

Driemaal dubbel: Kansen en rendementen in het Monopoly-spel

Joop G. Odink^a en Evert van Imhoff^b

Samenvatting

Het Monopoly-spel, door de Parker Brothers geïntroduceerd in 1935, draait om de kosten en opbrengsten van investeringen in grond en huizen. Het rendement op een bepaalde straat of stad is echter niet alleen afhankelijk van de kosten en de huur, maar ook van de kans dat de tegenstanders op de desbetreffende straat of stad terecht komen. In dit artikel worden de relatieve bezoekfrequenties van de vakjes op het Monopoly-bord bepaald uit de stationaire vergelijkingen van een Markov-keten. Hieruit blijkt dat, na de Gevangenis, de Groningse Heerestraat het meest bezochte vakje is en de Amsterdamse Leidschestraat de minst bezochte straat. Als met deze relatieve bezoekfrequenties rekening wordt gehouden, verdringt Utrecht Arnhem naar de tweede plaats in het rendementsklassement.

1 Inleiding

In 1935 introduceerden de Parker Brothers het Monopoly-spel, bedacht door de Amerikaan Charles Darrow. Aanvankelijk dachten de uitgevers dat het spel veel te ingewikkeld was. Echter, het grote succes van het spel tot op heden laat zien dat deze aanvankelijke inschatting onjuist is geweest. Sinds de introductie zijn wereldwijd meer dan 150 miljoen exemplaren verkocht (De Raat, 1995). De spelregels zijn op nauwelijks meer dan drie kantjes geschreven en in de loop der jaren zijn zij niet of nauwelijks veranderd. Slechts op enkele punten zijn ze onduidelijk.

Voor economen is Monopoly zeker een prachtig spel. Tal van (micro-) economische begrippen worden er fraai mee geïllustreerd en in de praktijk gebracht. Daarbij valt onder meer te denken aan homogeniteit van de graad nul, afnemende meeropbrengsten, maximalisatie van winst of van nut, maximaliseren onder nevenvoorwaarden, en besluitvorming onder onzekerheid. Ook elementen uit de economische speltheorie –in de meest letterlijke zin van het woord– spelen bij Monopoly een rol.

Wij zullen op enkele economische aspecten van het Monopoly-spel ingaan en beperken ons daarbij tot de Nederlandse uitvoering (voor een recente analyse van de Amerikaanse versie van het spel verwijzen wij naar Stewart, 1995), met de moderne weergave van de oorspronkelijke, officiële spelregels. In sommige versies worden op bepaalde punten varianten op de spelregels gehanteerd. Het gaat daarbij met name om “Vrij Parkeren” en het verlaten van de Gevangenis. In bijlage 1 wordt op deze punten nader ingegaan.

^a Vakgroep Algemene Economie, Universiteit van Amsterdam, Roetersstraat 11, 1018 WB Amsterdam. Tel. 020-5254255. Email JO@FEE.UVA.NL

^b Nederlands Interdisciplinair Demografisch Instituut (NIDI), Postbus 11650, 2502 AR Den Haag. Tel. 070-3565236. Email IMHOFF@NIDI.NL

Sinds de introductie is de Nederlandstalige uitvoering op enkele punten gewijzigd. In verband met de spellingsherziening moesten de straatnamen worden aangepast. Tot een volledig correcte en uniforme aanduiding van straatnamen is het evenwel nooit gekomen. Af werd Start, Lange Pooten werd Lange Poten, maar Leidschestraat werd slechts in een deel van de oplage ontdaan van de ch, en Groote Markt en Heerestraat werden niet aan de nieuwe spelling aangepast. Ons Dorp werd Het Dorp, en Dorpsstraat werd Dorpsstraat.

Een op het oog veel belangrijker aanpassing betreft de vermenigvuldiging van alle prijzen met een factor 100. Deze inflatoire aanpassing heeft echter niet kunnen leiden tot een illusie van realistische prijzen. De prijs van 5.000 gulden voor een huis op het Velperplein in Arnhem is geenszins realistisch, laat staan de prijs van 10.000 gulden voor de grond van de gehele Steenstraat. Een bouwprijs van 50 gulden vóór de Tweede Wereldoorlog was evenmin realistisch. Doordat alle bedragen met dezelfde factor werden vermenigvuldigd, bleven alle *relatieve* prijzen onveranderd. Ook de rendementen van de investeringen in huizen en straten zijn *homogeen van de graad nul* voor een dergelijke inflatoire prijsaanpassing.

Het doel van het spel is het worden van de rijkste speler. In de praktijk is dat meestal de enig overgebleven, niet failliete speler: de monopolist. In feite is het spel dus geen monopolie maar een oligopolie met allerlei speltheoretische elementen. Wie winnaar wordt is onafhankelijk van de genoemde prijsaanpassing. Wellicht hebben de uitgevers vermoed dat sommigen van de (jeugdige?) kopers toch in zekere mate aan geldillusie zouden lijden, of zouden zij rekening hebben willen houden met de zeer gefortuneerde spelers die het spel met écht geld wensen te spelen? Overigens krijgt de Wereldkampioen Monopoly een prijs van 15.140 dollar, gelijk aan de totale hoeveelheid geld in omloop conform de *oude* versie van het spel (Van Orten, 1993); deze bedragen worden in de hedendaagse USA-versie nog steeds gebruikt.

De opbouw van dit artikel is als volgt. In paragraaf 2 wordt ingegaan op de structuur van het Monopoly-spel en op de kosten en opbrengsten van straten en huizen. Voor het rendement op de verschillende beleggingsobjecten zijn daarnaast echter van belang, de kansen dat tegenstanders het object ook daadwerkelijk bezoeken. Paragraaf 3 bespreekt hoe deze bezoekkansen kunnen worden bepaald uit de stationaire vergelijkingen van een Markov-keten. De invloed van deze bezoekkansen op de rendementen wordt behandeld in paragraaf 4. Het artikel wordt afgesloten met een samenvatting van de belangrijkste conclusies.

2 De structuur van het spel: rendementen

Spelers kunnen investeren in onroerend goed: openbare nutsbedrijven, stations en straten, hierna kortweg als grond aan te duiden. Straten van een complete groep (van dezelfde kleur/stad) kunnen worden bebouwd met huizen, waarbij vijf huizen worden vervangen door een hotel. Strategische afwegingen hebben betrekking op het al dan niet kopen of ruilen van grond en al dan niet bebouwen van complete groepen van straten. De opbrengst bestaat uit de bedragen die de bezoekers van grond (al dan niet bebouwd) aan de eigenaar van de grond moeten betalen.

Het ingewikkelde van het spel is dat de hoeveelheid geld in omloop beperkt is, maar geleidelijk toeneemt tijdens het spelen, vooral door de uitkering van 20.000 gulden die wordt ontvangen bij het passeren van Start. Daardoor is het antwoord op de vraag welke investering het beste is, steeds aan verandering onderhevig. Twee overwegingen spelen daarbij een rol: het rendement van de investering en de mogelijkheid om later additioneel rendabel te kunnen

investeren, het dóórbouw-rendement. Bovendien verschillen de kansen dat een huurder op bezoek komt per veld. Hierop komen wij uitgebreid terug in paragraaf 3.

Onder 'rendement' verstaan we de verhouding tussen de huurprijs die de bezoeker moet betalen en de waarde van de totale investering. Bedacht moet worden dat het effectieve rendement veel hoger is dan dit rendement op de bruto investering. Zowel de investering in grond als in huizen zijn voor de helft terug te vorderen bij de Bank, via verkoop (huizen) en hypotheek (grond). Bij een rendement van vijftig procent is de investering in feite al meer dan terugverdiend. De speler kan dan na verkoop van huizen en verhypothekering van grond zijn volledige investering terug krijgen, terwijl hij de grond nog in bezit houdt. Daar bovenop komt dan nog het voordeel dat zijn tegenstander heeft moeten betalen. In het geval van twee spelers blijft het liquide te maken vermogensverschil tussen de spelers onveranderd bij een rendement van 25%, terwijl de waarde van onroerend goed plus bebouwing voor de investeerder vooralsnog intact is gebleven.

Bij meer dan twee spelers wordt de zaak complexer omdat de overige spelers er niet in vermogen op achteruit zijn gegaan, maar wel geïnteresseerd kunnen zijn in het overnemen van de grond. Verhypothekteerde grond is dan óók liquide te maken, mogelijk zelfs tegen een veel hogere prijs dan de nominale waarde.

Ook moet als gunstig effect van een investering nog in aanmerking worden genomen het effect dat de tegenstander niet heeft kunnen incasseren. Een voorbeeld is de aankoop van het laatste station, terwijl de tegenstander er al drie in bezit heeft. Op zich bedraagt het rendement van dit station voor de koper zelf slechts $2.500/20.000 = 12,5\%$. Echter, de aanschaf verhindert dat de tegenstander een rendement van 100% op dit station zou kunnen behalen en bovendien op de drie overige stations het rendement ziet stijgen van 50% naar 100%. Al met al leidt de directe opbrengst in combinatie met de gederfde opbrengst van de tegenstander ertoe dat "kopen wat je kopen kunt" de centrale stelregel ten aanzien van grond is.

In het restant van deze paragraaf beperken wij ons verder tot de 22 straten. Zowel aanschaf- als huurprijzen zijn oplopend. Voor elke groep van drie straten geldt dat de aanschaf- en huurprijzen voor de twee goedkoopste straten gelijk zijn. Er zijn dus slechts 16 verschillende combinaties van aanschaf- en/of huurprijzen. We nummeren deze combinaties van 1 (Dorpsstraat) tot en met 16 (Kalverstraat) en geven de aldus verkregen index voor 'kwaliteit van de straat' aan met het symbool k . Voor bijvoorbeeld Neude en Biltstraat geldt dus $k=7$. Voor de namen van de velden verwijzen wij naar tabel 1.

