

Opties op rente-instrumenten; een overzicht*

G.J.Kremer** en A.C.F. Vorst***

SAMENVATTING

In dit artikel wordt een overzicht gegeven van optieprijsvormingsmodellen voor rente-instrumenten. De analyse van financiële contracten met behulp van stochastische differentiaalvergelijkingen wordt gedemonstreerd aan de hand van het befaamde Black-Scholes model voor opties op aandelen. De speciale karakteristieken van opties op rente-instrumenten worden besproken. Vervolgens worden drie alternatieve methoden gepresenteerd om opties op rente-instrumenten te waarderen.

* Wij zijn twee anonieme referees dankbaar voor hun commentaar.

** Vakgroep Financiering en Belegging, Erasmus Universiteit Rotterdam, Postbus 1738, 3000 DR Rotterdam, 31 10-4081283, Kremer@Finbel.few.eur.nl

*** Vakgroep Mathematische Besliskunde/Financiering en Belegging, Erasmus Universiteit Rotterdam, Postbus 1738, 3000 DR Rotterdam, 31 10-4081270, Vorst@Opres.few.eur.nl

1 Inleiding

In dit artikel wordt een overzicht gegeven van de modellen die in de financiële praktijk gebruikt worden om opties op rente-instrumenten, zoals obligaties, te waarderen. Deze modellen zijn niet alleen van belang voor de prijsbepaling van opties, maar zeker ook voor een goed risicomanagement van financiële instellingen, zoals banken.

2 Opties

Een optie op een onderliggende waarde is het recht deze onderliggende waarde te kopen of te verkopen op of tot en met een bepaald tijdstip tegen een van te voren afgesproken prijs. Het bepaalde tijdstip is de expiratie- of afloopdatum en de tijdspanne tot aan de expiratedatum wordt de resterende looptijd van de optie genoemd. De vastgestelde prijs voor welke de onderliggende waarde kan worden gekocht of verkocht is de uitoefenprijs. Er zijn twee in het oog lopende details in bovenstaande definitie. Ten eerste is er de tweedeling tussen kopen en verkopen. Een optie die het recht tot koop geeft, wordt een call optie genoemd. Een optie die het recht van verkoop geeft, wordt een put optie genoemd. Ten tweede is er het verschil in uitoefentermijn. Een optie die het recht tot koop of verkoop alleen op de expiratedatum zelf geeft, wordt een Europese optie genoemd, een optie die dat recht tot en met de expiratedatum geeft, wordt een Amerikaanse optie genoemd. Een Amerikaanse optie geeft dus meer mogelijkheden dan een Europese optie. Dit uit kunnen oefenen van koop- of verkooprecht over langere periode maakt een Amerikaanse optie moeilijker te analyseren dan een Europese optie.

In principe is een optie een contract tussen twee partijen. De eerste partij heeft het koop- of verkooprecht, terwijl de tweede partij de plicht heeft te kopen of te verkopen, wanneer de eerste partij dit wil. Teneinde het optierecht te verkrijgen, zal de eerste partij een premie moeten betalen aan de tweede partij bij de aanvang van het contract. Deze premie noemen we de optieprijs. Deze optieprijs zal onder andere afhangen van de prijs van de onderliggende waarde, de resterende looptijd tot de expiratedatum, de uitoefenprijs en zoals voor ieder financieel instrument natuurlijk ook van het niveau van de rente. Men is niet alleen geïnteresseerd in de prijs van de optie bij aanvang van het contract, maar ook op ieder ander moment vóór de afloopdatum. Ten eerste om de waardeontwikkeling van een portefeuille van financiële

instrumenten te kunnen volgen en ten tweede om de optie eventueel tegen de juiste prijs te verkopen. Optieprijsmodellen worden gebruikt bij het bepalen van deze optieprijsen. Daar de prijzen van opties afhangen van de prijzen van andere instrumenten, zoals aandelen, noemen we opties ook wel afgeleide instrumenten.

Zonder modellen kunnen we reeds de waarde van de optie op de expiratedatum bepalen. Nemen we bij voorbeeld een call optie met een aandeel als onderliggende waarde dan zal de optie niets waard zijn op de afloopdatum T als de aandelprijs onder de uitoefenprijs ligt. Indien de aandelprijs boven de uitoefenprijs ligt, zal de houder de optie uitoefenen. Hij krijgt dan een korting van $S(T) - X$, waarbij $S(T)$ de aandelprijs is en X de uitoefenprijs. De optiewaarde op de afloopdatum is dus $\max(0, S(T) - X)$. Vaak wordt de onderliggende waarde niet geleverd maar wordt de winst op de optie uitbetaald. Dit wordt cash settlement van de optie genoemd. Het gaat er nu om de optieprijs ook op andere momenten te bepalen.

