

Een van de belangrijke principes van proefopzetten is de aanpak om gelijktijdig een aantal factoren in één experiment te onderzoeken. Juist door deze werkwijze toe te passen ontstaat een goed beeld van het desbetreffende fysische of chemische model.

Omdat de omvang van een experiment snel toeneemt bij een groter wordend aantal niveaus en factoren, is het noodzakelijk het aantal behandelingen of experimentele eenheden te beperken ten einde tijd te besparen en de kosten te verminderen.

Daarom zijn er een groot aantal proefopzetten ontwikkeld waarin slechts een deel van alle mogelijke behandelingen wordt gebruikt. Een bijkomstig voordeel van deze schema's is dat ze kunnen worden gebruikt om de waarneming, die bij een niet in het experiment opgenomen behandeling behoort, te voorspellen.

Een aantal bekende proefschema's zullen worden besproken in de paragrafen 1.2, 1.3 en 1.4. Paragraaf 1.5 geeft uitleg over de nieuwe proefschema's voor kwantitatieve factoren die in dit artikel zullen worden besproken.

*Upperman Quality Engineering Consultancy
Burg. de Kockstraat 113
7861 AC Oosterhesselen
Tel. 0524-581964

1.2. Hoofdeffect-schema's.

Een belangrijke groep proefopzetten met een beperkt aantal behandelingen is de klasse van hoofdeffect-schema's. Deze maken het mogelijk een relatief groot aantal hoofdeffecten te schatten bij gebruikmaking van een klein aantal experimentele eenheden. Hierbij wordt er van uitgegaan dat er geen interacties zijn of, indien ze niet gelijk aan nul zijn, de grootte ervan klein is ten opzichte van de hoofdeffecten. Deze proefschema's zijn uitermate geschikt om uit een groot aantal mogelijke factoren de belangrijkste te selecteren. Ze staan in de Angelsaksische literatuur bekend onder de naam "screening designs".

Addelman (1962a) bespreekt dit type waarin factoren vanaf 2 t/m 9 niveaus kunnen hebben.

Plackett and Burman (1946) ontwikkelden een groep hoofdeffect-schema's voor factoren met twee niveaus. Het zijn verzadigde schema's omdat het aantal te schatten parameters gelijk is aan het aantal experimentele eenheden. Het aantal experimentele eenheden ervan, nl. N , dient een veelvoud van 4 te zijn. Deze schema's kunnen maximaal $(N - 1)$ factoren onderzoeken.

Taguchi (1987) is een groot voorstander van hoofdeffect-schema's. Hij noemt ze orthogonale groepen (orthogonal arrays) en hij maakt er in ruime mate gebruik van. Sommige zijn ook geschikt om een beperkt aantal interacties te schatten. Taguchi geeft een groot aantal interessante voorbeelden, maar jammer genoeg zijn de erbij behorende berekeningen moeilijk te begrijpen, omdat ze niet op een specifiek wiskundig model van de waarnemingen betrekking hebben.

Een zeer belangrijke klasse van hoofdeffect-schema's vormen de Latijnse, Grieks-Latijnse en hyper-Grieks-Latijnse vierkanten. Dit zijn proefschema's met k^2 experimentele eenheden, waarmee maximaal $(k+1)$ factoren elk met k niveaus kunnen worden onderzocht.

Box, Hunter and Hunter (1978), *Cochran and Cox* (1957), *Johnson and Leone* (1964), *Montgomery* (1976), *Upperman* (1974), *Upperman en Dévény* (1974) geven veel voorbeelden van deze proefopzetten. Laatstgenoemde behandelen een interessante toepassing van een hoofdeffect-schema dat uit 5 orthogonale Latijnse vierkanten bestaat. Ze werden gebruikt om een kwaliteitsprobleem in een gecompliceerd productieproces met succes op te lossen.

Hoofdeffect-schema's zijn echter niet altijd geschikt, omdat interacties belangrijke elementen van de te onderzoeken modellen kunnen zijn. Daarom bespreken we in de volgende paragraaf een aantal proefopzetten, waarmee hoofdeffecten en interacties kunnen worden geschat.

1.3. Schema's waarmee alle hoofdeffecten en twee-factor-interacties kunnen worden geschat.

1.3.1. Fracties van 2^n schema's

Kemphorne (1979), *Box and Hunter* (1961a, 1961b) en *Montgomery* (1976) geven de theoretische achtergrond voor het construeren van 2^n schema's. *Kemphorne* (1979) en *Montgomery* (1976) gebruiken zogenaamde lineaire functies voor dit doel.

De boeken van *Cochran and Cox* (1957), *McLean and Anderson* (1984), *Statistical Engineering Laboratory* (1957) en *Upperman* (1974) bevatten een groot aantal fracties van 2^n schema's, waarmee alle hoofdeffecten en twee-factor-interacties, die bij de in de proef opgenomen factoren behoren, kunnen worden geschat.

De boeken van *Cochran and Cox* (1957), *Upperman* (1974) en *Box, Hunter and Hunter* (1978) bevatten veel landbouwkundige en industriële voorbeelden. *Addelman* (1961) geeft ook fracties van 2^n schema's.

Hoewel deze enige correlatie introduceren tussen sommige schattingen van de effecten, maken ze het mogelijk om alle effecten met minder waarnemingen te schatten dan met een orthogonaal schema, d.w.z. een schema waarin alle schattingen van effecten onderling ongecorrleerd zijn, mogelijk is. Het is bijvoorbeeld bekend dat met een $\frac{1}{2}$ herhaling van het 2^7 schema alle hoofdeffecten en twee-factor-interacties kunnen worden geschat. Hiervoor zijn 64 experimentele eenheden nodig. Het schema van Addelman vereist er slechts 48.

Rechtschaffner (1967) geeft een algorithmische om verzadigde schema's voor factoren met 2 niveaus te construeren. Het 2^7 schema bevat bijvoorbeeld 7 hoofdeffecten en 21 twee-factor-interacties. Daarom dienen er afgezien van het gemiddelde, 28 effecten te worden geschat. *Rechtschaffner* gebruikt hiervoor slechts 29 experimentele eenheden of proefseries.

1.3.2. Fracties van 3^m schema's

Cochran and Cox (1957), *Mclean and Anderson* (1984) en *Montgomery* (1976) geven een aantal geschikte schema's. Uitgewerkte voorbeelden worden niet gegeven, maar *Montgomery* (1976) geeft enkele oefeningen met 3^m schema's.

1.3.3. Fracties van $2^n 3^m$ schema's

Connor (1960) geeft de theoretische grondslag van de methoden die worden gebruikt om fracties van $2^n 3^m$ schema's te construeren. Deze methoden werden gebruikt voor de in *Connor and Young* (1961) gegeven proefopzetten. *Mclean and Anderson* (1984) bevatten alle opzetten van *Connor and Young* (1961) en die welke in the *Statistical Engineering Laboratory* (1957) zijn vermeld. *Margolin* (1969b) verschaft een aantal opzetten die veel minder experimentele eenheden bevatten dan de overeenkomstige in *Connor and Young* (1961). *Webb* (1971) geeft een aantal kleine schema's, maar interacties kunnen niet altijd worden geschat. *Upperman* (1991) geeft een voorbeeld van een $2^n 3^m$ schema toegepast op een puntlasexperiment.