Het relatief geringe rendement van straten onbebouwd ten opzichte van stations en openbare nutsbedrijven wordt ruimschoots gecompenseerd door de mogelijkheid huizen en hotels neer te zetten. Er zijn verschillen tussen de straten naar kosten van huizen: zeer goedkope (voor k -waarden 1-4), goedkope (5-8), dure (9-12) en zeer dure (13-16) straten, waar de huizen respectievelijk 5.000, 10.000, 15.000 en 20.000 gulden per stuk kosten. Daar staat tegenover dat de duurste straten ook het meest opbrengen. Binnen deze vier categorieën zijn er slechte en goede groepen of steden: 5 en 6 (Haarlem) kosten per huis evenveel als 7 en 8 (Utrecht), maar brengen minder op. Ook zijn er 'lage' en 'hoge' straten binnen elke groep. De hoogste straat per groep brengt altijd het meest op: 6 (Houtstraat) brengt meer op dan 5 (Barteljorisstraat/Zijlweg) en 8 (Vreeburg) meer dan 7 (Neude/Biltstraat).

Per straat bezien treedt er een zeer grote variatie op in de extra opbrengst per huis. We rekenen hier een hotel als vijf huizen. Het eerste huis brengt meestal een betrekkelijk lage huur op, zeker in vergelijking met de opbrengst onbebouwd. De meeropbrengst van het tweede huis is een stuk hoger en die van het derde huis enorm veel hoger, om voor het vierde en vijfde huis

weer wat te dalen. Binnen een groep mogen de straten maximaal één huis in bebouwing verschillen. Voor het totale beeld kijken wij, bij wijze van voorbeeld, naar de oranje groep (Utrecht), waarop maximaal 15 huizen (=3 hotels) gebouwd kunnen worden.

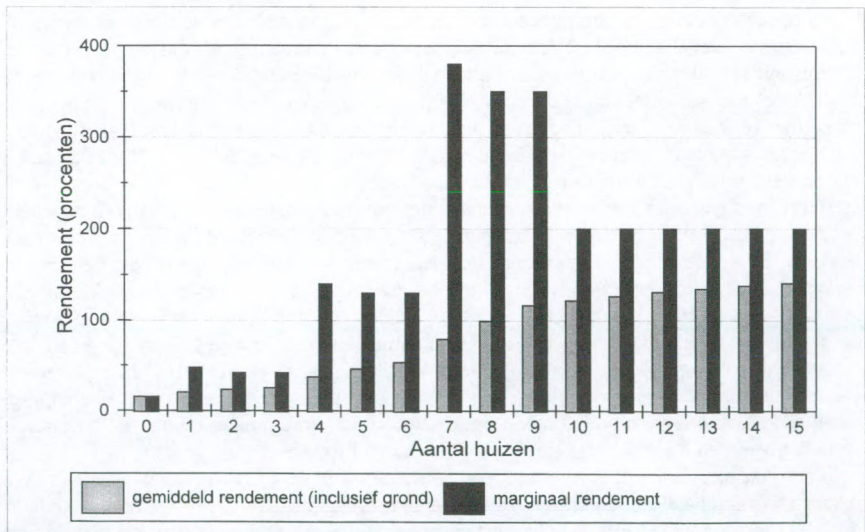
Zoals we in figuur 1 zien is er sprake van *eerst toenemende en daarna afnemende (constante) meeropbrengsten*. Het lijkt wel of de ontwerper deze bekende economische wet bewust in zijn spel heeft geïntroduceerd. Het ietwat grillige patroon, waarbij de meeropbrengst afneemt na het eerste, vierde en zevende huis, wordt veroorzaakt door het genoemde effect van 'hoge' en 'lage' straten binnen de groep: een extra huis op het Vreeburg brengt meer op dan een extra huis op Neude/Biltstraat.

De grote klap vangt men, zoals duidelijk is te zien, vanaf het derde huis per straat. Niet alleen de bouw van het derde huis is echter interessant: dat van het vierde en vijfde evenzeer.

Een hotel op het Velperplein levert het hoogste rendement op: $60.000/25.000=240\%$ (exclusief de prijs van de grond). Daarna volgen Steenstraat/Ketelstraat met 220%, Kalverstraat met 200% en Vreeburg eveneens met 200%. De laatste twee eindigen daarmee ex aequo hoog in het rendementsklassement.

Tabel 3 (zie paragraaf 4) geeft een overzicht van de rendementen per groep (gemiddeld over alle straten), voor alle mogelijke bebouwingen. Als we de prijs van de grond buiten beschouwing laten, scoort Arnhem met hotels het hoogst (227%). Het wordt ex aequo gevolgd door Arnhem met vier huizen en Amsterdam met drie huizen (208%), met op de vierde en vijfde plaats Utrecht met respectievelijk hotels (193%) en vier huizen (192%). Daarentegen bedraagt het rendement (exclusief grond) voor Rotterdam met hotels slechts 132% en voor Het Dorp met drie huizen 90%.

Figuur 1: Rendementen Utrecht



3 Kansberekening

Het rendement op een bepaalde straat of stad is niet alleen afhankelijk van de investeringskosten en de huur, maar ook van de kans dat de tegenstanders op de desbetreffende straat of stad terecht komen. De huur wordt immers alleen dan geïnd.

De kansberekening speelt bij Monopoly een belangrijke rol. Iedereen weet uit eigen ervaring dat Utrecht vaker wordt bezocht dan enige andere stad. De kans om op een willekeurig vakje terecht te komen is niet voor alle vakjes gelijk.

3.1 Bronnen van kansongelijkheid

Door verschillende oorzaken hebben niet alle vakjes dezelfde bezoekkans. Een eerste oorzaak is, dat sommige vakjes “extra” kunnen worden bereikt via Kans of Algemeen Fonds. Van de 16 Kans-kaartjes leiden er 7 tot een bezoek aan een ander vakje: Barteljorisstraat, Station West, Heerestraat, Kalverstraat, Ga verder naar Start, Ga direct naar de Gevangenis, en het gevreesde kaartje “Ga drie plaatsen terug”. Van de 16 Algemeen Fonds-kaartjes zijn er 3 verplaats-opdrachten: “Ga verder naar Start”, “Ga direct naar de Gevangenis”, en “Ga terug naar Dorpsstraat (Het Dorp)” (bij het potentiële verplaatsingskaartje “Betaal 1.000 gulden boete of neem een Kans-kaart” is aangenomen dat spelers kiezen voor de boete).

Een tweede oorzaak is gelegen in de stochastiek van de dobbelstenen. Zodra één vakje een grotere kans heeft te worden bereikt dan een ander vakje, gaan ook de kansen voor de andere vakjes veranderen. Dat heeft te maken met de ongelijkmatige kansverdeling voor het aantal ogen met twee dobbelstenen; deze variëren van 1/36 voor 2 en 12 ogen tot 6/36 voor 7 ogen, totaal kans 1, gemiddeld 7 ogen per worp. Als Dorpsstraat een grotere bezoekkans heeft dan de Brink, heeft Ketelstraat een grotere bezoekkans dan Slechts op Bezoek, omdat de kans om 7 te gooien zo groot is.

De derde oorzaak, en de belangrijkste verstoring van kansongelijkheid, is gelegen in de Gevangenis. Er zijn drie manieren om in de Gevangenis (niet te verwarren met Slechts op Bezoek) terecht te komen:

- 1 Via Kans of Algemeen Fonds, “Ga direct naar de Gevangenis. Ga niet langs Start, u ontvangt geen 20.000 gulden”.
- 2 Via driemaal dubbel. Wie in één beurt al tweemaal dubbel heeft gegooid en vervolgens voor de derde keer dubbel gooit moet direct naar de Gevangenis. Per beurt levert dit een extra kans van 1/216 om in de Gevangenis te eindigen.
- 3 Het vakje Ga naar de Gevangenis, gelegen tussen Lange Poten en Hofplein, doet de speler eveneens direct in de Gevangenis belanden. Zodra men in de Gevangenis belandt, is de beurt afgelopen, ongeacht of men bij de laatste worp dubbel gooide.

Alles bij elkaar leveren deze regels de Gevangenis een in aanzienlijke mate bovengemiddelde bezoekkans op. Daarbij moet nog worden opgeteld de reguliere kans om hetzelfde vakje via Slechts op Bezoek te bereiken. Als gevolg daarvan neemt ook de bezoekkans voor de straten van Utrecht toe, omdat deze op een kansrijk aantal posities van Gevangenis/Slechts op Bezoek liggen (respectievelijk 6, 8 en 9 posities).

Een vierde, eveneens met de Gevangenis verbonden bron van kansongelijkheid is het mechanisme waarmee men de Gevangenis kan verlaten (zie ook bijlage 1). Een speler *moet* de Gevangenis verlaten bij de derde beurt, of zodra hij bij een eerdere beurt een dubbele worp doet. Als hij in de derde beurt nog steeds niet dubbel heeft gegooid, moet hij 5.000 boete betalen. De speler *mag* na betaling van 5.000 boete ook eerder de Gevangenis verlaten, maar wij zijn er bij de berekeningen van uitgegaan dat spelers dit niet doen. Al met al levert dit levert een grotere bezoekkans op voor de vakjes die op een even positie vanaf de Gevangenis liggen. Zo verhouden de kansen om als eerstvolgende vakje Zijlweg of Electriciteitsbedrijf te bereiken zich als 2:1 vanaf Slechts op Bezoek, maar als 50:91 vanuit de Gevangenis.