Opties op aandelen zijn de bekendste opties die verhandeld worden. Daarnaast worden ook opties op vreemde valuta, edelmetalen, aandelenindices en obligaties verhandeld. Verder worden ook contracten verhandeld die optie-elementen in zich dragen. Te denken valt bijvoorbeeld aan vervroegd aflosbare obligaties. Een vervroegd aflosbare obligatie kan beschouwd worden als een obligatie met daarbij een optie voor de emittent om de obligatie af te lossen tegen een vaste prijs, een call optie dus. De prijs voor de koper van de vervroegd aflosbare obligatie bestaat uit de prijs van de gewone obligatie, gecorrigeerd voor de prijs van de optie. Daar de koper van de obligatie de emittent het recht verleent om de obligatie vervroegd af te lossen, verkoopt hij het recht. Hij ontvangt dus de premie voor de optie. De prijs van de vervroegd aflosbare obligatie is dus lager dan de prijs van een zelfde obligatie die niet vervroegd aflosbaar is.

Maar niet alleen vervroegd aflosbare obligaties zijn te zien als portefeuilles van opties en andere financiële instrumenten. Een interest rate cap is een instrument dat verzekering biedt tegen het stijgen van de rente bij een variabel rentende lening. Bij een variabel rentende lening wordt de looptijd van de lening in een aantal perioden verdeeld. Aan het begin van iedere periode wordt aan de hand van de marktrente bepaald welke rente de leningsnemer voor die periode zal betalen. Vaak wordt bij het aangaan van een variabel rentende lening een cap afgesproken, waarmee de maximaal te betalen rente per periode wordt vastgelegd. Dit is de cap rate. Het contract biedt de koper dan de zekerheid dat de door hem betaalde rente over iedere periode na een renteherziening het minimum is van de cap rate en de vigerende marktrente. Een

cap kan dan ook worden beschouwd als een portefeuille opties op de rentevoeten over de verschillende perioden na renteherzieningen. Een floor is een contract dat een benedengrens plaatst op de te betalen rente en kan als zodanig ook worden beschouwd als een portefeuille opties. Een collar is een contract bestaande uit een gekochte cap en een verkochte floor. Ook worden er opties op renteswaps verhandeld. Renteswaps zijn contracten waarbij in de toekomst vaste tegen variabele rente over een bepaalde hoofdsom worden geruild (geswapt).

Bovenstaande vormen van opties zijn allen niet afhankelijk van het tijdpad dat de prijs van de onderliggende waarde heeft doorlopen. Opties die dat wel doen zijn bijvoorbeeld barrier-opties en Aziatische opties. Barrier-opties zijn weer onder te verdelen in in-opties en out-opties. Een out-optie verliest haar waarde als de prijs een bepaalde grens is gepasseerd. Een down-and-out call met uitoefenprijs 100 en grens 95 loopt af op het moment dat de prijs van de onderliggende waarde onder de 95 komt. Stijgt de prijs van de onderliggende waarde daarna naar 120, dan zal de optie toch geen waarde hebben. Zo ook moet bij een up-and-in call de prijs van de onderliggende waarde eerst een bovengrens passeren voordat de call optie uitgeoefend kan gaan worden. De uitbetaling van deze opties is dus afhankelijk van het volledige koersverloop van de onderliggende waarde.

Aziatische opties zijn opties waarbij de uitbetaling afhangt van de gemiddelde prijs van de onderliggende waarde tot expiratedatum. Bij een call optie met een uitoefenprijs van 100, een looptijd van 6 maanden en een gemiddelde gebaseerd op de sluitingskoersen, is de uitbetaling gelijk aan het verschil tussen dat gemiddelde en de uitoefenprijs, indien dit positief is. Het moge duidelijk zijn dat dit door cash settlement moet geschieden. Zowel barrier opties als Aziatische opties worden niet alleen toegepast met aandelen en valuta als onderliggende waarden, maar ook met verschillende rentestanden.

In dit paper wordt ingegaan op optieprijsmodellen met rente instrumenten als onderliggende waarden. Financiële instellingen zijn daarbij voornamelijk geïnteresseerd in modellen waarmee alle rente-afhankelijke instrumenten in één keer kunnen worden gewaardeerd. Zij willen niet voor ieder instrument een afzonderlijk model. Alvorens renteoptiemodellen te bespreken, gaan wij hier eerst in op aandelenoptiemodellen.

3 Het waarderen van aandelenopties

Bij het waarderen van opties is het modelleren van de stochastiek van de onderliggende waarde bepalend voor het resultaat. Voor ieder afgeleid instrument geldt dat de waarde van het instrument afhangt van de onderliggende waarde en van de looptijd van het instrument. Black en Scholes [1973] hebben een model ontwikkeld voor het waarderen van opties op aandelen. Zij namen een eenvoudig diffusieproces aan voor de onderliggende waarde en wisten zo tot een waardering voor Europese call opties op een aandeel te komen. Het proces voor de prijs $S(t)$ van de onderliggende waarde wordt beschreven door de volgende stochastische differentiaalvergelijking:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dz(t) \quad 3.1$$

met $z(t)$ een Wiener proces¹, μ de drift en σ^2 de instantane variantie van het aandeel.