1.3.4. Andere fractionele opzetten

Het is verrassend dat er in het verleden weinig aandacht is besteed aan het artikel van *Morrison* (1956). Hierin wordt een methode beschreven, waarmee een $\frac{1}{2}$ herhaling van een factorieel schema kan worden gemaakt, terwijl sommige factoren meer dan drie niveaus hebben. Alle twee-factor-interacties kunnen worden geschat. In het artikel worden enkele numerieke voorbeelden gegeven. Eén ervan is een $\frac{1}{2}$ herhaling van een $2^3 \times 3 \times 5$ proefopzet.

1.4. Proefopzetten voor kwantitatieve factoren

Er zijn veel schema's van het bovengenoemde type ontwikkeld. Ze zijn erg "zuinig" wat betreft het aantal benodigde experimentele eenheden. Dit is des te opmerkelijker omdat vele ervan, zoals de opzetten voor zogenaamde responsieoppervlakken, wel 5 niveaus voor elke factor gebruiken.

Artikelen die responsieoppervlakken behandelen, werden geschreven door *Box and Draper* (1959, 1963), *Box and Hunter* (1957), *Lucas* (1974), *Welch* (1984) en *Myers, Khuri and Carter* (1988). *Box and Behnken* (1960), *Hoke* (1974), *Mitchell and Bayne* (1978) en *Rechtschaffner* (1967) bespreken schema's voor kwantitatieve factoren met drie niveaus. De proefopzetten van *Box and Behnken* voor 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 of 16 factoren worden vaak in praktische toepassingen gebruikt.

Box and Draper (1974) bespreken opzetten waarin geen enkele factor aequidistante niveaus heeft. Dit kan in praktische toepassingen een nadeel zijn.

Er zijn verscheidene boeken waarin responsieoppervlakken worden besproken zoals *Box, Hunter and Hunter* (1978), *Box and Draper* (1987), *Cochran and Cox* (1957), *Montgomery* (1976) en *Upperman* (1974). Hierin wordt meestal verondersteld dat het model van het responsieoppervlak kan worden beschreven door een polynoom van de tweede graad.

Het boek van *Box and Draper* (1987) is bijzonder waardevol, omdat het veel resultaten bevat, die eerder in artikelen werden beschreven.

1.5. De behoefte aan nieuwe schema's met kwantitatieve factoren

Hoewel een onderzoeker uit een groot aantal soorten proefopzetten met kwantitatieve factoren kan kiezen, heeft onze ervaring in de statistische consultatie aangetoond dat de beschikbare typen niet altijd voldoen.

Daarvoor zijn drie redenen :

- (i) Deze schema's hebben factoren met hetzelfde aantal niveaus, meestal 3 of 5.
- (ii) schema's met factoren die vier equidistante niveaus hebben, zijn niet beschikbaar.
- (iii) het aantal experimentele eenheden is tamelijk groot.

Veel onderzoekers willen wegens beschikbare tijd en kosten slechts kleine experimenten uitvoeren.

Het is daarom dringend noodzakelijk de beschikking te hebben over een groot aantal opzetten met kwantitatieve factoren en met een klein aantal experimentele eenheden.

De onderzoeker wil bovendien een zekere mate van vrijheid wat betreft de keuze van het aantal niveaus per factor.

Het kan soms nodig zijn vier beschikbare equidistante niveaus, bijvoorbeeld vier draaddiameters, in een experiment op te nemen. Het zou dan onverstandig zijn om drie niveaus te gebruiken, omdat deze keuze de onderzoeker zou dwingen om of de kleinste of de grootste diameter weg te laten, hoewel drie niveaus voldoende zouden zijn om lineaire en kwadratische termen van een model te schatten.

Vooral in de beginfase van experimenteel werk, bijvoorbeeld inzake research van micro-processoren, is het gewenst kleine experimenten, waarin een aantal kwantitatieve factoren gelijktijdig worden gevarieerd, uit te voeren en waarbij kennis van hun hoofdeffecten en twee-factor-interacties, vereist wordt.

Om de in dit artikel gegeven proefopzetten te construeren werden een drietal methoden gebruikt. Dezen, alsmede de kentallen waarmee de kwaliteit van de proefschemata's kunnen worden beoordeeld en de gebruikte PC-programmatuur, worden hier niet besproken. De details ervan zijn te vinden in *Upperman* (1993).

De gegeven proefschemata's zijn gemaakt, gegeven de volgende randvoorwaarden :

- (i) Factoren hebben twee, drie of vier niveaus.
- (ii) De factoren met twee niveaus mogen kwalitatief of kwantitatief zijn.

- (iii) De andere factoren hebben drie of vier equidistante niveaus en zijn kwantitatief.
- (iv) Uitsluitend interacties van het type lineair \times lineair kunnen worden geschat en zijn in het wiskundige model van de waarnemingen opgenomen.
- (v) De waarnemingen worden gekarakteriseerd door een onvolledig kwadratisch model.
Zie paragraaf 2.1.

De ontwikkelde proefschemas bezitten een drietal voordelen ten opzichte van andere schemas met kwantitatieve factoren.

- (i) Het aantal niveaus per factor varieert tussen 2 en 4 terwijl veel bestaande schemas, zoals de "central composite designs" van *Cochran and Cox* (1957) en de *Box and Behnken* (1960) schemas, vereisen dat elke factor hetzelfde aantal niveaus heeft.
- (ii) Veel schemas bevatten een factor met 2 niveaus die kwalitatief of kwantitatief mag zijn.
- (iii) Er is een groot aantal kleine schemas beschikbaar.

2. Een $4 \times 2 \times 2 / 8$ proefschema met 8 experimentele eenheden.

Een volledig proefschema waarin drie factoren P, Q en R zijn opgenomen met respectievelijk vier, twee en twee niveaus, bevat $4 \times 2 \times 2 = 16$ experimentele eenheden. Indien echter de factor met vier niveaus kwantitatief is, kan met de helft ervan worden volstaan.

Alle, in dit artikel gegeven proefschemas bevatten 2,3 of 4 niveaus. Elk niveau kennen we een waarde toe zoals in Tabel 1 is aangegeven.

<u>De factor heeft</u>	<u>Waarde van de niveaus</u>
2 niveaus	0, 1
3 niveaus	0, 1, 2
4 niveaus	0, 1, 2, 3

Tabel 1. Waarden van niveaus.

Het reeds genoemde proefschema met 8 experimentele eenheden is gegeven in Tabel 2. We noemen dit een $4 \times 2 \times 2 / 8$ schema, waarbij de cijfers vóór het /-teken het aantal niveaus per factor aangeven, terwijl het getal na het /-teken gelijk is aan het aantal experimentele eenheden dat in het schema is opgenomen.

x_Q	0		1	
x_R	0	1	0	1
x_P				
0		1	5	
1	3			7
2		2	6	
3	4			8

Tabel 2. Een $4 \times 2 \times 2 / 8$ schema.

Een alternatieve manier waarop we dit proefschema kunnen weergeven is gegeven in Tabel 3.

Nr. exp. eenheid	1	2	3	4	5	6	7	8
x_P	0	2	1	3	0	2	1	3
x_Q	0	0	0	0	1	1	1	1
x_R	1	1	0	0	0	0	1	1

Tabel 3. Een $4 \times 2 \times 2 / 8$ schema.

Alle in dit artikel gegeven schema's hebben de in Tabel 3 gegeven structuur waarbij echter de nummers van de experimentele eenheden zijn weggelaten.

2.1. Het wiskundig/statistisch model van de waarnemingen.

Het doel van een proefopzet met kwantitatieve factoren is om het effect van deze factoren x_1, x_2, \dots, x_k op een afhankelijk variabele y te vinden.