Een laatste potentiële verstoring is gelegen in de uitgangspositie: alle spelers beginnen het spel vanaf vakje Start. Na enkele ronden is het effect van de uitgangspositie al minimaal, en wordt het overschaduwd door het Gevangenis-effect. Voor de kansberekening in de bebouwingsfase van het spel kan het Start-effect worden genegeerd. In feite kan men stellen dat de uitgangspositie “willekeurig” is.

3.2 Het bepalen van de bezoekkansen

De bezoekkansen vormen de resultante van de complexe wisselwerking tussen al deze verstoringen. In beginsel zijn er twee manieren om de onbekende bezoekkansen te achterhalen: empirisch via simulatie, en theoretisch via het oplossen van een stelsel van vergelijkingen. Wij hebben beide methoden gevolgd; zij leiden tot vrijwel dezelfde resultaten. In het navolgende beperken wij ons dan ook grotendeels tot de *theoretische* bezoekkansen. Enkele hiermee samenhangende spelregeltechnische zaken worden besproken in bijlage 1.

Onder het begrip “bezoekkans” verstaan wij in eerste instantie, de kans dat een willekeurige worp eindigt op een zeker vakje. De opeenvolgende verplaatsingen over het speelbord kunnen worden opgevat als een tijdhomogene Markov-keten, waarbij de tijd wordt gemeten in *worpen* en de toestand correspondeert met het *vakje waar de worp eindigt*. De bezoekkans voor vakje i is dan de limietkans p_i voor toestand i als het aantal worpen oneindig groot wordt. De transitie-matrix van deze Markov-keten bestaat uit de kansen T_{ij} dat een worp gedaan vanaf vakje i eindigt op vakje j . De limietkansen kunnen worden bepaald als de eigenvector bij de dominante eigenwaarde van de transitie-matrix. Omdat de dominante eigenwaarde gelijk is aan 1, vormen de bezoekkansen (de elementen van de eigenvector) de oplossing van het stelsel stationaire vergelijkingen van de Markov-keten.

Het Monopoly-bord bestaat uit 40 vakjes. We nummeren van 0 (Start) tot en met 39 (Kalverstraat), waarbij 10 staat voor Slechts op Bezoek. De Gevangenis zelf krijgt een apart nummer, 40. Vanwege de regel “driemaal dubbel naar de Gevangenis”, moeten de toestanden die corresponderen met de vakjes 0-39 worden uitgesplitst naar het aantal malen dubbel van de worp binnen eenzelfde beurt. We onderscheiden:

- 0 maal dubbel: het vakje is bereikt met een niet-dubbele worp (en daarmee is de beurt voorbij). Tot deze categorie behoren ook de boete-vervangende dubbele worpen vanuit de Gevangenis, omdat de spelregels bepalen dat in deze gevallen *niet* nogmaals mag worden gegooid;
- 1 maal dubbel: het vakje is bereikt met een dubbele worp die de eerste was binnen de beurt; nog tweemaal dubbel en men moet naar de Gevangenis;

- 2 maal dubbel: het vakje is bereikt met een dubbele worp die de tweede was binnen de beurt; nog éénmaal dubbel en men moet naar de Gevangenis.

Het aantal toestanden bedraagt daarmee 120. Daar komen er nog 3 bij voor de Gevangenis:

- Gevangenis na 0 beurten: gooit men dubbel, dan moet men eruit; anders resteren nog 2 beurten;
- Gevangenis na 1 beurt: gooit men dubbel, dan moet men eruit; anders resteert nog 1 beurt;
- Gevangenis na 2 beurten: men moet er met de volgende worp hoe dan ook uit (bij een niet-dubbele worp moet men bovendien 5.000 boete betalen, maar voor de bezoeken maakt dat niets uit).

De transitiekansen per worp worden in eerste instantie bepaald door de kansverdeling van het totaal aantal ogen met twee dobbelstenen: de pion wordt zoveel vakjes vooruit verplaatst als men ogen heeft gegooid; indien dubbel gaat de d -index (zie onder) 1 omhoog, maar bij een derde opeenvolgende dubbele worp gaat men naar de Gevangenis. Echter, enkele vakjes die aldus bereikt worden leiden soms (in één geval: altijd) tot een additionele verplaatsing. Er zijn zes vakjes die potentieel tot een verplaatsing leiden (drie vakjes Algemeen Fonds, drie vakjes Kans) en één vakje dat altijd tot een verplaatsing leidt, namelijk Ga naar de Gevangenis. De transitiematrix T kan dus worden gesplitst in twee componenten: een matrix D met transitiekansen volgens het gooien met twee dobbelstenen, en een matrix V met transitiekansen als gevolg van een eventuele additionele verplaatsing. Er geldt:

$$p' = p'T \quad \text{met} \quad p'1 = 1 \quad \text{en} \quad T = DV$$

waarbij 1 een vector bestaande uit enen voorstelt en $'$ transpositie aangeeft.

Hoe ziet dit stelsel vergelijkingen in 123 onbekenden er precies uit? Hiertoe moet eerst enige notatie worden ingevoerd:

N_a	het aantal verplaatsingskaartjes Algemeen Fonds: $N_a=3$
N_k	het aantal verplaatsingskaartjes Kans: $N_k=7$
N	het gemiddeld aantal trekbare kaartjes Algemeen Fonds, respectievelijk Kans: $N=15,7$ (zie bijlage 1)
$P_{k,d}$	de kans om met een worp k ogen te gooien, resp. niet-dubbel ($d=0$) en wel-dubbel ($d=1$). Voor alle waarden $k < 2$ en $k > 12$ is deze kans gelijk aan 0. Voor $k=2, \dots, 12$ bedragen de kansen:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	som
$P_{k,0}$	0	2/36	2/36	4/36	4/36	6/36	4/36	4/36	2/36	2/36	0	30/36
$P_{k,1}$	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	6/36
$P_{k,\cdot}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	36/36

Gewone worpen (matrix D voor vakjes 0–39)

Gooiend vanaf vakje i bereikt men vakje j door $j-i$ (mod 40) ogen te gooien. Bij een derde achtereenvolgende dubbele worp belandt men echter in de Gevangenis. Dit levert de volgende elementen voor de matrix D :

$$\begin{aligned}
 D_{i,d;j,0} &= P_{j-i(\bmod 40),0} & i,j=0,\dots,39; d=0,1,2 \\
 D_{i,d;j,d+1} &= P_{j-i(\bmod 40),1} & i,j=0,\dots,39; d=0,1 \\
 D_{i,2;40,0} &= P_{\cdot,1} & i=0,\dots,39
 \end{aligned}$$

De overige elementen van de rijen van matrix D voor vakjes 0-39 zijn 0.

Worpen vanuit de Gevangenis (matrix D voor vakje 40)

Vanaf de Gevangenis leidt elke dubbele worp van k ogen tot een verplaatsing naar vakje $10+k$. Indien men voor de derde achtereenvolgende beurt in de Gevangenis zit, leiden ook niet-dubbele worpen tot een dergelijke verplaatsing. Dit geeft de volgende elementen ongelijk 0 voor de matrix D vanuit de Gevangenis:

$$\begin{aligned}
 D_{40,d;10+j,0} &= P_{j,1} & j=2,\dots,12; d=0,1 \text{ (voortijdige dubbele worpen)} \\
 D_{40,2;10+j,0} &= P_{j,\cdot} & j=2,\dots,12 \text{ (verplicht uit de Gevangenis)} \\
 D_{40,d;40,d+1} &= P_{\cdot,0} & d=0,1 \text{ (blijven zitten in de Gevangenis)}
 \end{aligned}$$

De vergelijkingen voor dubbele worpen vanuit de Gevangenis leiden desondanks tot een toestand met index $d=0$, vanwege de regel dat bij een boete-vervangende dubbele worp vanuit de Gevangenis *niet* nogmaals gegooid mag worden.

Eventuele additionele verplaatsingen (matrix V)

In een worp op vakje i komen betekent niet altijd daar blijven. Vanaf Kans en Algemeen Fonds kan men worden doorgestuurd naar een ander vakje, en vanaf Ga naar de Gevangenis wordt men altijd doorgestuurd. Deze additionele verplaatsingen vinden als volgt hun weerslag in de matrix V :

Niet-verplaatsingsvakjes ($i \neq 2, 7, 17, 22, 30, 33, 36; d=0, 1, 2$):

$$V_{i,d;i,d} = 1$$

Algemeen Fonds ($i=2, 17, 33; d=0, 1, 2$):

$$V_{i,d;i,d} = 1 - N_a/N$$

$$V_{i,d;j,d} = 1/N \quad j=0,1 \text{ (Start, Dorpsstraat)}$$

$$V_{i,d;40,0} = 1/N \quad \text{(Ga direct naar de Gevangenis)}$$

Kans ($i=7, 22, 36; d=0, 1, 2$):

$$V_{i,d;i,d} = 1 - N_k/N$$

$$V_{i,d;j,d} = 1/N \quad j=0, 11, 15, 24, 39 \text{ (Start, Barteljorisstraat, Station West, Heerestraat, Kalverstraat)}$$

$$V_{i,d;40,0} = 1/N \quad \text{(Ga direct naar de Gevangenis)}$$

$$V_{7,d;4,d} = 1/N \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Inkomstenbelasting)}$$

$$V_{22,d;19,d} = 1/N \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Vreeburg)}$$

$$V_{36,d;33,d} = (1/N) \times (1 - N_a/N) \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Algemeen Fonds, niet gevolgd door een extra verplaatsing)}$$

$$V_{36,d;0,d} = (1/N) \times (1/N) \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Algemeen Fonds, gevolgd door een verplaatsing naar Start)}$$

$$V_{36,d;1,d} = (1/N) \times (1/N) \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Algemeen Fonds, gevolgd door een verplaatsing naar Dorpsstraat)}$$

$$V_{36,d;40,0} = (1/N) \times (1/N) \quad \text{(Ga drie plaatsen terug, naar Algemeen Fonds, gevolgd door een verplaatsing naar de Gevangenis)}$$

Ga naar de Gevangenis ($i=30$; $d=0,1,2$):

$$V_{30,d,40,0} = 1$$

De overige elementen van matrix V zijn 0.