De Wiener proces term zorgt er voor dat we een stochastische differentiaalvergelijking krijgen. De oplossing $S(t)$ is daarom ook een stochastisch proces in plaats van een deterministische functie. Onzekerheid over toekomstige aandelprijzen is namelijk één van de belangrijkste karakteristieken van financiële markten. Wel werd door Black en Scholes aangenomen dat de rentevoet tot de aflooptdatum van de optie constant en niet-stochastisch is. In het vervolg komen we terug op realistischer modellen met een stochastische rentevoet.

Zij $C(S(t), t)$ de prijs op tijdstip t van een optie met een prijs $S(t)$ van de onderliggende waarde. In het vervolg zullen we kortweg z in plaats van $z(t)$, S in plaats van $S(t)$ en C in plaats van $C(S(t), t)$ schrijven. Met behulp van Ito's Lemma² valt voor de verandering in de prijs van de optie af te leiden:

$$dC = C_S dS + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S^2 dt \quad 3.2$$

¹ Een goede introductie in stochastische differentiaalvergelijkingen, Wiener processen en Ito's Lemma wordt gegeven in Øksendal [1985]. Een meer op de optietheorie gerichte benadering van deze begrippen wordt gegeven in Hull [1993].

² Ito's Lemma is het analogon bij stochastische processen van de totale differentiaal $dC = C_S dS + C_t dt$ voor deterministische functies. De Wiener proces term dz zorgt voor de extra term in het rechter lid van vergelijking 3.2.

met

$$C_s = \frac{\partial C}{\partial S}, \quad C_{ss} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \quad \text{en} \quad C_t = \frac{\partial C}{\partial t}$$

de partiële afgeleiden van de optieprijs. De verandering van de optieprijs hangt dus af van de verandering in de prijs van de onderliggende waarde en de verandering in de tijd. Nu wordt een portefeuille gevormd, bestaande uit een long positie in de optie (met kosten C) en een short positie³ ter grootte van C_s in het onderliggende aandeel (met opbrengst $C_s S$). De waarde Π van deze portefeuille is dus $\Pi = C - C_s S$ en de verandering in deze waarde wordt gegeven door

$$\begin{aligned} d\Pi &= dC - C_s dS = C_s dS + C_t dt + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S^2 dt - C_s dS \\ &= \left(C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S^2 \right) dt \end{aligned} \quad 3.3$$

De verandering in de waarde van de portefeuille is deterministisch daar de Wiener proces term dz , de enige bron van risico in dit model, is weggevallen uit formule 3.3. De portefeuille genereert echter wel rendement, zoals uit bovenstaande formule blijkt. Als dit rendement groter is dan de risicoloze rentevoet is het mogelijk het geld voor de portefeuille te lenen tegen de risicoloze rentevoet. De opbrengst van deze risicoloze strategie is in dat geval hoger dan de kosten. Zo wordt zonder een initiële investering geld verdiend, een 'free lunch'. Dit noemt men ook wel het bestaan van een arbitragemogelijkheid. Deze mogelijkheid tot arbitrage kan niet blijven bestaan in een markt die in evenwicht is. Iedereen zal de portefeuille aanschaffen. Dat wil zeggen men zal de optie willen kopen en aandelen willen verkopen. De waarde van de portefeuille stijgt dan, omdat de optieprijs stijgt door de grote vraag en de aandelprijs daalt door de verkoopdruk. Na de prijsstijging van de portefeuille zal het toekomstige rendement minder worden tot het gelijk is aan de risicoloze rentevoet. Als de opbrengst van de

³ Short gaan is het verkopen van een instrument dat niet in het bezit van een belegger is. De belegger zal op een later tijdstip het instrument alsnog moeten kopen om te kunnen leveren. Long gaan is het kopen van een instrument.

portefeuille lager is dan de risicoloze voet, kan de portefeuille verkocht worden en de opbrengst wordt belegd tegen de risicoloze voet. Ook nu vindt er weer arbitrage plaats, welke niet kan blijven bestaan. Daarom wordt binnen de optiewaarderingstheorie aangenomen dat er geen arbitragemogelijkheden zijn en de waarde van de portefeuille moet groeien met de risicoloze (niet-stochastische) rentevoet r . Dus

$$\left(C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S^2 \right) dt = r(C - C_s S) dt \quad 3.4$$

Hieruit volgt

$$C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S^2 + r C_s S - r C = 0 \quad 3.5$$

Deze partiële differentiaalvergelijking geldt in principe voor iedere optie met deze onderliggende waarde en staat bekend als de Black-Scholes partiële differentiaalvergelijking. De oplossing voor een specifieke optie wordt bepaald door de randvoorwaarden. Voor een Europese call-optie met expiratedatum T en uitoefenprijs X wordt deze gegeven door

$$C(S(T), T) = \max(0, S(T) - X) \quad 3.6$$

Black en Scholes hebben de partiële differentiaalvergelijking opgelost door deze te herschrijven naar een vergelijking die overeenkomt met de warmtevergelijking uit de natuurkunde. Voor deze laatste vergelijking waren oplossingen bekend. Het is echter eenvoudiger om resultaten uit de waarschijnlijkheidsrekening toe te passen, ten einde de vergelijking op te lossen. Indien we

$$D(S, t) = e^{r(T-t)} C(S, t) \quad 3.7$$

invullen in de partiële differentiaalvergelijking, resulteert voor D de volgende partiële differentiaalvergelijking

$$D_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 D_{SS} + rSD_S = 0 \quad 3.8$$