We veronderstellen dat de relatie tussen y aan de ene en de x_1, x_2, \dots, x_k aan de andere kant kan worden beschreven door een polynoom van de 2^k graad. Aangezien veel schema's één of meer factoren met slechts twee niveaus bevatten, zoals ook het zojuist besproken $4 \times 2 \times 2 / 8$ schema, zullen we een zogenaamd onvolledig kwadratisch model beschouwen in de zin dat een aantal van d variabelen waarbij meer dan twee niveaus behoren, lineaire en kwadratische termen hebben, maar de resterende $(k - d)$ variabelen hebben slechts lineaire termen omdat ze slechts op twee niveaus zijn ingesteld. Alle $k(k-1)/2$ lineair \times lineaire interacties zijn echter in het model opgenomen.

We zullen daarom het volgende model gebruiken :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i}^2 + \dots + \beta_{dd} x_{di}^2 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1,i} x_{ki} + \varepsilon_i \dots \dots \dots (1)$$

Waarin y_i de responsie en ε_i de experimentele fout voorstelt. De ε_i zijn gemiddeld 0, onderling onafhankelijk normaal verdeeld en hebben een variantie σ^2 .

Verder geldt : $i = 1, 2, \dots, N$, waarbij N gelijk is aan het aantal experimentele eenheden.

Wanneer we in de praktijk een proef uitvoeren komt het er op neer dat we bij elke set van waarden x_1, x_2, \dots, x_k een waarneming y noteren. Dan zijn we in staat om met methoden uit de regressieanalyse, de parameters β van (1) te schatten. Voor de x_1, x_2, \dots, x_k zouden we de waarden zoals bijvoorbeeld in Tabel 3 voor x_P, x_Q en x_R zijn gegeven, kunnen gebruiken. Deze aanpak heeft echter het nadeel dat de geschatte β 's dan meestal een hoge mate van correlatie zullen vertonen, waardoor het lastig wordt de gevonden effecten te interpreteren. Om deze reden zullen we in een aantal gevallen gebruik maken van orthogonale polynomen van de eerste en tweede graad. Dit zijn eenvoudige functies van respectievelijk de eerste en de tweede graad van de x_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Deze aanpak vermindert de correlatie tussen de geschatte β 's in belangrijke mate. Voor de details van deze aanpak verwijzen we naar *Upperman*. (1993). Zie ook het voorbeeld in de volgende paragraaf.

2.2. Een toepassing van het $4 \times 2 \times 2 / 8$ schema.

Om de lichtopbrengst van een bepaald lamptype te bestuderen werd besloten het effect van een drietal factoren P, Q en R te onderzoeken. Deze factoren en bijbehorende niveaus zijn gegeven in Tabel 4.

Factor	Niveaus
P : Hoeveelheid amalgaam	3, 5, 7, 9
Q : Soort gasvulling van de lamp	G1, G2
R : Soort glas	I, II

Tabel 4. Factoren en niveaus van het lampexperiment.

Er kan slechts een klein experiment worden uitgevoerd omdat de lampen kostbaar zijn. Bovendien was er weinig tijd beschikbaar.

Daarom werd besloten een halve herhaling van een $4 \times 2 \times 2$ proefopzet uit te voeren.

De waarnemingsuitkomsten y , de lichtopbrengst van één lamp in elke "cel", zijn gegeven in Tabel 5, die dezelfde structuur heeft als Tabel 2.

x_Q	0		1		
	x_R	0	1	0	1
x_P					
0		32,9	13,9		
1	21,7			5,0	
2		24,2	14,6		
3	24,5			15,9	

Tabel 5. Proefschema van het lampexperiment.

Het model van de waarnemingen kan worden geschreven als :

$$y_i = \beta_0 + \beta_{11} Pq_i + \beta_1 Pl_i + \beta_2 Q_i + \beta_3 R_i + \beta_{12} Pl_i Q_i + \beta_{13} Pl_i R_i + \beta_{23} Q_i R_i + \varepsilon_i \dots \dots (2)$$

waarin :

$$Pq_i = 1 - 3x_{Pi} + x_{Pi}^2$$

$$Pl_i = (-3 + 2x_{Pi}) / \sqrt{5} \quad (3)$$

$$Q_i = -1 + 2x_{Qi}$$

$$R_i = -1 + 2x_{Ri}$$

De termen Pq en Pl komen uit de Engelse taal en betekenen :

Pq : P quadratic

Pl : P linear.

De waarden van de reeds genoemde orthogonale polynomen kunnen worden berekend met de formules (3).

Model (2) heeft dezelfde structuur als (1). Dit is in te zien wanneer de uitdrukkingen (3) worden gesubstitueerd in (2).

In Tabel 6 zijn de waarden x_P , x_Q , x_R en bovendien alle voor de regressieberekeningen noodzakelijke gegevens opgeschreven. De waarden van Pq_i , Pl_i , Q_i en R_i zijn met behulp van (3) berekend.

Nr. exp. eenheid	x_{P_i}	x_{Q_i}	x_{R_i}	Pq_i	Pl_i	Q_i	R_i	Pl_iQ_i	Pl_iR_i	Q_iR_i	y_i
1	0	0	1	1	$-3/\sqrt{5}$	-1	1	$3/\sqrt{5}$	$-3/\sqrt{5}$	-1	32,9
2	2	0	1	-1	$1/\sqrt{5}$	-1	1	$-1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	-1	24,2
3	1	0	0	-1	$-1/\sqrt{5}$	-1	-1	$1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	1	21,7
4	3	0	0	1	$3/\sqrt{5}$	-1	-1	$-3/\sqrt{5}$	$-3/\sqrt{5}$	1	24,5
5	0	1	0	1	$-3/\sqrt{5}$	1	-1	$-3/\sqrt{5}$	$3/\sqrt{5}$	-1	13,9
6	2	1	0	-1	$1/\sqrt{5}$	1	-1	$1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	-1	14,6
7	1	1	1	-1	$-1/\sqrt{5}$	1	1	$-1/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$	1	5,0
8	3	1	1	1	$3/\sqrt{5}$	1	1	$3/\sqrt{5}$	$3/\sqrt{5}$	1	15,9

Tabel 6. Proefopzet lampexperiment en gegevens regressieberekening.

Model (2) bevat 8 parameters β en er zijn ook 8 experimentele eenheden. Er is hier daarom sprake van een "verzadigde proefopzet". Dit betekent dat we uit de gegevens geen schatting van σ^2 kunnen berekenen. Daarom werd gebruik gemaakt van een schatting s^2 van σ^2 uit eerder uitgevoerde experimenten. Deze bedroeg $s^2 = 16,28$ met 20 vrijheidsgraden.

Voor de details van de analyse van de in Tabel 6 genoemde gegevens verwijzen we naar *Upperman* (1993). Een zeer uitvoerig en goed boek over regressieanalyse is *Draper and Smith* (1981).

De uitkomsten van de analyse van Tabel 5 waren :

Er is geen effect van de factor R, soort glas, gevonden.