Nu D en V bekend zijn, kan T worden bepaald via matrixvermenigvuldiging en p door het stelsel stationaire vergelijkingen op te lossen. De elementen van p kunnen worden geïnterpreteerd als de bezoekkans per worp: $p(i)$ is de kans dat na een groot aantal worpen het i -de vakje bezet wordt. Het zijn deze bezoekkansen per worp die van belang zijn voor het rendement van de verschillende straten.

Het stelsel vergelijkingen beschrijft een Markov-keten met het aantal worpen als tijdparameter en als toestandsruimte de vakjes waarop de worp eindigt, onderscheiden naar het aantal dubbele worpen binnen één beurt. In plaats van het aantal *worpen* hadden we ook een andere tijdparameter kunnen kiezen, bijvoorbeeld het aantal *beurten*. De toestandsruimte wordt dan in principe kleiner, omdat vakjes die met een dubbele worp zijn bereikt niet als toestand meetellen; zij zijn slechts een tussenstap op weg naar het einde van de beurt. De transitiematrix per beurt ziet er anders uit dan de matrix per worp, maar kan wel uit de elementen van matrices D en V worden verkregen.

Omdat de bezoekkansen per worp voldoen aan de stationaire vergelijkingen van een Markov-keten voldoen, kunnen de bezoekkansen *per beurt* ook direct uit de bezoekkansen *per worp* worden verkregen. Men stelt eenvoudigweg al die elementen van p op 0 die niet corresponderen met het einde van een worp (dit zijn dus alle elementen met $i=0, \dots, 39$ en $d \neq 0$); de overige elementen van p worden genormaliseerd zodat hun som gelijk is aan 1. Het is eenvoudig aan te tonen dat deze werkwijze equivalent is met het bepalen van de limietkansen voor een transitiematrix per beurt.

3.3 De theoretische bezoekkansen

De bezoekkansen per worp die de oplossing van het stelsel van vergelijkingen vormen staan vermeld in Tabel 1. Tabel 2 geeft een samenvatting van enkele afgeleide grootheden. Hoewel men per worp gemiddeld 7 ogen gooit, is het aantal plaatsen dat men gemiddeld per worp vooruit gaat slechts 6,3616, doordat sommige worpen niet tot een verplaatsing leiden (blijven zitten in de Gevangenis) en doordat men soms achteruit moet. Per Start-passage zijn gemiddeld dus 6,2878 (namelijk $40/6,3616$) worpen nodig. Een in Monopoly belangrijke tijdseenheid is het interval tussen twee opeenvolgende Start-passages. Immers, per 'Start-passage' ontvangt men 20.000 gulden Start-geld van de Bank. De verwachte bezoekfrequentie per Start-passage aan een vakje is gelijk aan de bezoekkans per worp vermenigvuldigd met 6,2878.

Het meest bezochte vakje is de Gevangenis. Van elke 100 worpen worden er 9,47 gedaan vanuit de Gevangenis, waarvan een groot deel weliswaar dient om het verblijf in de Gevangenis nog wat te rekken (5,72), maar dan nog blijven er 3,75 worpen over die *vanuit* de Gevangenis leiden. Daarbij moeten dan nog de 2,14 worpen vanaf Slechts op Bezoek worden opgeteld. De relatief hoge bezoekkansen voor Utrecht zijn vrijwel uitsluitend aan dit Gevangenis-effect toe te schrijven, hoewel bij Vreeburg ook nog het fameuze "Ga drie plaatsen terug" een bescheiden rol speelt. Neude en Biltstraat scoren extra goed, omdat zij ook nog profiteren van de kans om met een dubbele worp voortijdig de Gevangenis te verlaten.

Per 100-Start-passages bedraagt het verwachte aantal keren dat men in de Gevangenis terecht komt 23,56 (namelijk $100 \times 6,2878 \times p_{40,0}$ waarbij $p_{40,0} = 3,7468\%$). Van deze 23,56 is 15,76 afkomstig van het vakje Ga naar de Gevangenis; 5,73 loopt via het Kans- of Algemeen Fonds-kaartje "Ga direct naar de Gevangenis"; en de resterende 2,06 is het gevolg van drie keer achter elkaar dubbel gooien in één worp.

Dat het gemiddelde aantal ogen per worp 7 bedraagt, is opvallend goed in de tabel terug te vinden: relatief hoge bezoekkansen zijn er voor Heerestraat (tweemaal 7 posities vanaf de Gevangenis, plus ook nog een Kans-kaartje) en Hofplein (driemaal 7 posities vanaf de Gevangenis). Het meest beroerde vakje is de Leidschestraat, 7 posities voorbij Ga naar de Gevangenis waar geen worp kan beginnen.

Interessant is het gemiddeld aantal ogen waarmee men de vakjes Electriciteitsbedrijf respectievelijk Waterleiding bereikt (vooropgesteld dat men het vakje al bereikt), hetgeen van belang is voor het rendement van de nutsbedrijven. Beide gemiddelden wijken af van 7, omdat de bezoekkansen voor de vakjes *van waar* het nutsbedrijf wordt bereikt ongelijk verdeeld zijn. Het Electriciteitsbedrijf wordt relatief vaak bereikt met dubbel-één vanuit de Gevangenis, hetgeen het gemiddelde omlaag trekt, tot 6,53. De Waterleiding moet het vooral hebben van hoge worpen vanaf Utrecht, hetgeen het gemiddelde iets optrekt, tot 7,04.

Specifieke Kans- en Algemeen Fonds-kaartjes verhogen de bezoekkansen, getuige de piekjes op vakjes als Dorpsstraat, Barteljorisstraat, Station West, Kalverstraat en Start (de laatste via *twee* kaartjes). Zelfs Inkomstenbelasting profiteert van de bescheiden mogelijkheid om op het Kans-vakje tussen Steenstraat en Ketelstraat "Ga drie plaatsen terug" te trekken, terwijl Inkomstenbelasting toch op een ongunstige tweemaal 7 posities vanaf Ga naar de Gevangenis is gelegen.

Als we ons concentreren op de complete groepen en corrigeren voor het aantal vakjes per groep, bevestigen de resultaten van de kansberekening wat iedereen uit eigen ervaring al weet: Utrecht en Groningen worden relatief vaak bezocht; Arnhem, Amsterdam, Het Dorp en in iets mindere mate ook Haarlem worden relatief weinig bezocht.

Tabel 1. Bezoekkansen per worp (in procenten)

<i>i</i>	naam vakje	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	totaal
0	Start	2,4861	0,3691	0,0574	2,9127
1	Dorpsstraat (Het Dorp)	2,0200	0,3752	0,0671	2,4623
2	Algemeen Fonds	1,4084	0,2093	0,0308	1,6485
3	Brink (Het Dorp)	1,7035	0,3141	0,0581	2,0757
4	Inkomstenbelasting	1,8773	0,3173	0,0475	2,2421
5	Station Zuid	1,7747	0,3030	0,0568	2,1345
6	Steenstraat (Arnhem)	1,8565	0,2913	0,0446	2,1924
7	Kans	1,0308	0,1693	0,0315	1,2316
8	Ketelstraat (Arnhem)	1,8906	0,2875	0,0448	2,2228
9	Velperplein (Arnhem)	1,8421	0,2829	0,0520	2,1771
10	Slechts op Bezoek	1,7783	0,3124	0,0482	2,1389
11	Barteljorisstraat (Haarlem)	2,1414	0,3504	0,0607	2,5525
12	Electriciteitsbedrijf	1,9519	0,3138	0,0496	2,3153
13	Zijlweg (Haarlem)	1,8268	0,2920	0,0499	2,1686
14	Houtstraat (Haarlem)	2,0831	0,2990	0,0481	2,4301
15	Station West	2,4158	0,3483	0,0576	2,8217
16	Neude (Utrecht)	2,3096	0,3177	0,0506	2,6779
17	Algemeen Fonds	1,8327	0,2479	0,0392	2,1198
18	Biltstraat (Utrecht)	2,4391	0,3297	0,0506	2,8194
19	Vreeburg (Utrecht)	2,4075	0,3310	0,0504	2,7888
20	Vrij Parkeren	2,3998	0,3459	0,0517	2,7974
21	A-Kerkhof (Groningen)	2,1939	0,3463	0,0515	2,5916
22	Kans	1,3075	0,1995	0,0295	1,5365
23	Groote Markt (Groningen)	2,1381	0,3561	0,0532	2,5474
24	Heerestraat (Groningen)	2,5250	0,4086	0,0602	2,9938
25	Station Noord	2,1448	0,3560	0,0534	2,5541
26	Spui ('s-Gravenhage)	2,1448	0,3629	0,0528	2,5605
27	Plein ('s-Gravenhage)	2,1224	0,3648	0,0552	2,5424
28	Waterleiding	2,0890	0,3646	0,0546	2,5082
29	Lange Poten ('s-Gravenhage)	2,0663	0,3566	0,0556	2,4785
(30)	Ga naar de Gevangenis	-	-	-	-)
31	Hofplein (Rotterdam)	2,1010	0,3631	0,0586	2,5228
32	Blaak (Rotterdam)	2,1147	0,2907	0,0467	2,4522
33	Algemeen Fonds	1,6848	0,3024	0,0506	2,0379
34	Coolsingel (Rotterdam)	1,9941	0,2828	0,0452	2,3221
35	Station Oost	1,8450	0,3405	0,0583	2,2438
36	Kans	0,9909	0,1673	0,0263	1,1845
37	Leidschestraat (Amsterdam)	1,6326	0,3323	0,0579	2,0228
38	Extra Belasting	1,7290	0,2593	0,0408	2,0290
39	Kalverstraat (Amsterdam)	2,0236	0,3797	0,0673	2,4706
	SUBTOTAAL	76,3235	12,2407	1,9647	90,5289
40	Gevangenis	3,7468	3,1223	2,6020	9,4711
	TOTAAL	80,0703	15,3630	4,5667	100,0000