We hebben de term rC dus om zeep geholpen. Dit staat in de natuurkunde bekend als Feynman-killing. De vergelijking voor D is in de theorie van de stochastische processen bekend als de Kolmogorov achterwaartse vergelijking (zie o.a. Øksendal [1985]):

Zij $X(t)$, of kortweg X , een stochastisch proces dat de oplossing is van de stochastische differentiaalvergelijking

$$dX(t) = f(X(t), t)dt + \rho(X(t), t)dz(t) \quad 3.9$$

Laat verder T een vast tijdstip zijn en $t < T$ en $g(X)$ een functie van X zijn. Dan definiëren we voor ieder paar $(X(t), t)$:

$$u(X(t), t) = E_{X(t), t}(g(X(T))) \quad 3.10$$

$u(X(t), t)$ is dus de verwachte waarde op tijdstip t van $g(X(t))$ als op dit tijdstip de stochast een waarde $X(t)$ heeft. Nu geldt volgens de wet van de geïtereerde verwachtingen voor $t < s < T$ dat

$$u(X(t), t) = E_{X(t), t}(g(X(t))) = E_{X(t), t}(E_{X(s), s}(g(X(T)))) = E_{X(t), t}(u(X(s), s))$$

Het proces u is dus een martingaal. Dat wil zeggen dat de huidige waarde van u gelijk is aan de verwachte toekomstige waarde. De drift van het proces u is dus nul. Passen we Ito's Lemma toe op $u(X(t), t)$ dan vinden we dat

$$du = \left(u_t + u_x f + \frac{1}{2} u_{xx} \rho^2 \right) dt + u_x \rho dz$$

Dat de drift nul is betekent dus dat

$$u_t + u_x f + \frac{1}{2} u_{xx} \rho^2 = 0$$

Deze laatste vergelijking heet de Kolmogorov achterwaartse vergelijking voor het proces X . Oplossingen worden dus gegeven door functies als in 3.10.

Indien we het proces

$$dS = rSdt + \sigma Sdz \quad 3.11$$

bekijken dan wordt de Kolmogorov achterwaartse vergelijking beschreven door vergelijking 3.8. Oplossingen worden dan gegeven door

$$D(S,t) = E_{s,t}(g(S(T)))$$

Door een geschikte keuze voor $g(S(T))$ kan men er voor zorgen dat er aan de randvoorwaarden wordt voldaan. Voor een call optie is dit $g(S(T)) = \max(0, S(T) - X)$. We nemen dus niet de verwachting onder het echte proces dat S volgt en gespecificeerd is in vergelijking 3.1, maar onder het alternatieve proces 3.11 waarin de drift term is aangepast van μ naar de rentevoet r . De optieprijs wordt daarom

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} E_{s,t}[\max(0, S(T) - X)] \quad 3.12$$

Een zeer belangrijke stap in deze afleiding is het elimineren van het risico van de portefeuille. De risicohouding van de beleggers is dus niet relevant. Dan kan de optieprijs echter ook bepaald worden in een risiconeutrale wereld. Dit is precies de betekenis van vergelijking 3.11. De verwachte waarde zoals gespecificeerd in vergelijking 3.12 kan worden berekend.

Via Ito's Lemma volgt dat

$$d \ln(S) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

hetgeen impliceert dat $\ln(S(T)/S_t)$ normaal verdeeld is met gemiddelde $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ en variantie $\sigma^2(T-t)$. Gebruik makend van deze verdeling van het logaritmisch rendement leidt men via vergelijking 3.12 eenvoudig de befaamde Black-Scholes formule af.

$$C(S(t), t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad 3.13$$

met

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad 3.13a$$

en

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad 3.13b$$

waarin $N(d)$ de cumulatieve normale verdeling is. Het tweede deel van de formule is $X e^{-r(T-t)}$ maal de kans dat $S(T) > X$ voor het proces gegeven in 3.11. Het eerste deel is $e^{-r(T-t)}$ maal de verwachting van $S(t)$ onder de voorwaarde dat $S(T) > X$.

Bij de waardering van de call optie spelen vijf factoren een rol, te weten de prijs van de onderliggende waarde S , de uitoefenprijs X , de resterende looptijd van de optie $T-t$, de risicoloze rentevoet r en de volatiliteit σ . De verwachte groei van de aandeelprijs, gegeven door μ in vergelijking 3.1, speelt dus geen rol.

Voor Europese put opties kan op precies dezelfde wijze de optieprijs worden bepaald. Bij Amerikaanse opties kunnen de houders de optie vervroegd uitoefenen. Zij zullen dit optimaal willen doen. Dit betekent dat er een stochastisch control probleem ontstaat. Voor dit specifieke probleem zijn geen analytische oplossingen bekend. Wel zijn er vrij goede approximaties bekend en met name voor call opties waarop geen dividend wordt uitgekeerd, kan men aantonen dat deze nooit vervroegd moeten worden uitgeoefend. De waarde van de Amerikaanse optie is dan gelijk aan die van de Europese optie. Bij dividenduitkeringen zijn er een paar goed bruikbare methoden om tot de prijs van Amerikaanse call opties te komen.