De lichtopbrengst y als functie van hoeveelheid amalgaam en soort gasvulling wordt geschat met de formule :

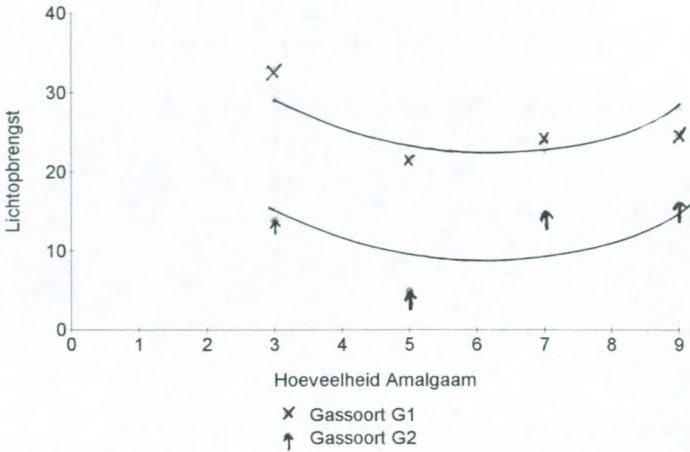
$$\hat{y}_i = 29,08 - 8,49x_{P_i} + 2,71x_{P_i}^2 - 13,48x_{Q_i} \dots \dots \dots (4)$$

Om het effect van de hoeveelheid amalgaam per soort gasvulling te doorzien substitueren we $x_Q=0$ en $x_Q=1$ in (4) en vinden :

$$\text{Gassoort } G1(x_Q = 0): \hat{y}_i = 29,08 - 8,49x_{P_i} + 2,71x_{P_i}^2 \quad (5)$$

$$\text{Gassoort } G2(x_Q = 1): \hat{y}_i = 15,60 - 8,49x_{P_i} + 2,71x_{P_i}^2 \quad (6)$$

De formules (5) en (6) zijn grafisch voorgesteld in Figuur 1.



Figuur 1. Het verband tussen hoeveelheid amalgaam, twee soorten gas en de lichtopbrengst.

Figuur 1 is interessant omdat hieruit het grote en constante verschil tussen de soorten gasvulling duidelijk blijkt en er een minimum waarde van de lichtopbrengst is behorend bij een $x_p = 1,57$, overeenkomend met een hoeveelheid van 6,14 eenheden amalgaam.

De hoogste lichtopbrengst wordt bereikt bij $x_p = 0$ en gassoort G1. De erbij behorende y-waarde wordt gevonden door $x_p = 0$ in (5) te substitueren. We vinden :

$$\hat{y} = 29,08.$$

De oorspronkelijke waarnemingen zijn in Figuur 1 met een achttal stippen aangegeven. Hieruit blijkt dat de "passing" tussen model en waarnemingen redelijk goed is. Figuur 1 kan worden gebruikt om een keuze ten aanzien van gassoort en hoeveelheid amalgaam te doen, die een goede lichtopbrengst garandeert en economisch verantwoord is.

3. Proefschema's met 54 en 16 experimentele eenheden.

3.1. Een $3 \times 3 \times 3 \times 2$ proefschema.

In eerste instantie zullen we een volledig factorieel schema, in duplo uitgevoerd en met drie kwantitatieve factoren, elk met drie equidistante niveaus, analyseren.*

Het betreft een experiment waarin een kwaliteitskenmerk "y" van beton wordt onderzocht. Vervolgens zullen we in par. 3.2 slechts 16 van de 54 beschikbare waarnemingen gebruiken en aantonen dat met dit beperkte aantal ook een verantwoorde analyse kan worden uitgevoerd.

*Ontleend aan hoofdstuk 9 van C.R. Hicks (1964), Fundamental concepts in the design of experiments, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

De drie in het onderzoek opgenomen factoren met bijbehorende niveaus zijn :

Factoren	Niveaus
Oppervlaktedikte :P	3, 4, 5
Basisdikte :Q	0, 3, 6
Dikte onderlaag :R	4, 8, 12

Alle dikten zijn in inches gegeven.

Om de regressieanalyse gemakkelijk te kunnen uitvoeren, zullen we voor de drie factoren de variabelen x_1 , x_2 en x_3 gebruiken, die de waarden -1, 0 en +1 kunnen aannemen, corresponderend met de drie niveaus van de factoren. De relatie tussen de echte en de gestandaardiseerde niveaus -1,0 en +1 is als volgt :

$$\begin{aligned} x_{1i} &= (P_i - 4)/1 = P_i - 4 \quad J \\ x_{2i} &= (Q_i - 3)/3 = Q_i/3 - 1 \quad J \\ x_{3i} &= (R_i - 8)/4 = 0,25R_i - 2 \quad J \end{aligned} \quad (7)$$

Het volledige schema met de 54 waarnemingen is gegeven in Tabel 7.

Dikte van de onderlaag	Oppervlaktedikte								
	3			4			5		
	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	28	43	57	41	54	67	60	63	71
	26	45	53	44	55	69	62	65	69
8	41	57	69	53	65	77	61	72	81
	44	58	71	51	67	74	58	71	84
12	55	70	81	65	77	88	70	80	91
	53	68	83	67	75	91	72	83	90

Tabel 7. Proefschema betononderzoek met gegevens.

De 54 niveaucombinaties zijn in willekeurige volgorde ingesteld, gemaakt en vervolgens gemeten. Het model van de waarnemingen ziet er als volgt uit :

$$y_i = \beta_0 + \beta_{11}x_{1i}^2 + \beta_{22}x_{2i}^2 + \beta_{33}x_{3i}^2 + \beta_1x_{1i} + \beta_2x_{2i} + \beta_3x_{3i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i} + \beta_{13}x_{1i}x_{3i} + \beta_{23}x_{2i}x_{3i} + \epsilon_i \dots (8)$$

De regressieanalyse is uitgevoerd met behulp van orthogonale polynomen. Zie hoofdstuk 11 van *Upperman* (1974). Het resultaat ervan, waarbij de niet-significante termen zijn weggelaten is :

$$\hat{\sigma}_\epsilon = 3,07$$

$$\hat{y}_i = 64,537 + 8,360x_{1i} + 11,528x_{2i} + 10,750x_{3i} - 2,667x_{1i}x_{2i} - 2,583x_{1i}x_{3i} \dots (9)$$

Om de geschatte relatie tussen y en de echte niveaus van de factoren te kennen, substitueren we de uitdrukkingen (7) in (9) en vinden :

$$\hat{y}_i = -33,267 + 16,194P_i + 7,399Q_i + 5,271R_i - 0,889P_iQ_i - 0,646P_iR_i \dots \quad (10)$$

Uit dit resultaat blijkt dat met name de factor P een grote en gecompliceerde rol speelt omdat deze in drie termen, waarvan twee interactiecomponenten zijn, optreedt.

3.2. Een $3 \times 3 \times 3/16$ proefschema.

Het bovengenoemde proefschema is te vinden in *Upperman* (1993) en heeft de structuur zoals gegeven in Tabel 8.

x_P	0	2	0	2	0	2	0	2	1	2	1	2	0	1	0	1	$x_{1i} = x_{P_i} - I$
x_Q	0	0	2	2	0	0	2	2	1	0	2	1	1	0	2	1	$x_{2i} = x_{Q_i} - I$
x_R	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	0	0	2	2	1	1	$x_{3i} = x_{R_i} - I$

Tabel 8. Een $3 \times 3 \times 3/16$ proefschema.