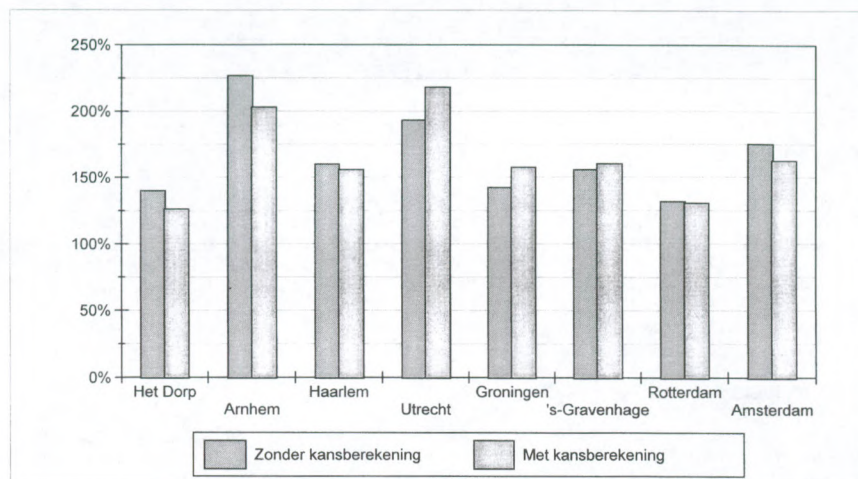
Tabel 2. Kansberekening: enkele afgeleide grootheden

kleur	naam groep	aantal vakjes	bezoekverwachting per complete groep	100 Start-passages gemiddeld vakje	indexcijfer totaal grond = 100
donkerpaars	Het Dorp	2	28,5335	14,2668	92,54
lichtblauw	Arnhem	3	41,4509	13,8170	89,63
lichtpaars	Haarlem	3	44,9656	14,9885	97,23
oranje	Utrecht	3	52,1013	17,3671	112,65
rood	Groningen	3	51,1374	17,0458	110,57
geel	's-Gravenhage	3	47,6699	15,8900	103,07
groen	Rotterdam	3	45,8819	15,2940	99,21
donkerblauw	Amsterdam	2	28,2532	14,1266	91,63
	Stations	4	61,3317	15,3329	99,46
	Nutsbedrijven	2	30,3290	15,1645	98,37
	Totaal grond	28	431,6547	15,4162	100,00
diversen					
Gemiddeld aantal ogen Electriciteitsbedrijf			6,5275		
Gemiddeld aantal ogen Waterleiding			7,0420		
Gemiddeld aantal plaatsen vooruit per worp			6,3616		
Idem, exclusief blijven in Gevangenis			6,7478		

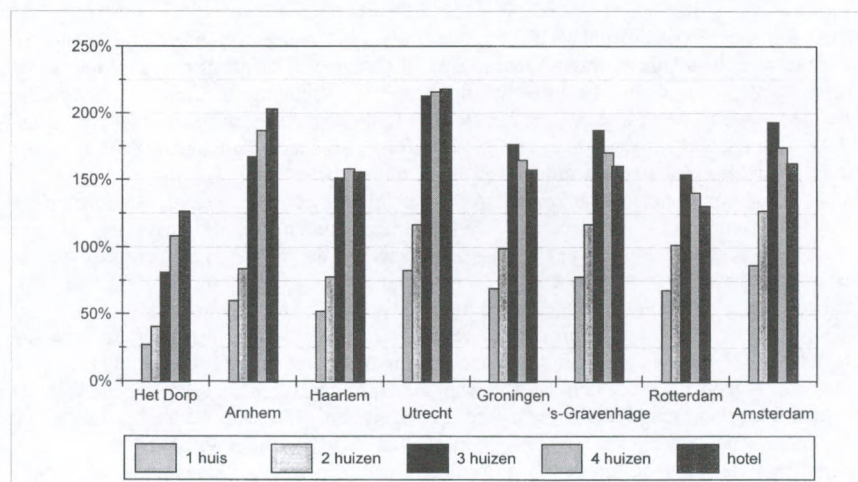
4 Rendementen inclusief kansverdeling

De verwachte opbrengst van een straat is de huur vermenigvuldigd met de kans dat een tegenstander de straat bezoekt. Nu is zo'n kans niet eenduidig te definiëren, omdat de kans afhangt van het aantal worpen of beurten waarover men rekent. Omwille van een rendementsvergelijking tussen de verschillende beleggingsobjecten zijn gelukkig uitsluitend de *relatieve* bezoekkansen van belang. De normalisatie is dus betrekkelijk willekeurig. Wij hebben ervoor gekozen om de bezoekkansen zodanig te normaliseren dat de relatieve bezoekkans voor een willekeurig onroerendgoedvakje (totaal zijn dat er 28) gelijk is aan 1. Hiertoe moeten de bezoekkansen per worp uit tabel 1 worden gedeeld door 2,4518. De bezoekfrequenties per Start-passage uit tabel 2 moeten worden gedeeld door 30,83 voor een stad met twee straten (ook voor de nutsbedrijven), door 46,25 voor een stad met drie straten, en door 61,66 voor de volledige set stations.

Figuur 2. Rendementen hotels (exclusief grondprijs)



Figuur 3. Rendement per groep met effect kansberekening (exclusief grondprijs)



Tabel 3. Rendementen zonder en met het effect van de kansverdeling

aantal huizen:	gemiddeld rendement inclusief grond (in %)						gem. rendement exclusief grond (in %)					
	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
ZONDER KANSVERDELING:												
Het Dorp	10,00	13,64	28,13	64,29	92,31	112,90	30,00	45,00	90,00	120,00	140,00	
Arnhem	12,50	21,28	45,16	109,09	135,87	158,88	66,67	93,33	186,67	208,33	226,67	
Haarlem	14,55	21,62	46,15	104,48	118,90	123,71	53,33	80,00	155,56	162,50	160,00	
Utrecht	15,71	25,58	53,45	116,44	130,68	140,78	73,33	103,33	188,89	191,67	193,33	
Groningen	16,47	24,78	50,63	105,91	107,86	109,22	62,22	88,89	159,26	148,61	142,22	
's-Gravenhage	17,00	27,20	60,00	113,95	114,42	114,75	75,56	113,33	181,48	165,28	155,56	
Rotterdam	17,39	26,97	58,02	102,94	102,41	100,77	68,33	102,50	155,56	141,67	131,67	
Amsterdam	22,67	32,61	70,97	128,21	127,66	127,27	93,75	137,50	208,33	187,50	175,00	
MET KANSVERDELING:												
Het Dorp	8,99	12,26	25,29	57,80	83,00	101,94	26,97	40,46	80,92	107,90	126,41	
Arnhem	11,19	19,05	40,46	97,74	121,73	142,36	59,70	83,62	167,25	186,65	203,10	
Haarlem	14,16	21,05	44,93	101,65	115,69	120,43	51,92	77,88	151,35	158,11	155,75	
Utrecht	17,71	28,83	60,23	131,21	147,25	158,62	82,65	116,45	212,85	215,97	217,84	
Groningen	18,28	27,50	56,35	117,39	119,50	120,96	69,06	98,93	176,52	164,64	157,51	
's-Gravenhage	17,51	28,02	61,81	117,41	117,90	118,25	77,83	116,75	186,98	170,30	160,29	
Rotterdam	17,23	26,70	57,43	101,96	101,46	99,82	67,64	101,46	154,07	140,36	130,44	
Amsterdam	21,14	30,08	65,62	118,89	118,53	118,29	86,48	127,14	193,19	174,10	162,64	

Figuur 2 en tabel 3 (zie ook bijlage 2) laten zien hoe de rendementen veranderen als gevolg van de verschillen in relatieve bezoeken. Was in paragraaf 2 Arnhem nog koploper in de categorie "stad met hotels", na correctie voor bezoekfrequentie neemt Utrecht de koppositie over. Arnhem blijft een goede tweede. Het Dorp en Rotterdam scoorden zonder kansberekening al laag in gemiddeld rendement, en blijven dat ook met kansberekening doen. De verschillen tussen de overige vier steden worden vrijwel geëlimineerd.

Het introduceren van de relatieve bezoeken leidt tot een ware nek-aan-nekrace tussen de steden Groningen en 's-Gravenhage. De verschillen worden uiterst klein, en wie de nipte winnaar wordt is afhankelijk van de vraag of de prijs van de grond wel of niet moet worden meegerekend. Zonder de grondprijs blijft 's-Gravenhage Groningen licht voor (160 versus 158): wie beide steden bezit en slechts geld heeft voor één set hotels, zet zijn hotels bij voorkeur op 's-Gravenhage. Met de grondprijs meegerekend slaat het voordeel om naar de kant van Groningen (121 versus 118); met drie huizen scoren beide steden gelijk (beide 117).