4 Opties op obligaties

Hoe kunnen nu opties op obligaties worden gewaardeerd? Toepassen van de Black-Scholes formule stuit op problemen. Ten eerste gaan, zoals eerder is opgemerkt, Black en Scholes er van uit dat de rentevoet bij het waarderen van aandelenopties constant is tot de expiratedatum. Dit is een vreemde aanname als juist opties op rente-instrumenten bekeken worden. De veranderingen in de prijs van een obligatie worden juist veroorzaakt door veranderingen in rentevoeten. Het niet-stochastisch zijn van een rentevoet wordt moeilijk verdedigbaar.

Het tweede probleem is gelegen in het gebruik van vergelijking 3.1. Deze diffusievergelijking impliceert dat naarmate het tijdstip van prijsbepaling voor een aandeel verder weg ligt, de prijs onzekerder wordt. Dit is van toepassing op aandelen maar niet op obligaties. Op de afloopdatum van de obligatie is de prijs met zekerheid gelijk aan de nominale waarde; de onzekerheid omtrent de prijs zal eerst toe- en vervolgens afnemen, naarmate het tijdstip van prijsbepaling weg schuift vanaf het heden naar de afloopdatum. Alleen als de afloopdatum van de obligatie veel verder weg ligt dan de uitoefendatum van de optie is dit probleem alleen maar van theoretisch belang. Men moet echter wel in gedachten houden dat juist optie-elementen in obligaties, zoals vervroegde aflosbaarheid of verlengbaarheid, een expiratedatum hebben die gelijk is aan de looptijd van de obligatie. Hierbij is het geschetste probleem dus zeker van belang.

Bovenstaande problemen leiden er toe dat de Black-Scholes formule in algemeenheid niet geschikt is voor het waarderen van opties op obligaties. Een andere manier van waarderen zal moeten worden toegepast.

Het modelleren van het risico van obligaties kan op drie alternatieve manieren geschieden. Ten eerste kan, analoog aan de opties op aandelen, de prijs van de onderliggende obligatie weergegeven worden door een diffusieproces. Dit wordt de directe methode genoemd. Deze aanpak is heel natuurlijk, maar er is een aantal nadelen aan te geven. Ten eerste moet het proces voldoen aan de eerder genoemde eisen voor de beweging in de prijs van een obligatie. Een tweede probleem ontstaat als er naar verschillende obligaties wordt gekeken. Modelleren van de individuele prijzen resulteert makkelijk in het ontstaan van

theoretische arbitragemogelijkheden tussen deze obligaties, iets dat in realiteit niet wordt waargenomen.

Een alternatief voor de directe methode is het modelleren van alle obligatieprijzen via de termijnstructuur van rentevoeten. Door het modelleren van de termijnstructuur worden arbitragemogelijkheden zoals bij de directe methode uitgesloten. Eén- en twee-factormodellen zijn ontwikkeld om hier in te voorzien. Factormodellen gaan uit van een beperkt aantal bronnen waarmee het risico in de rentevoeten kan worden beschreven. De verschillende rentevoeten hangen dus van één of twee factoren af. Nadeel van deze modellen is dat niet alle obligaties in de markt correct kunnen worden geprijsd. Vorm en ligging van de termijnstructuur worden beschreven met een beperkt aantal parameters. De theoretische prijs van een aantal obligaties zal dan ook niet overeenkomen met de werkelijke prijs. De waarde van een theoretische optieprijs die is bepaald aan de hand van een incorrecte obligatieprijs is op zijn zachtst gezegd twijfelachtig. Een oplossing voor dit probleem is het modelleren van bewegingen in de gehele termijnstructuur. Een bestaande termijnstructuur wordt als uitgangspunt gekozen. Deze veranderingen in de termijnstructuur worden gemodelleerd via een diffusieproces. Dit soort modellen wordt de exogene modellen genoemd. We zullen de drie alternatieve methoden hieronder uitgebreider bespreken.

5 Directe methode

Twee modellen zijn illustratief voor de toepassing van de directe methode. Het eerste model is van Ball en Torous [1983] en modelleert de prijs van de obligatie zo dat deze op afloopdatum naar de nominale waarde tendeert. Dit gebeurt door het aanpassen van de drift m.b.v. een Brownse brug. De drift zal steeds gericht zijn op het bereiken van de nominale waarde. Als $B(\tau)$ de prijs van een couponloze obligatie is en τ_0 de afloopdatum van de obligatie is, dan wordt het stochastische proces voor de prijs gegeven door

$$\frac{dB(\tau)}{B(\tau)} = \alpha(B, \tau)dt + \sigma(B, \tau)dz \quad 5.1$$

met

$$\alpha(B, \tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \mu - \frac{1}{\tau} \left(\ln \left(\frac{B(\tau)}{B(\tau_0)} \right) - \mu(\tau_0 - \tau) \right) \quad 5.1a$$

en

$$\sigma(B, \tau) = \sigma \quad 5.1b$$

De specificatie 5.1a van $\alpha(B, \tau)$ zorgt er voor dat de obligatieprijs een drift naar de nominale waarde heeft en de obligatieprijs op afloopdatum met kans 1 gelijk is aan de nominale waarde. In dit model wordt dus alleen de drift van het proces aangepast. De instantane variantie van het proces blijft constant. Bij het naderen van de afloopdatum zal de variantie van de obligatieprijs echter moeten afnemen. Een ander nadeel van dit model is de mogelijkheid dat de modelprijs van de obligatie op enig tijdstip zal stijgen boven de nominale waarde. Een negatieve nominale rentevoet is dan dus mogelijk. Het model kent dus ook enige problemen.