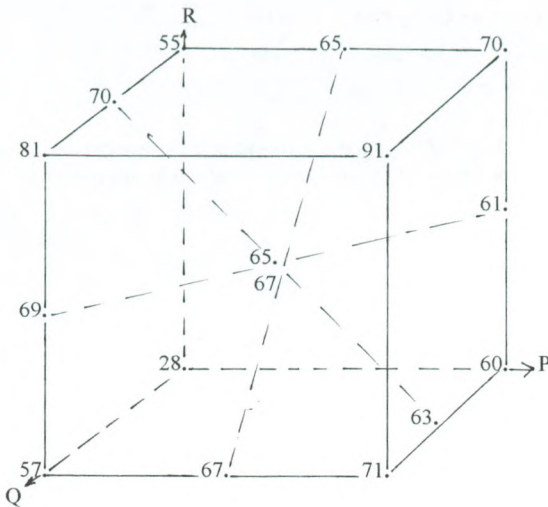
In Tabel 8 zijn ook weer de in par. 3.1 gebruikte variabelen x_1, x_2, x_3 en hun relatie met x_P, x_Q, x_R gegeven. Deze tabel wordt gebruikt om de erbij behorende 16 experimentele eenheden te ontleen aan Tabel 7. Het resultaat is gegeven in Tabel 9.

Dikte van de onderlaag(R)	Oppervlaktedikte(P)								
	3(0)			4(1)			5(2)		
	Basisdikte(Q)			Basisdikte(Q)			Basisdikte(Q)		
	0(0)	3(1)	6(2)	0(0)	3(1)	6(2)	0(0)	3(1)	6(2)
4(0)	28		57			67	60	63	71
8(1)			69		65		61		
12(2)	55	70	81	65	67		70		91

Tabel 9. Een $3 \times 3 \times 3/16$ proefschema inzake betononderzoek.

De waarden van x_P, x_Q en x_R zijn in Tabel 9, naast de echte niveaus van P,Q en R, tussen haakjes gegeven.

We kunnen Tabel 9 ook grafisch voorstellen door de 16 experimentele eenheden in de kubus van Figuur 2 weer te geven.



Figuur 2. Ruimtelijke voorstelling van het 3 × 3 × 3/16 proefschema.

Uit figuur 2 blijkt dat, hoewel we 11 niveaucombinaties hebben weggelaten, het experimentele gebied (de kubus) redelijk goed door het waarnemingsmateriaal wordt “gevuld”. Zo zijn bijvoorbeeld alle hoekpunten van de kubus in het experiment opgenomen.

Het model van de waarnemingen is reeds in (8) gegeven.

Omdat het schema onvolledig is kon niet de in par. 3.1 genoemde rekenmethode worden toegepast maar werd van computerprogrammatuur gebruik gemaakt. De gevonden geschatte regressievergelijking is :

$$\hat{y}_i = 64,381 + 8,268x_{1i} + 11,196x_{2i} + 10,411x_{3i} - 2,424x_{1i}x_{2i} - 2,524x_{1i}x_{3i} \dots\dots\dots(11)$$

$$\hat{\sigma}_e = 2,32$$

De relatie tussen y_i en de echte niveaus vinden we weer door de uitdrukkingen (7) in (11) te substitueren. We vinden :

$$\hat{y}_i = -30,592 + 15,739P_i + 6,964Q_i + 5,126R_i - 0,808P_iQ_i - 0,631P_iR_i \dots\dots\dots(12)$$

Vergelijken we (11) en (12) met respectievelijk (9) en (10) dan is duidelijk dat de grootteorde van de coëfficiënten dezelfde is. Dit betekent dat in veel gevallen met een veel kleiner experiment dan een volledig factorieel schema kan worden volstaan. Dit geldt vooral indien de σ_e relatief klein is ten opzichte van de te verwachten effecten van de te onderzoeken factoren.

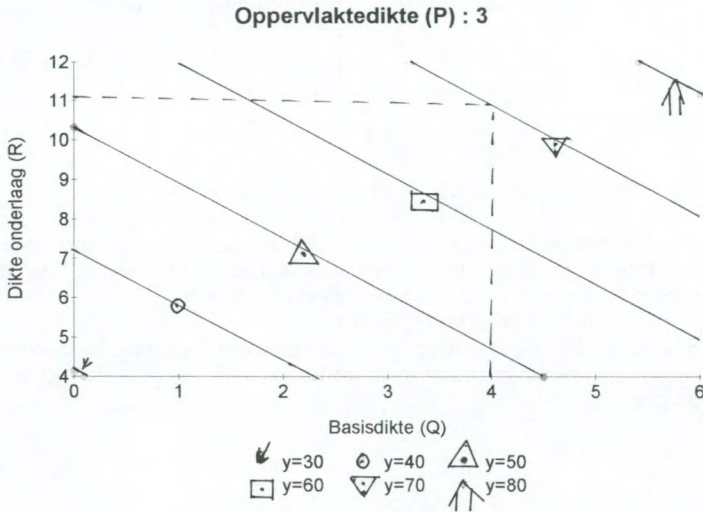
Om een nog beter inzicht te krijgen in het effect van de factoren zullen we een grafische voorstelling van (12) geven voor de waarden $P = 3, 4$ en 5 . Substitutie van deze waarden in (12) levert achtereenvolgens :

$$P = 3: \hat{y}_i = +16,625 + 4,540Q_i + 3,233R_i \quad (13)$$

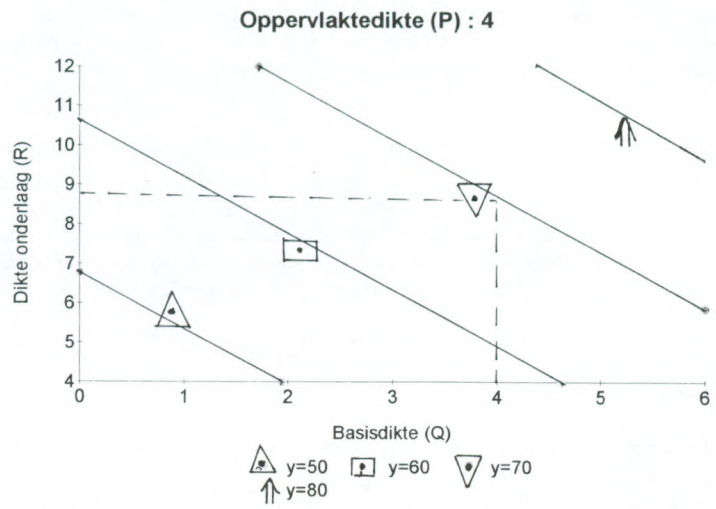
$$P = 4: \hat{y}_i = +32,364 + 3,732Q_i + 2,602R_i \quad (14)$$

$$P = 5: \hat{y}_i = +48,103 + 2,924Q_i + 1,971R_i \quad (15)$$

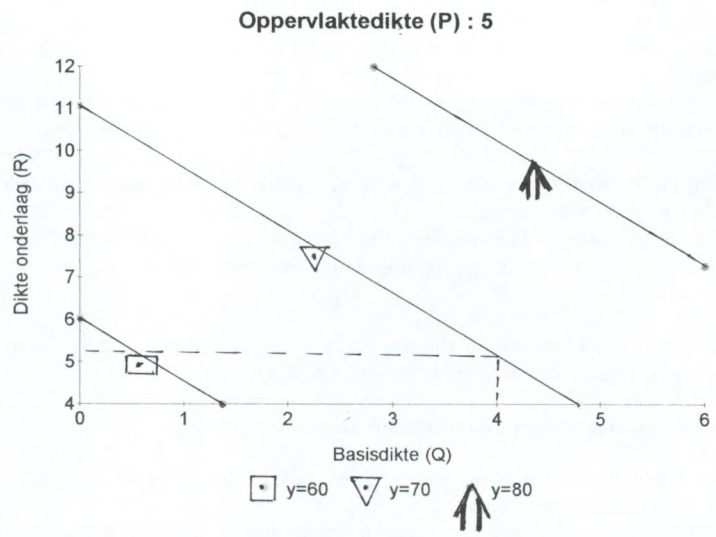
De uitdrukkingen (12), (13) en (14) zijn grafisch voorgesteld in respectievelijk figuur 3, 4 en 5. Deze figuren kunnen worden gebruikt om snel geschikte instellingen van de factoren P, Q en R te vinden.