Figuur 4 geeft de rendementen (exclusief grondprijs) per groep, gecorrigeerd voor de relatieve bezoeken, naar het aantal gebouwde huizen per straat. Daarbij is uitsluitend gekeken naar bebouwingen waarin op elke straat van de groep een gelijk aantal huizen staat. Bij een *ongelijk* aantal huizen per straat (het maximaal toegestane bebouwingsverschil is één huis) is het uiteraard van belang, op welke straat de meeste huizen worden neergezet. Voor elke groep geldt dat het rendement zonder kansberekening op de 'hoge' straat altijd groter is dan op de 'lage' straat of straten. In geen enkel geval is het effect van de bezoeken zodanig

groot dat dit rendementsvoordeel voor de 'hoge' straat teniet wordt gedaan. Ook na correctie voor de bezoekkansen moet het eerste extra huis dus altijd op de 'hoge' (duurste) straat worden neergezet. Voor de lage straten binnen groepen met drie straten werken de relatieve bezoekkansen soms in het voordeel van de laagstliggende straat, soms in het voordeel van de middelste straat. Per groep is de beste 'lage' straat, onafhankelijk van het aantal huizen, de volgende (zie ook bijlage 3):

Arnhem:	Ketelstraat	(midden)
Haarlem:	Barteljorisstraat	(laag)
Utrecht:	Biltstraat	(midden)
Groningen:	A-Kerkhof	(laag)
's-Gravenhage:	Spui	(laag)
Rotterdam:	Hofplein	(laag)

5 Besluit

Monopoly is een spel dat velen in hun jeugd gespeeld hebben en later opnieuw als vader of moeder. Daarnaast zijn er de echte hobbyisten of fanatiekelingen. Het spel bevat vele elementen waarmee economen vertrouwd zijn, zoals homogeniteit van de graad nul in de prijzen, aanvankelijk toe- en daarna afnemende meeropbrengsten, en rendementsanalyse. Het gooien met de dobbelstenen, de Kans- en Algemeen Fonds-kaarten, en in het bijzonder de regels ten aanzien van de Gevangenis, beïnvloeden de kans om een zeker veld te bezoeken en geven daarmee een geheel ander zicht op de aanvankelijk berekende rendementen.

De bezoekkansen per veld worden bepaald met behulp van een stelsel vergelijkingen in 123 onbekenden. Simulatie met 12 miljoen keer gooien levert uiteraard (ongeveer) dezelfde uitkomsten op. Het zolang mogelijk blijven zitten in de Gevangenis leidt er toe dat meer dan één op de negen worpen daar wordt gedaan. Samen met Slechts op Bezoek wordt in 5,89% van de worpen een verplaatsing gestart vanaf veld 10. In combinatie met het feit dat men met twee dobbelstenen gemiddeld zeven gooit en de Kans-kaart "Ga verder naar Heerestraat" leidt dit er toe dat Heerestraat (twee maal zeven plaatsen vanaf Gevangenis/Slechts op Bezoek) de best bezochte straat is met één bezoek op 33 worpen. Leidschestraat, dat zeven velden vanaf Ga naar de Gevangenis ligt, is de slechtst bezochte straat met één op 49 worpen. Als met deze relatieve bezoekkansen rekening wordt gehouden, verdringt Utrecht Arnhem naar de tweede plaats in het rendementsklassement. Interessant is verder dat het rendement inclusief grondprijs nu voor Groningen hoger is dan dat van het kwalitatief betere 's-Gravenhage.

Rendementen herzien voor kansen en wel/niet inclusief grond geven een eerste indruk welke de optimale strategie van een speler zou kunnen zijn. Er zijn daarbij echter enkele complicerende factoren. Grond kan niet vrij worden gekocht, maar alleen als de speler het relevante veld als eerste bezoekt. Later kan door middel van ruil getracht worden complete groepen of steden te verwerven. De prijs die dan voor grond moet worden betaald zal in zekere mate bovenvermelde rendementsverschillen weerspiegelen. Daarnaast speelt nog als factor mee de beschikbare hoeveelheid geld. Het grote rendement wordt pas behaald vanaf het derde huis per straat. Wie beschikt over 60.000 gulden kan per straat vier huizen in Arnhem, twee in Utrecht en één in Rotterdam bouwen. Bij lage geldbedragen verslaat Arnhem dan ook alle andere steden. Bij hoge geldbedragen kan in Arnhem echter niet worden dóórgebouwd, waardoor het dan uiteindelijk verliest. Voor grotere geldbedragen verslaat Utrecht alle andere

steden, terwijl voor nog grotere bedragen Amsterdam alle steden op Utrecht na verslaat. Bij zeer grote bedragen gaan uitsluitend de drie laagste steden op den duur failliet. Een en ander moge een verklaring zijn voor de extra lange duur van het spel wanneer de spelers besluiten meer geld in omloop te brengen (aan het begin van het spel) en/of te houden (via een "huisregel" Vrij Parkeren).

Alle genoemde berekeningen zijn gebaseerd op theoretisch gemiddelde kosten en inkomsten. Wie elke ronde op hotels op Het Dorp komt gaat uiteraard ook failliet. Daarnaast speelt een rol dat de optimale strategie varieert met de beschikbare hoeveelheid geld. Al met al is het duidelijk dat een complete strategie voor het spel met inbegrip van ruilstrategieën niet te geven is. Het moet blijven bij enkele aanwijzingen in welke richting en wanneer het geluk gezocht moet worden.

Verantwoording

De auteurs danken Ton Volgenant, Martin van der Ende, en Ben van der Genugten voor waardevol commentaar bij een eerdere versie van dit artikel.

Literatuur

- van Orten, J. (1993), *Vanaf nu: winnen met Monopoly*. Kampen, Kok Lyra.
- de Raat, F. (1995), Monopoly, populairste spel, bestaat zestig jaar. *NRC Handelsblad*, 30 december 1995, p. 15.
- Stewart, I. (1996), Mathematical recreations: Monopoly revisited. *Scientific American*, oktober 1996, pp. 92-95.

Bijlage 1. Spelregeltechnische zaken

Wanneer uit de Gevangenis?

Volgens de officiële spelregels (die door ons zijn aangehouden) geldt: indien bij de derde worp nog steeds niet dubbel, dan 5.000 betalen en *met de gedane* worp uit de Gevangenis. Er zijn dan dus maximaal drie achtereenvolgende beurten die eindigen in de Gevangenis. In sommige (oudere) versies van de spelregels luidt de regel: indien bij de derde worp nog steeds niet dubbel, dan 5.000 betalen en *in de volgende beurt* met een nieuwe worp uit de Gevangenis. Er zijn dan dus vier achtereenvolgende beurten die eindigen in de Gevangenis. Deze alternatieve regel leidt tot een iets andere kansverdeling dan de officiële spelregel.

Wat te doen na een boete-vervangende dubbele worp vanuit de Gevangenis?

Als men in de Gevangenis zit en dubbel gooit, hoeft men weliswaar geen 5.000 gulden boete te betalen, maar *moet* de Gevangenis worden verlaten. In de Amerikaanse versie van Monopoly staat expliciet in de spelregels vermeld dat men in zo'n geval, ondanks de dubbele worp, *niet* nogmaals mag/moet gooien. In de Nederlandse spelregels staat er niets over geschreven, zodat er twee interpretaties mogelijk zijn: (1) een dubbele worp uit de Gevangenis is als elke andere dubbele worp en dus mag/moet men nogmaals gooien; (2) met het vervallen van de 5.000 Gevangenis-boete is het effect van de dubbele worp 'uitgewerkt' en mag men dus niet nogmaals gooien. Navraag bij de leverancier van het Nederlandse spel leert dat interpretatie (2) de officiële is.

Betaal 1.000 gulden boete of neem een Kans-kaart

Er zijn drie verplaatsingskaartjes Algemeen Fonds: Start, Gevangenis, Dorpsstraat. Een vierde potentieel relevant Algemeen Fonds-kaartje is "Betaal 1.000 gulden boete of neem een Kans-kaart". Via Kans zou dit ook tot een verplaatsing kunnen leiden. In de fase van het spel waarin nog volop straten te koop zijn is het raadzaam om de Kans-kaart te nemen. Na deze fase zal men echter vrijwel altijd de 1.000 boete betalen; het risico is te groot om naar een hotel op de Kalverstraat te worden gestuurd of te worden aangeslagen voor straatgeld. Daarom is in onze kansberekening dit Algemeen Fonds-kaartje niet als potentieel verplaatsingskaartje beschouwd.

De kans op een specifiek verplaatsingskaartje Kans of Algemeen Fonds

Twee subtiële problemen die een rol spelen bij het berekenen van de bezoekkansen, hebben te maken met de kaartjes van Kans en Algemeen Fonds:

- 1 In de werkelijkheid worden de kaartjes bij aanvang van het spel geschud. In de loop van het spel verandert de volgorde der kaartjes niet meer (behoudens "Verlaat de Gevangenis zonder betalen", zie onder punt 2). Zodra een kaartje aan de beurt is geweest, duurt het geruime tijd voor het nog eens komt. Met dit "interval"-effect is door ons geen rekening gehouden: bij het bereiken van een vakje Kans is elk Kans-kaartje even waarschijnlijk, en hetzelfde geldt voor Algemeen Fonds. Dit is equivalent met het schudden van de kaartjes na elke trekking.
- 2 Zowel Kans als Algemeen Fonds kent het kaartje "Verlaat de Gevangenis zonder betalen". Dit kaartje verdwijnt na trekking uit de stapel en keert pas weer terug op het moment dat het wordt ingeleverd om de Gevangenis-boete van 5.000 boete te voldoen. Het rouleren van deze kaartjes beïnvloedt de kans om via Algemeen Fonds of Kans een verplaatsing naar een ander vakje te ondergaan: met "Verlaat de Gevangenis zonder betalen" *in* de stapel is de kans

op een specifieke verplaatsing $1/16$, uit de stapel is de kans $1/15$. Een computer-simulatie over 12 miljoen worpen wijst uit dat “Verlaat ...” gedurende ongeveer 30% uit de roulatie is. Daarmee komt de kans op een specifiek kaartje uit op $1/15,7$.