Een model dat de instantane variantie van het proces wel aanpast, is dat van Schaefer en Schwartz[1987]. Zij houden rekening met het ervaringsfeit dat de volatiliteit van obligatieprijzen afneemt naarmate de looptijd van de obligatie korter wordt. De Reddington duration $D(B, t)$ wordt toegepast om de instantane volatiliteit te corrigeren. Deze Reddington duration, die de relatieve gevoeligheid van de obligatieprijs voor rentevoetveranderingen geeft, is gedefinieerd door de formule

$$D(B, t) = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y}$$

waarbij y de continue yield van de obligatie is. De diffusievergelijking voor de obligatieprijs is dan

$$dB(t, s) = \mu B(t, s)dt + kB(t, s)^\alpha D(B, t)dz \quad 5.2$$

De prijs op afloopdatum hoeft niet naar de nominale waarde te convergeren. Ook negatieve nominale rentevoeten zijn in dit model mogelijk.

Bij beide directe modellen wordt voor iedere obligatie een afzonderlijk proces gemodelleerd. Er wordt dus geen rekening gehouden met de uit de empirie bekende

gemeenschappelijke bewegingen in de rentevoeten voor de verschillende termijnen. In de volgende groep modellen worden obligatieprijzen juist bepaald op grond van deze gemeenschappelijke marktbewegingen.

6 Eén-factor modellen

Het inzichtelijkste model in deze categorie is dat van Vasicek [1977]. Voor de instantane rente r wordt eerst een algemene specificatie aangenomen.

$$dr = f(r,t)dt + \rho(r,t)dz \quad 6.1$$

Via Ito's lemma kan voor de prijs $B(t,s,r)$, of kortweg B , op tijdstip t van een couponloze obligatie met een nominale waarde van f. 1,- , een korte termijn rentevoet r en met een looptijd tot s worden afgeleid dat

$$dB = B\mu(t,s,r)dt + B\sigma(t,s,r)dz \quad 6.2$$

met

$$\mu(t,s,r) = \frac{1}{B(t,s,r)} \left[B_t + fB_r + \frac{1}{2}\rho^2 B_{rr} \right] \quad 6.2a$$

en

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{B(t,s,r)}\rho B_r \quad 6.2b$$

Nu kan een portefeuille worden gevormd door voor een bedrag W_1 van een obligatie met afloopdatum s_1 te verkopen en voor een bedrag W_2 van een obligatie met looptijd tot s_2 te kopen. De waarde $W = W_2 - W_1$ verandert door de tijd met

$$dW = (W_2\mu(t, s_2, r) - W_1\mu(t, s_1, r))dt - (W_2\sigma(t, s_2, r) - W_1\sigma(t, s_1, r))dz \quad 6.3$$

Als nu de hoeveelheden worden gekozen als

$$W_1 = \frac{W\sigma(t, s_2, r)}{\sigma(t, s_1, r) - \sigma(t, s_2, r)}$$

en

$$W_2 = \frac{W\sigma(t, s_1, r)}{\sigma(t, s_1, r) - \sigma(t, s_2, r)}$$

dan wordt de waardeontwikkeling van de portefeuille

$$dW = \frac{(\mu(t, s_2, r)\sigma(t, s_1, r) - \mu(t, s_1, r)\sigma(t, s_2, r))W}{\sigma(t, s_1, r) - \sigma(t, s_2, r)}dt \quad 6.4$$

Dit rendement is risicoloos en moet dus bij afwezigheid van arbitragemogelijkheden gelijk zijn aan de risicoloze rentevoet. Dus

$$\frac{\mu(t, s_2, r)\sigma(t, s_1, r) - \mu(t, s_1, r)\sigma(t, s_2, r)}{\sigma(t, s_1, r) - \sigma(t, s_2, r)} = r(t) \quad 6.5$$

Dit is te herschrijven als

$$\frac{\mu(t, s_1, r) - r(t)}{\sigma(t, s_1, r)} = \frac{\mu(t, s_2, r) - r(t)}{\sigma(t, s_2, r)} \quad 6.6$$

Dit quotiënt is constant voor de verschillende resterende looptijden van obligaties en wordt opgevat als de premie voor risico in de markt.