Figuur 3. Relatie tussen kwaliteitskenmerk “y” en Basisdikte/Dikte onderlaag.



Figuur 4. Relatie tusen kwaliteitskenmerk “y” en Basisdikte/Dikte onderlaag.



Figuur 5. Relatie tussen kwaliteitskenmerk “y” en Basisdikte/Dikte onderlaag.

Wordt er bijvoorbeeld een waarde van $y=70$ wat betreft het kwaliteitskenmerk gewenst, dan kan met behulp van de figuren 3, 4 en 5 worden vastgesteld dat deze waarde o.a. bereikbaar is door respectievelijk het volgende stelsel waarden van P,Q en R te kiezen.

- P=3, Q=4, R=11,1
- P=4, Q=4, R=8,8
- P=5, Q=4, R=5,3.

Vele andere combinaties, om een waarde van $y=70$ te realiseren, zijn mogelijk. Er kan naar worden gestreefd een drietal waarden (P, Q, R) te vinden, waarvan het gebruik minimale kosten vereist en zo tot bij te dragen tot een economisch verantwoorde keuze.

4. Een toepassing van een $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3/32$ schema.*

4.1. Inleiding en probleemstelling.

Een machine wordt gebruikt om materiaal te maken waarvan een bepaald kwaliteitskenmerk "y" dient te voldoen aan een streefwaarde van 500 eenheden.

Door ervaring was bekend dat een vijftal machineinstellingen, elk ervan een kwantitatieve variabele, een effect had op de waarde van het bovengenoemde kenmerk.

We geven de grootte van deze instellingen aan met de variabelen x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 .

Omdat het effect van de veranderingen in de waarden van de x_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) op y niet precies bekend was en ook interacties tussen de 5 variabelen x_j mogelijk waren, besloot de bedrijfsleiding een experiment uit te voeren om het effect van de x_j op y in meer detail te onderzoeken.

Daartoe werd een werkgroep geformeerd en na een uitvoerige gedachtenwisseling werd besloten een experiment op te zetten dat aan de drie volgende voorwaarden voldoet :

- Elk van de 5 variabelen wordt op 3 niveaus ingesteld zodat lineaire en kwadratische effecten kunnen worden bepaald.
- Alle 10 interacties tussen de 5 variabelen van het type lineair \times lineair zijn schatbaar.
- Er behoort een maat voor de grootte van de experimentele fout uit de gegevens kunnen worden berekend.

Een $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3/32$ schema uit *Upperman* (1993) bleek aan bovenstaande voorwaarden te voldoen en de werkgroep besloot dit schema te gebruiken.

4.2. Proefschema, waarnemingen en de resultaten van de analyse.

De 3 niveaus van elk der variabelen worden, zoals ook in par. 3.1 gebeurde, gecodeerd en aangegeven met de waarden -1, 0, en +1.

De 32 behandelingen zijn, met de waarnemingsuitkomsten, gegeven in Tabel 10. Alle behandelingen zijn in willekeurige volgorde uitgevoerd.

*Ontleend aan : Par. 5.10 van *Upperman* (1993)

Behandeling	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	-1	-1	-1	-1	-1	448,89
2	1	-1	-1	-1	1	408,94
3	-1	1	-1	-1	1	458,01
4	1	1	-1	-1	-1	494,17
5	-1	-1	1	-1	1	466,10
6	1	-1	1	-1	-1	540,28
7	-1	1	1	-1	-1	612,29
8	1	1	1	-1	1	545,16
9	-1	-1	-1	1	1	395,69
10	1	-1	-1	1	-1	453,36
11	-1	1	-1	1	-1	505,67
12	1	1	-1	1	1	465,32
13	-1	-1	1	1	-1	532,05
14	1	-1	1	1	1	482,85
15	-1	1	1	1	1	555,48
16	1	1	1	1	-1	610,07
17	-1	-1	0	-1	0	451,19
18	1	0	-1	-1	0	464,54
19	0	1	-1	0	-1	517,68
20	1	0	-1	-1	1	434,68
21	0	0	1	-1	-1	576,65
22	0	0	0	0	0	502,19
23	-1	1	1	0	1	521,69
24	0	1	0	-1	-1	550,50
25	-1	-1	-1	0	0	416,06
26	1	-1	0	1	1	441,48
27	-1	0	-1	0	1	450,09
28	1	0	0	1	-1	539,06
29	0	-1	1	1	1	469,86
30	1	-1	0	0	-1	493,72
31	-1	1	1	1	0	587,69
32	0	1	1	1	0	587,70

Tabel 10. Proefschema en waarnemingen $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3/32$ schema.

Tabl 10 illustreert ook dat een grote besparing op het aantal waarnemingen is gerealiseerd, omdat een volledig factorieel schema uit $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ behandelingen bestaat.

Er wordt de aandacht op gevestigd dat de eerste 16 behandelingen of experimentele eenheden van Tabel 10 een zogenaamde halve herhaling van een 2^5 -schema vormen. Het laatstgenoemde bevat ook 5 factoren die alle op 2 niveaus worden ingesteld.

Wat betreft de details van de "link" tussen Tabel 10 en het volledige 2^5 -schema, wordt verwezen naar *Upperman* (1993).

Met behulp van het computerprogramma "STATA" werd een regressieanalyse met de gegevens van Tabel 10 uitgevoerd. Het geschatte regressiemodel, met weglating van de niet-significante termen is :

$$\hat{y} = 506,41 + 33,62x_2 + 43,68x_3 - 27,38x_5 - 8,19x_2^2 - 5,37x_3x_5, \dots \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_e = 9,49$$

Uit (16) blijkt dat er geen effecten van de variabelen x_1 en x_4 zijn gevonden. Uitdrukking (16) kan ook worden gebruikt om een waarde van ongeveer

$$\hat{y} = 500$$

in te stellen. Een geschikte keuze is $x_2 = +1$, $x_3 = 0$ en $x_5 = +1$. Substitutie van deze waarden in (16) levert :

$$\hat{y} = 503,96$$

Evenals dit met (12) werd gedaan, kan ook (16) grafisch worden voorgesteld door drie grafieken, elk voor een vaste waarde van bijvoorbeeld x_2 . Deze grafieken kunnen dan weer worden gebruikt om één of meer geschikte instellingen van de factoren x_2 , x_3 en x_5 te vinden. Voor verdere details van de uitgevoerde analyse verwijzen we naar *Upperman* (1993).

5. Enkele schema's met 8, 16, 18, 27 en 32 experimentele eenheden.

De in deze paragraaf te presenteren proefopzetten vormen een selectie uit de in *Upperman* (1993) gegeven exemplaren. Alle niveaus van de factoren zijn uitsluitend kwantitatief, behalve die van een factor met twee niveaus; die mogen ook kwalitatief zijn.

Elk schema bevat de volgende kenmerken :

- De niveaus van de factoren aangeduid met 0, 1, 2 of 3.
- Het wiskundige model van de waarnemingen.
- De relaties tussen de niveaus van de factoren en de gebruikte onafhankelijke variabelen.