Vrij Parkeren

Volgens de officiële spelregels, die door ons zijn aangehouden, heeft een bezoek aan het vakje Vrij Parkeren géén financiële consequenties. Een klassieke “huisregel”, die inmiddels ook zijn weg heeft gevonden naar de spelregels voor sommige in omloop zijnde Monopoly-versies, is dat alle boetes voor de Gevangenis en krachtens Kans en Algemeen Fonds op het midden van het speelbord worden gelegd; wie op Vrij Parkeren komt krijgt dan al het geld dat zich op dat moment in de boete-pot bevindt. Deze huisregel verhoogt uiteraard de verwachte opbrengst per Start-passage. Als er géén huizen of hotels op het bord staan, wordt het verwachte bedrag aan boetes Gevangenis, Algemeen Fonds en Kans precies gecompenseerd door de verwachte opbrengst van Vrij Parkeren. Mèt huizen of hotel geldt, dat een speler met minder dan gemiddeld onroerend goed, gemiddeld een bescheiden bedrag van zijn tegenstander ontvangt via Kans/Vrij Parkeren, als gevolg van de kaartjes “Repareer uw huizen” en “U wordt aangeslagen voor straatgeld”; per Start-passage is deze inkomensoverdracht ongeveer 100 per huis en 350 per hotel. Bij deze “huisregel” kan men overigens nog twisten over de vraag of Straatgeld telt als boete voor de pot, of als belasting voor de bank.

Bijlage 2. Rendementen per groep/stad, zonder en met kansverdeling

aantal huizen	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
---------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

ZONDER KANSVERDELING											
Kosten:	totale kosten (× 1000)						marginale kosten (× 1000)				
Het Dorp	12	22	32	42	52	62	10	10	10	10	10
Arnhem	32	47	62	77	92	107	15	15	15	15	15
Haarlem	44	74	104	134	164	194	30	30	30	30	30
Utrecht	56	86	116	146	176	206	30	30	30	30	30
Groningen	68	113	158	203	248	293	45	45	45	45	45
's-Gravenhage	80	125	170	215	260	305	45	45	45	45	45
Rotterdam	92	152	212	272	332	392	60	60	60	60	60
Amsterdam	75	115	155	195	235	275	40	40	40	40	40
Stations	80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Opbrengsten:	totale opbrengsten (× 1000)						marginale opbrengsten (× 1000)				
Het Dorp	1,2	3,0	9,0	27,0	48,0	70,0	1,8	6,0	18,0	21,0	22,0
Arnhem	4,0	10,0	28,0	84,0	125,0	170,0	6,0	18,0	56,0	41,0	45,0
Haarlem	6,4	16,0	48,0	140,0	195,0	240,0	9,6	32,0	92,0	55,0	45,0
Utrecht	8,8	22,0	62,0	170,0	230,0	290,0	13,2	40,0	108,0	60,0	60,0
Groningen	11,2	28,0	80,0	215,0	267,5	320,0	16,8	52,0	135,0	52,5	52,5
's-Gravenhage	13,6	34,0	102,0	245,0	297,5	350,0	20,4	68,0	143,0	52,5	52,5
Rotterdam	16,0	41,0	123,0	280,0	340,0	395,0	25,0	82,0	157,0	60,0	55,0
Amsterdam	17,0	37,5	110,0	250,0	300,0	350,0	20,5	72,5	140,0	50,0	50,0
Stations	80,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	14,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen incl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	10,00	13,64	28,13	64,29	92,31	112,90	18,00	60,00	180,00	210,00	220,00
Arnhem	12,50	21,28	45,16	109,09	135,87	158,88	40,00	120,00	373,33	273,33	300,00
Haarlem	14,55	21,62	46,15	104,48	118,90	123,71	32,00	106,67	306,67	183,33	150,00
Utrecht	15,71	25,58	53,45	116,44	130,68	140,78	44,00	133,33	360,00	200,00	200,00
Groningen	16,47	24,78	50,63	105,91	107,86	109,22	37,33	115,56	300,00	116,67	116,67
's-Gravenhage	17,00	27,20	60,00	113,95	114,42	114,75	45,33	151,11	317,78	116,67	116,67
Rotterdam	17,39	26,97	58,02	102,94	102,41	100,77	41,67	136,67	261,67	100,00	91,67
Amsterdam	22,67	32,61	70,97	128,21	127,66	127,27	51,25	181,25	350,00	125,00	125,00
Stations	100,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	46,67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen excl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	-	30,00	45,00	90,00	120,00	140,00	18,00	60,00	180,00	210,00	220,00
Arnhem	-	66,67	93,33	186,67	208,33	226,67	40,00	120,00	373,33	273,33	300,00
Haarlem	-	53,33	80,00	155,56	162,50	160,00	32,00	106,67	306,67	183,33	150,00
Utrecht	-	73,33	103,33	188,89	191,67	193,33	44,00	133,33	360,00	200,00	200,00
Groningen	-	62,22	88,89	159,26	148,61	142,22	37,33	115,56	300,00	116,67	116,67
's-Gravenhage	-	75,56	113,33	181,48	165,28	155,56	45,33	151,11	317,78	116,67	116,67
Rotterdam	-	68,33	102,50	155,56	141,67	131,67	41,67	136,67	261,67	100,00	91,67
Amsterdam	-	93,75	137,50	208,33	187,50	175,00	51,25	181,25	350,00	125,00	125,00

Bijlage 2. Rendementen per groep/stad, zonder en met kansverdeling (vervolg)

aantal huizen	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
MET KANSVERDELING											
Kosten:	totale kosten (× 1000)						marginale kosten (× 1000)				
Het Dorp	12	22	32	42	52	62	10	10	10	10	10
Arnhem	32	47	62	77	92	107	15	15	15	15	15
Haarlem	44	74	104	134	164	194	30	30	30	30	30
Utrecht	56	86	116	146	176	206	30	30	30	30	30
Groningen	68	113	158	203	248	293	45	45	45	45	45
's-Gravenhage	80	125	170	215	260	305	45	45	45	45	45
Rotterdam	92	152	212	272	332	392	60	60	60	60	60
Amsterdam	75	115	155	195	235	275	40	40	40	40	40
Stations	80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Relatieve opbrengsten:	totale opbrengsten (× 1000)						marginale opbrengsten (× 1000)				
Het Dorp	1,08	2,70	8,09	24,28	43,16	63,20	1,62	5,39	16,18	18,88	20,04
Arnhem	3,58	8,95	25,09	75,26	111,99	152,32	5,37	16,13	50,17	36,73	40,33
Haarlem	6,23	15,58	46,73	136,21	189,73	233,63	9,35	31,15	89,49	53,52	43,89
Utrecht	9,92	24,79	69,87	191,57	259,16	326,75	14,88	45,07	121,70	67,59	67,59
Groningen	12,43	31,08	89,03	238,30	296,35	354,40	18,65	57,96	149,27	58,05	58,05
's-Gravenhage	14,01	35,02	105,07	252,43	306,54	360,66	21,01	70,05	147,35	54,11	54,11
Rotterdam	15,86	40,58	121,75	277,33	336,85	391,31	24,73	81,17	155,58	59,52	54,45
Amsterdam	15,85	34,59	101,71	231,83	278,56	325,29	18,74	67,12	130,12	46,73	46,73
Stations	79,57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	13,37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen incl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	8,99	12,26	25,29	57,80	83,00	101,94	16,18	53,95	161,85	188,82	200,44
Arnhem	11,19	19,05	40,46	97,74	121,73	142,36	35,82	107,55	334,49	244,87	268,88
Haarlem	14,16	21,05	44,93	101,65	115,69	120,43	31,15	103,83	298,28	178,40	146,31
Utrecht	17,71	28,83	60,23	131,21	147,25	158,62	49,59	150,24	405,67	225,31	225,31
Groningen	18,28	27,50	56,35	117,39	119,50	120,96	41,43	128,80	331,71	129,00	129,00
's-Gravenhage	17,51	28,02	61,81	117,41	117,90	118,25	46,70	155,67	327,45	120,25	120,25
Rotterdam	17,23	26,70	57,43	101,96	101,46	99,82	41,22	135,28	259,29	99,21	90,75
Amsterdam	21,14	30,08	65,62	118,89	118,53	118,29	46,85	167,80	325,29	116,83	116,83
Stations	99,46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	44,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen excl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	-	26,97	40,46	80,92	107,90	126,41	16,18	53,95	161,85	188,82	200,44
Arnhem	-	59,70	83,62	167,25	186,65	203,10	35,82	107,55	334,49	244,87	268,88
Haarlem	-	51,92	77,88	151,35	158,11	155,75	31,15	103,83	298,28	178,40	146,31
Utrecht	-	82,65	116,45	212,85	215,97	217,84	49,59	150,24	405,67	225,31	225,31
Groningen	-	69,06	98,93	176,52	164,64	157,51	41,43	128,80	331,71	129,00	129,00
's-Gravenhage	-	77,83	116,75	186,98	170,30	160,29	46,70	155,67	327,45	120,25	120,25
Rotterdam	-	67,64	101,46	154,07	140,36	130,44	41,22	135,28	259,29	99,21	90,75
Amsterdam	-	86,48	127,14	193,19	174,10	162,64	46,85	167,80	325,29	116,83	116,83