$$q(t, r) = \frac{\mu(t, s, r) - r(t)}{\sigma(t, s, r)} \quad 6.7$$

Vullen we de uitdrukkingen voor $\mu(t, s, r)$ en $\sigma(t, s, r)$ zoals afgeleid in vergelijkingen 6.2a en 6.2b hierin in, dan resulteert

$$B_t + (f + \rho q)B_r + \frac{1}{2}\rho^2 B_{rr} - rB = 0 \quad 6.8$$

We hebben dus weer een partiële differentiaalvergelijking, waaraan moet worden voldaan. De oplossing geeft weer de verdisconteerde verwachte waarde van de obligatie in een risiconeutrale wereld⁴.

$$B(t, s, r) = E_{r,t} \left[\exp \left(- \int_t^s r(\tau) d\tau \right) \right] \quad 6.9$$

Niet alleen obligaties maar ook opties op obligaties en alle andere rente-afhankelijke instrumenten moeten aan de partiële differentiaalvergelijking voldoen en zijn weer te schrijven als een verwachtingswaarde.

Vervolgens moet een specifieke invulling worden gehanteerd voor het proces van de rente. Vasicek neemt in zijn artikel een mean-reverting proces aan met een constante volatiliteit.

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz \quad 6.10$$

Hierbij moet γ worden gezien als het lange termijn rente niveau. Indien $\alpha > 0$ zal bij een rente boven dit niveau de rente een neiging tot dalen hebben, terwijl bij een te lage rente een neiging tot stijgen ontstaat.

Voor een obligatie wordt de prijs uit vergelijking 6.9

⁴ Het diffusieproces voor de rente in de risicoloze wereld wordt gegeven door $dr = (f(r, t) - \rho(r, t)q(r, t))dt + \rho(r, t)dz$

$$B(t, s, r) = \exp \left[\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}) (R(\infty) - r) - (s-t) R(\infty) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3} (1 - e^{-\alpha(s-t)})^2 \right] \quad 6.11$$

met

$$R(\infty) = \gamma + \frac{pq}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\alpha^2} \quad 6.11a$$

Op ieder tijdstip t wordt de termijnstructuur van rentevoeten $R(t, \tau)$ gedefinieerd door

$$R(t, \tau) = - \frac{\ln B(t, t + \tau, r)}{\tau} \quad 6.12$$

$R(t, \tau)$ geeft dus de rentevoet voor een lening over een periode ter lengte τ weer.

Zoals gezegd, moeten ook opties aan de partiële differentiaal vergelijking voldoen en ook hun prijzen kunnen in risico neutrale verwachtingen worden uitgedrukt. Voor opties op couponloze obligaties kunnen dan expliciete formules als de Black-Scholes formule worden afgeleid⁵.

Het nadeel van dit proces voor de rente is weer dat rentevoeten negatief kunnen worden. Een model waarin negatieve rentevoeten niet mogelijk zijn is dat van Cox, Ingersoll en Ross [1985a,b]. Zij nemen niet alleen een mean-reverting proces aan voor de rente, maar ze corrigeren de volatiliteit van de rente ook voor de hoogte. Hoe hoger de rente is, hoe hoger de volatiliteit zal zijn, iets dat consistent is met de empirie. De diffusievergelijking in hun model luidt

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad 6.13$$

Ook hieruit zijn weer formules af te leiden voor de prijzen van obligaties en opties.

Opgemerkt moet echter worden dat uit onderzoek van Chan, Karolyi, Longstaff en Sanders [1992] blijkt dat de hoogte van de rente een sterkere relatie met de volatiliteit heeft dan hier

⁵ Jamshidian [1989] geeft aan hoe in een een-factor model een optie op coupondragende obligaties kan worden ontleed in een portefeuille van opties op couponloze obligaties.

wordt aangenomen. In plaats van een macht van 0.5 is een macht groter dan 1 meer in lijn met wat wordt waargenomen.

7 Twee-factor modellen

Modellen die gebruik maken van één factor, hebben als nadeel dat de mogelijke vormen van de gegenereerde termijnstructuren beperkt zijn. Veel in de praktijk waargenomen vormen kunnen met één-factor modellen niet worden gegenereerd. Daarnaast is de lange termijn rente een deterministische functie van de modelparameters. Om deze problemen op te lossen zijn modellen voor de termijnstructuur ontwikkeld die gebruik maken van meer dan één factor. Een van de eerste modellen in deze klasse is dat van Brennan en Schwartz [1979].

Een ander twee-factor model is dat van Longstaff en Schwartz [1992]. Uitgaande van een evenwichtsmodel voor de economie wordt een termijnstructuur model afgeleid waarin de korte termijn rente en de volatiliteit van deze rente stochastisch zijn. Een bijkomstigheid van dit model is dat er ruimte is gecreëerd voor GARCH-processen in de rente. Het model van Fong en Vasicek [1991] prijst couponloze obligaties bij afwezigheid van arbitragemogelijkheden en resulteert in een stochastische korte termijn rente en een stochastische volatiliteit. Twee-factor modellen geven extra flexibiliteit maar de prijs die betaald moet worden in termen van rekenkundige oplosbaarheid van het model is hoog. Zelfs als er gesloten oplossingen te geven zijn voor optieprijzen is het berekenen van de prijzen tijdrovend, daar integralen over meer dan één stochast moeten worden geëvalueerd⁶.