Indien een schema in de praktijk wordt gebruikt, behoort te worden nagegaan of er voldoende vrijheidsgraden beschikbaar zijn om de standaardafwijking van de experimentele fout te schatten. Indien dit niet het geval is, kan ook een bekende schatting van σ^2 worden gebruikt of herhalingsmetingen worden uitgevoerd.

Hoewel het gebruik van drie niveaus van een factor voldoende is om niet alleen lineaire maar ook kwadratische effecten van een onafhankelijke variabele te schatten, bevatten enkele van de hierna gegeven schema's ook factoren met vier niveaus. Dit heeft een praktische oorzaak omdat er in bepaalde gevallen vier vaste equidistante niveaus zijn die een onderzoeker allemaal in z'n onderzoek wenst te betrekken. Zo kan het voorkomen dat het effect van draaddiameter onderzocht behoort te worden en dat er vier diameters beschikbaar zijn. Indien er slechts drie in het onderzoek worden meegenomen is het noodzakelijk de grootste of de kleinste waarde te laten vervallen en het is denkbaar dat een onderzoeker deze werkwijze ongewenst vindt. Om die redenen zijn er schema's met vier niveaus geconstrueerd, waardoor het genoemde dilemma kan worden vermeden.

Nr. 1. Een $3 \times 2 \times 2 / 8$ Proefschema. (Zie schema (8.4) van *Upperman* (1993))

Proefopzet.

x_P	0	1	1	2	0	1	1	2
x_Q	0	0	0	0	1	1	1	1
x_R	1	1	0	0	0	0	1	1

Relaties tussen de niveaus x_P, x_Q, x_R en de onafhankelijke variabelen Pl, Pq, Q en R :

$$Pl_i = (-1 + x_{Pi})\sqrt{2} ; \quad Pq = 1 - 4x_{Pi} + 2x_{Pi}^2 ; \quad Q_i = -1 + 2x_{Qi} ; \quad R_i = -1 + 2x_{Ri}$$

Model van de waarnemingen :

$$y_i = \beta_0 + \beta_{11}Pq_i + \beta_1 Pl_i + \beta_2 Q_i + \beta_3 R_i + \beta_{12} Pl_i Q_i + \beta_{13} Pl_i R_i + \beta_{23} Q_i R_i + \varepsilon_i$$

Nr. 2. Een $4 \times 4 \times 2 / 16$ Proefschema. (zie schema (8.5) van *Upperman* (1993))

Proefopzet

x_P	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1	3
x_Q	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1
x_R	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0

Relaties tussen de niveaus x_P, x_Q, x_R en de onafhankelijke variabelen Pl, Pq, Ql, Qq en R :

$$Pl_i = (-3 + 2x_{Pi}) / \sqrt{5} ; \quad Pq_i = 1 - 3x_{Pi} + x_{Pi}^2 ; \quad Ql_i = (-3 + 2x_{Qi}) / \sqrt{5} ; \quad Qq_i = 1 - 3x_{Qi} + x_{Qi}^2$$

$$R_i = -1 + 2x_{Ri}$$

Model van de waarnemingen :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 Pl_i + \beta_{11} Pq_i + \beta_2 Ql_i + \beta_{22} Qq_i + \beta_3 R_i + \beta_{12} Pl_i Ql_i + \beta_{13} Pl_i R_i + \beta_{23} Ql_i R_i + \varepsilon_i$$

Nr. 3. Een $3 \times 3 \times 3 \times 2 / 18$ schema. (zie schema (8.31) van *Upperman* (1993))

Proefopzet

x_W	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_P	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2
x_Q	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
x_U	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1

Relaties tussen de niveaus van x_W, x_P, x_Q, x_U en de onafhankelijke variabelen W, Pl, Pq, Ql, Qq, Ul en Uq :

$$W_i = 2x_{Wi} - 1 ; \quad Pl_i = 0,5(x_{Pi} - 1)\sqrt{6} ; \quad Pq_i = (3/2)(x_{Pi}^2 - 2x_{Pi} + (1/3))$$

$$Ql_i = 0,5(x_{Qi} - 1)\sqrt{6} ; \quad Qq_i = (3/2)(x_{Qi}^2 - 2x_{Qi} + (1/3))$$

$$Ul_i = 0,5(x_{Ui} - 1)\sqrt{6} ; \quad Uq_i = (3/2)(x_{Ui}^2 - 2x_{Ui} + (1/3))$$

Model van de waarnemingen :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 P I_i + \beta_{22} P q_i + \beta_3 Q I_i + \beta_{33} Q q_i + \beta_4 U I_i + \beta_{44} U q_i + \\ + \beta_{12} W_i P I_i + \beta_{13} W_i Q I_i + \beta_{14} W_i U I_i + \beta_{23} P I_i Q I_i + \beta_{24} P I_i U I_i + \beta_{34} Q I_i U I_i + \varepsilon_i$$

Nr. 4. Een $3 \times 3 \times 3 \times 3 / 27$ schema. (zie schema (8.34) van *Upperman* (1993))
Proefopzet

x_P	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_Q	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0
x_R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_S	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	0	1	2	1	2

Relaties tussen de niveaus van x_P, x_Q, x_R, x_S en de onafhankelijke variabelen $PI, Pq, QI, Qq, RI, Rq, SI$ en Sq :

$$P I_i = 0,5(x_{P_i} - 1)\sqrt{6} \quad P q_i = (3/2)(x_{P_i}^2 - 2x_{P_i} + (1/3))\sqrt{2}$$

$$Q I_i = 0,5(x_{Q_i} - 1)\sqrt{6} \quad Q q_i = (3/2)(x_{Q_i}^2 - 2x_{Q_i} + (1/3))\sqrt{2}$$

$$R I_i = 0,5(x_{R_i} - 1)\sqrt{6} \quad R q_i = (3/2)(x_{R_i}^2 - 2x_{R_i} + (1/3))\sqrt{2}$$

$$S I_i = 0,5(x_{S_i} - 1)\sqrt{6} \quad S q_i = (3/2)(x_{S_i}^2 - 2x_{S_i} + (1/3))\sqrt{2}$$

Model van de waarnemingen :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 P I_i + \beta_{11} P q_i + \beta_2 Q I_i + \beta_{22} Q q_i + \beta_3 R I_i + \beta_{33} R q_i + \beta_4 S I_i + \beta_{44} S q_i + \\ + \beta_{12} P I_i Q I_i + \beta_{13} P I_i R I_i + \beta_{14} P I_i S I_i + \beta_{23} Q I_i R I_i + \beta_{24} Q I_i S I_i + \beta_{34} R I_i S I_i + \varepsilon_i$$

Nr. 5. Een $4 \times 4 \times 4 \times 4 / 32$ schema. (zie schema (8.25) van *Upperman* (1993))
Proefopzet

x_P	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	1	3	1	2	0	2	0	3	0	3	1	3	0	2
x_Q	0	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	1	3	2	1	1	3	3	0	0	2	2	0	3
x_R	0	0	0	0	3	3	3	0	0	0	0	3	3	3	3	1	0	0	0	3	2	3	2	0	1	0	1	3	2	3
x_S	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	0	0	1	0	0	1	1	0	2	3	2	3	3	2	3	
x_T	0	3	3	0	3	0	0	3	0	3	0	3	0	2	1	0	3	0	2	3	0	1	3	3	0	3	0	1	2	