Bijlage 2. Rendementen per groep/stad, zonder en met kansverdeling (vervolg)

aantal huizen	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
MET KANSVERDELING											
Kosten:	totale kosten (× 1000)						marginale kosten (× 1000)				
Het Dorp	12	22	32	42	52	62	10	10	10	10	10
Arnhem	32	47	62	77	92	107	15	15	15	15	15
Haarlem	44	74	104	134	164	194	30	30	30	30	30
Utrecht	56	86	116	146	176	206	30	30	30	30	30
Groningen	68	113	158	203	248	293	45	45	45	45	45
's-Gravenhage	80	125	170	215	260	305	45	45	45	45	45
Rotterdam	92	152	212	272	332	392	60	60	60	60	60
Amsterdam	75	115	155	195	235	275	40	40	40	40	40
Stations	80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Relatieve opbrengsten:	totale opbrengsten (× 1000)						marginale opbrengsten (× 1000)				
Het Dorp	1,08	2,70	8,09	24,28	43,16	63,20	1,62	5,39	16,18	18,88	20,04
Arnhem	3,58	8,95	25,09	75,26	111,99	152,32	5,37	16,13	50,17	36,73	40,33
Haarlem	6,23	15,58	46,73	136,21	189,73	233,63	9,35	31,15	89,49	53,52	43,89
Utrecht	9,92	24,79	69,87	191,57	259,16	326,75	14,88	45,07	121,70	67,59	67,59
Groningen	12,43	31,08	89,03	238,30	296,35	354,40	18,65	57,96	149,27	58,05	58,05
's-Gravenhage	14,01	35,02	105,07	252,43	306,54	360,66	21,01	70,05	147,35	54,11	54,11
Rotterdam	15,86	40,58	121,75	277,33	336,85	391,31	24,73	81,17	155,58	59,52	54,45
Amsterdam	15,85	34,59	101,71	231,83	278,56	325,29	18,74	67,12	130,12	46,73	46,73
Stations	79,57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	13,37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen incl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	8,99	12,26	25,29	57,80	83,00	101,94	16,18	53,95	161,85	188,82	200,44
Arnhem	11,19	19,05	40,46	97,74	121,73	142,36	35,82	107,55	334,49	244,87	268,88
Haarlem	14,16	21,05	44,93	101,65	115,69	120,43	31,15	103,83	298,28	178,40	146,31
Utrecht	17,71	28,83	60,23	131,21	147,25	158,62	49,59	150,24	405,67	225,31	225,31
Groningen	18,28	27,50	56,35	117,39	119,50	120,96	41,43	128,80	331,71	129,00	129,00
's-Gravenhage	17,51	28,02	61,81	117,41	117,90	118,25	46,70	155,67	327,45	120,25	120,25
Rotterdam	17,23	26,70	57,43	101,96	101,46	99,82	41,22	135,28	259,29	99,21	90,75
Amsterdam	21,14	30,08	65,62	118,89	118,53	118,29	46,85	167,80	325,29	116,83	116,83
Stations	99,46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nutsbedrijven	44,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Rendementen excl. grond:	gemiddeld rendement (in procenten)						marginaal rendement (in procenten)				
Het Dorp	-	26,97	40,46	80,92	107,90	126,41	16,18	53,95	161,85	188,82	200,44
Arnhem	-	59,70	83,62	167,25	186,65	203,10	35,82	107,55	334,49	244,87	268,88
Haarlem	-	51,92	77,88	151,35	158,11	155,75	31,15	103,83	298,28	178,40	146,31
Utrecht	-	82,65	116,45	212,85	215,97	217,84	49,59	150,24	405,67	225,31	225,31
Groningen	-	69,06	98,93	176,52	164,64	157,51	41,43	128,80	331,71	129,00	129,00
's-Gravenhage	-	77,83	116,75	186,98	170,30	160,29	46,70	155,67	327,45	120,25	120,25
Rotterdam	-	67,64	101,46	154,07	140,36	130,44	41,22	135,28	259,29	99,21	90,75
Amsterdam	-	86,48	127,14	193,19	174,10	162,64	46,85	167,80	325,29	116,83	116,83

Bijlage 3. Rendementen per straat, zonder en met kansverdeling (vervolg)

i	k		rendement onbebouwd (%)	gem. rendement in % (excl. grond)					marginaal rendement in procenten				
				1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ZONDER KANSVERDELING													
1	1	Dorpsstraat	6,67	20,00	30,00	60,00	80,00	100,00	12,00	40,00	120,00	140,00	180,00
3	2	Brink	13,33	40,00	60,00	120,00	160,00	180,00	24,00	80,00	240,00	280,00	260,00
6	3	Steenstraat	12,00	60,00	90,00	180,00	200,00	220,00	36,00	120,00	360,00	260,00	300,00
8	3	Ketelstraat	12,00	60,00	90,00	180,00	200,00	220,00	36,00	120,00	360,00	260,00	300,00
9	4	Velperplein	13,33	80,00	100,00	200,00	225,00	240,00	48,00	120,00	400,00	300,00	300,00
11	5	Barteljorisstraat	14,29	50,00	75,00	150,00	156,25	150,00	30,00	100,00	300,00	175,00	125,00
13	5	Zijweg	14,29	50,00	75,00	150,00	156,25	150,00	30,00	100,00	300,00	175,00	125,00
14	6	Houtstraat	15,00	60,00	90,00	166,67	175,00	180,00	36,00	120,00	320,00	200,00	200,00
16	7	Neude	15,56	70,00	100,00	183,33	187,50	190,00	42,00	130,00	350,00	200,00	200,00
18	7	Biltstraat	15,56	70,00	100,00	183,33	187,50	190,00	42,00	130,00	350,00	200,00	200,00
19	8	Vreeburg	16,00	80,00	110,00	200,00	200,00	200,00	48,00	140,00	380,00	200,00	200,00
21	9	A-Kerkhof	16,36	60,00	83,33	155,56	145,83	140,00	36,00	106,67	300,00	116,67	116,67
23	9	Groote Markt	16,36	60,00	83,33	155,56	145,83	140,00	36,00	106,67	300,00	116,67	116,67
24	10	Heerestraat	16,67	66,67	100,00	166,67	154,17	146,67	40,00	133,33	300,00	116,67	116,67
26	11	Spui	16,92	73,33	110,00	177,78	162,50	153,33	44,00	146,67	313,33	116,67	116,67
27	11	Plein	16,92	73,33	110,00	177,78	162,50	153,33	44,00	146,67	313,33	116,67	116,67
29	12	Lange Poten	17,14	80,00	120,00	188,89	170,83	160,00	48,00	160,00	326,67	116,67	116,67
31	13	Hofplein	17,33	65,00	97,50	150,00	137,50	127,50	39,00	130,00	255,00	100,00	87,50
32	13	Blaak	17,33	65,00	97,50	150,00	137,50	127,50	39,00	130,00	255,00	100,00	87,50
34	14	Coolsingel	17,50	75,00	112,50	166,67	150,00	140,00	47,00	150,00	275,00	100,00	100,00
37	15	Leidschestraat	20,00	87,50	125,00	183,33	162,50	150,00	52,50	162,50	300,00	100,00	100,00
39	16	Kalverstraat	25,00	100,00	150,00	233,33	212,50	200,00	50,00	200,00	400,00	150,00	150,00
MET KANSVERDELING													
1	1	Dorpsstraat	6,70	20,09	30,13	60,26	80,34	100,43	12,05	40,17	120,51	140,60	180,77
3	2	Brink	11,29	33,86	50,80	101,59	135,46	152,39	20,32	67,73	203,18	237,05	220,12
6	3	Steenstraat	10,73	53,65	80,48	160,96	178,84	196,73	32,19	107,31	321,92	232,49	268,26
8	3	Ketelstraat	10,88	54,40	81,60	163,19	181,32	199,46	32,64	108,79	326,38	235,72	271,99
9	4	Velperplein	11,84	71,04	88,79	177,59	199,79	213,11	42,62	106,55	355,18	266,38	266,38
11	5	Barteljorisstraat	14,87	52,05	78,08	156,16	162,67	156,16	31,23	104,11	312,33	182,19	130,14
13	5	Zijweg	12,64	44,23	66,34	132,68	138,20	132,68	26,54	88,45	265,35	154,79	110,56
14	6	Houtstraat	14,87	59,47	89,21	165,20	173,46	178,41	35,68	118,94	317,18	198,23	198,23
16	7	Neude	16,99	76,46	109,22	200,24	204,79	207,53	45,87	141,99	382,28	218,45	218,45
18	7	Biltstraat	17,89	80,50	114,99	210,82	215,61	218,49	48,30	149,49	402,48	229,99	229,99
19	8	Vreeburg	18,20	91,00	125,12	227,49	227,49	227,49	54,60	159,25	432,24	227,49	227,49
21	9	A-Kerkhof	17,30	63,42	88,09	164,43	154,15	147,99	38,05	112,75	317,11	123,32	123,32
23	9	Groote Markt	17,00	62,34	86,58	161,62	151,52	145,46	37,40	110,83	311,70	121,22	121,22
24	10	Heerestraat	20,35	81,41	122,11	203,51	188,25	179,09	48,84	162,81	366,32	142,46	142,46
26	11	Spui	17,67	76,58	114,88	185,66	169,70	160,13	45,95	153,17	327,22	121,84	121,84
27	11	Plein	17,55	76,04	114,06	184,35	168,50	159,00	45,63	152,09	324,91	120,98	120,98
29	12	Lange Poten	17,33	80,87	121,31	190,95	172,70	161,74	48,52	161,74	330,23	117,94	117,94
31	13	Hofplein	17,84	66,88	100,32	154,34	141,48	131,19	40,13	133,76	262,38	102,90	90,03
32	13	Blaak	17,34	65,01	97,52	150,02	137,52	127,52	39,01	130,02	255,04	100,02	87,51
34	14	Coolsingel	16,57	71,03	106,55	157,85	142,06	132,59	44,51	142,06	260,45	94,71	94,71
37	15	Leidschestraat	16,50	72,19	103,13	151,25	134,07	123,75	43,31	134,07	247,51	82,50	82,50
39	16	Kalverstraat	25,19	100,77	151,15	235,12	214,13	201,53	50,38	201,53	403,07	151,15	151,15

Ontvangen:

Geaccepteerd: 29-03-1997