Relaties tussen de niveaus van x_P, x_Q, x_R, x_S en x_T en de onafhankelijke variabelen $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}$ en x_{5i} :

$$x_{1i} = (2x_{P_i} - 3) / 3$$

$$x_{2i} = (2x_{Q_i} - 3) / 3$$

$$x_{3i} = (2x_{R_i} - 3) / 3$$

$$x_{4i} = (2x_{S_i} - 3) / 3$$

$$x_{5i} = (2x_{T_i} - 3) / 3$$

Model van de waarnemingen :

$$y_i = \beta_0 + \beta_{11}x_{1i}^2 + \beta_{22}x_{2i}^2 + \beta_{33}x_{3i}^2 + \beta_{44}x_{4i}^2 + \beta_{55}x_{5i}^2 + \beta_1x_{1i} + \beta_2x_{2i} + \beta_3x_{3i} + \\ + \beta_4x_{4i} + \beta_5x_{5i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i} + \beta_{13}x_{1i}x_{3i} + \beta_{14}x_{1i}x_{4i} + \beta_{15}x_{1i}x_{5i} + \beta_{23}x_{2i}x_{3i} + \\ + \beta_{24}x_{2i}x_{4i} + \beta_{25}x_{2i}x_{5i} + \beta_{34}x_{3i}x_{4i} + \beta_{35}x_{3i}x_{5i} + \beta_{45}x_{4i}x_{5i} + \varepsilon_i$$

De in de vorige paragrafen en de 5 hiervoor gegeven schema's zijn gekozen uit de meer dan 40 exemplaren die in *Upperman* (1993) zijn gegeven. Ieder die een proefschema met kwantitatieve factoren wenst te gebruiken, dat niet in dit artikel is vermeld, kan wellicht in laatstgenoemde literatuurverwijzing een geschikte proefopzet vinden.

6. Appendix

De inleiding van dit artikel bevat een overzicht van de literatuur, waarin allerlei proefschema's met een beperkt aantal experimentele eenheden worden behandeld. Vervolgens worden enkele aspecten van de nieuwe proefschema's besproken.

In de paragrafen 1,2 en 4 worden enkele praktijkvoorbeelden, waarin deze nieuwe schema's zijn toegepast, behandeld. Hiermee wordt aangetoond dat deze kunnen worden gebruikt om proces- en kwaliteitsverbeteringen te realiseren.

Paragraaf 5 bevat een selectie van de in *Upperman* (1993) gegeven proefopzetten.

Literatuur

Adelman, S. (1961), Irregular Fractions of the 2ⁿ Factorial Experiments, *Technometrics*, Vol. 3, No. 4, 479-496.

Adelman, S. (1962a), Orthogonal Main-Effect Plans for Asymmetrical Factorial Experiments. *Technometrics*, Vol. 4, No. 1, 21-46.

Box, G.E.P. and Behnken, D.W. (1960), Some New Three-Level Designs for the study of Quantitative Variables, *Technometrics* 2, 455-475.

Box, G.E.P. and Draper, N.R. (1959), A basis for the selection of a response surface design, *Journal of the American Statistical Association* 54, 622-654.

- Box, G.E.P. and Draper, N.R.* (1963), The choice of a second order rotatable design, *Biometrika* 50, 3 and 4, 335-352.
- Box, M.J. and Draper, N.R.* (1974), On Minimum Point Second-Order Designs, *Technometrics*, Vol. 16, No. 4, 613-616.
- Box, G.E.P. and Draper, N.R.* (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, John Wiley & Sons, New York.
- Box, G.E.P. and Hunter, J.S.* (1957), Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces, *Annals of Mathematical Statistics*, 28, 195-241.
- Box, G.E.P. and Hunter, J.S.* (1961a), The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs, Part I, *Technometrics*, Vol. 3, No. 3, 311-351.
- Box, G.E.P. and Hunter, J.S.* (1961b), The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs, Part II, *Technometrics*, Vol. 3, No. 4, 449-458.
- Box, G.E.P., Hunter, W.G. and Hunter J.S.* (1978), *Statistics for Experimenters*, John Wiley & Sons, New York.
- Cochran, W. and Cox, G.M.* (1957), *Experimental Designs*, John Wiley & Sons, New York.
- Connor, W.S.* (1960), Construction of fractional factorial designs of the mixed $2^n 3^m$ series. *Contributions to Probability and Statistics*, Stanford, California. Standard University Press.
- Connor, W.S. and Young, S.* (1961), Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors at Two and Three Levels, National Bureau of Standards, U.S.A.
- Draper, N.R. and Smith, H.* (1981), *Applied Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Hicks, C.R.* (1964), *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.
- Hoke, A.T.* (1974), Economical Second-Order Designs Based on Irregular Fractions of the 3^n Factorial, *Technometrics*, Vol. 16, No. 3, 375-384.
- Johnson, N.L. and Leone, T.C.* (1964), *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*, Vol. I and II, John Wiley & Sons, New York.
- Kemphorne, O.* (1979), *The Design and Analysis of Experiments*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, N.Y.
- Lucas, J.M.* (1974), Optimum Composite Designs, *Technometrics*, Vol. 16, No. 4, 561-567.
- Margolin, B.H.* (1969b), Orthogonal Main-Effect Plans Permitting Estimation of all Two-factor Interactions for the $2^n 3^m$ Fractional Series of Designs, *Technometrics* 11, 747-762.

- McLean, R.A. and Anderson, V.L.* (1984), *Applied Factorial and Fractional Designs*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- Mitchell, T.J. and Bayne, C.K.* (1978), D-Optimal Fractions of Three-Level Factorial Designs, *Technometrics*, Vol. 20, No. 4, 369-380.
- Montgomery, D.C.* (1976), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, New York.
- Morrison, M.* (1956), Fractional Replication for Mixed Series, *Biometrics* 12, 1-19.
- Myers, R.H., Khuri, A.I. and Carter, H.W.* (1988), Response Surface Methodology 1966-1988, *Technometrics*, Vol. 31, No. 2, 137-157.
- Plackett, R.L. and Burman, J.P.* (1946), The Design of Optimum Multifactor Experiments, *Biometrika* 33, 305-325.
- Rechtschaffner, R.L.* (1967), Saturated Fractions of the 2^n and 3^n Factorial Designs, *Technometrics*, Vol. 9, No. 4, 569-575.
- Statistical Engineering Laboratory* (1957), *Fractional Factorial Experiment Designs for Factors at Two Levels*, National Bureau of Standards, U.S.A.
- Steinberg, D.M. and Hunter, W.G.* (1984), Experimental Design : Review and Comment with Discussion, *Technometrics* 26, 71-130.
- Taguchi, G.* (1987), *System of Experimental Design*, Vol. I and II, UNIPUB/Kraus International Publications, New York and American Supplier Institute Inc., Dearborn.
- Upperman, P.M.* (1974), *Statistische Methoden en Proefopzetten*, Universitaire Pers, Rotterdam.
- Upperman, P.M. en Dévény, A.M.* (1974), De oplossing van een kwaliteitsprobleem door het gebruik van proefschema's, *Statistica Neerlandica* 28, 153-171.
- Upperman, P.M.* (1991), Aspecten, principes en toepassingen van proefopzetten, *SIGMA*, No. 3, 8-12.
- Upperman, P.M.* (1993), *Designs with a Small Number of Runs for Factorial Experiments*. Proefschrift Technische Universiteit Eindhoven. ISBN 90-386-0162-X.
- Webb, S.R.* (1971), Small Incomplete Factorial Experiment Designs for Two- and Three-Level Factors, *Technometrics*, Vol. 13, No. 2, 243-256.
- Welch, W.J.* (1984), Computer-Aided Design of Experiments for Response Estimation, *Technometrics*, Vol. 26, No. 3, 217-224.