⁶ In het Black-Scholes model wordt de standaard normale verdeling gebruikt. Voor deze verdeling zijn zeer goede en snelle benaderingen voor handen.

8 Termijnstructuur consistente modellen

Zoals eerder opgemerkt, resulteren één- en twee factormodellen in termijnstructuren van rentevoeten die een aantal obligaties niet correct prijzen. Het baseren van optieprijsen hierop is op zijn zachtst gezegd problematisch. Ho en Lee [1986] presenteerden als eersten een model dat uitgaat van de bestaande termijnstructuur. Deze termijnstructuur is consistent met de markt en ontwikkelt zich vervolgens in de tijd onder invloed van één stochastische factor. Het proces voor de korte termijn rente wordt, in een risico-neutrale omgeving, gegeven door:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad 8.1$$

Dit is dus een specificatie die valt binnen het algemene kader van het Vasicek model. Waar Vasicek vervolgens tijdsonafhankelijke functies voor de instantane drift en volatiliteit specificeert, wordt hier de instantane drift $\theta(t)$ juist tijdafhankelijk gekozen, teneinde de modelprijzen voor discount obligaties overeen te laten komen met de marktprijzen. Als $B(t_0, s, r)$ de marktprijzen van obligaties zijn, dan definiëren we op tijdstip t_0 de instantane forward rente $f(t_0, s)$ op tijdstip s door

$$f(t_0, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln B(t_0, s, r) \quad 8.2$$

Vervolgens wordt gekozen:

$$\theta(t) = f_1(t_0, t) + \sigma^2(t - t_0) \quad 8.3$$

Op deze manier worden alle discount obligaties correct geprijsd. De drift van het stochastische proces neemt de in de forward rentes aanwezige informatie omtrent de toekomstige termijnstructuren mee. Via dit model kan een formule worden afgeleid voor opties op obligaties. Ho en Lee presenteerden echter het model in een discrete tijdsvorm, de hier gegeven beschrijving is de limietvorm. Toch zijn er nog ernstige nadelen verbonden aan het model van Ho en Lee. Ten eerste zijn alle mogelijke toekomstige termijnstructuren op één tijdstip

parallel en ten tweede zijn negatieve rentevoeten niet uitgesloten. Tot slot zijn de volatiliteiten van alle spot rentes aan elkaar gelijk.

Heath, Jarrow en Morton [1992] omzeilen dit laatste probleem door het specificeren van de volatiliteiten van de instantane forward rentes. In eerste instantie wordt de termijnstructuur van volatiliteiten gespecificeerd⁷. Via de aanname van afwezigheid van arbitrage kan dan de drift van het proces worden bepaald. Hieruit volgt de evolutie van de termijnstructuur van rentevoeten door de tijd. Een gevolg is echter wel dat voor veel specificaties van de volatiliteitstructuur, de ontwikkeling van de termijnstructuur de Markov-eigenschap verliest. Dit resulteert in een model dat rekentechnisch erg bewerkelijk wordt. Het model van Ho en Lee blijkt een specifiek geval van het HJM model te zijn waarin de Markov-eigenschap niet verloren gaat. Een tweede model met deze aantrekkelijke eigenschap is dat van Hull en White[1990]. In dit model wordt de volatiliteit constant gehouden, maar er wordt mean-reversion geïntroduceerd. Het proces voor de rente wordt

$$dr = (\theta(t) - \alpha r)dt + \sigma dz \quad 8.4$$

waarin α en σ constant zijn. Het model van Ho en Lee is weer te beschouwen als een speciaal geval met $\alpha = 0$. Ook voor dit model kunnen we negatieve rentevoeten niet uitsluiten.

Black, Derman en Toy [1990] gebruiken de volgende alternatieve specificatie voor het proces van de korte termijn rentevoet:

$$d \ln(r) = [\theta(t) - a(t) \ln(r)]dt + \varpi(t)dz \quad 8.5$$

met

$$a(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \quad 8.5a$$

⁷ Het is ook mogelijk de volatiliteiten van de instantane spotrentes of van de obligatieprijzen te specificeren, maar dan moeten er extra voorwaarden gehanteerd worden bij het opstellen van de termijn structuur van deze volatiliteiten.

en $\theta(t)$ wordt zo gekozen dat de resulterende termijnstructuur uit het model overeenkomt met de termijnstructuur die in de markt wordt waargenomen. Bij deze specificatie zijn rentevoeten altijd positief. Verder geeft deze specificatie, waarbij $\sigma(t)$ een functie van de tijd is, meer vrijheid om ook de verschillende volatiliteiten voor verschillende obligatielooptijden te modelleren.

Ofschoon voor een aantal modellen analytische formules voor renteoptieprijsen kunnen worden gegeven, is dit niet voor alle opties en in alle modellen mogelijk. In de gevallen waar geen formules voor handen zijn, wordt met discrete tijdversies van de modellen gewerkt, teneinde optieprijsen te bepalen. In feite worden zo de partiële differentiaal vergelijkingen numeriek opgelost.

Voor een aantal modellen, zoals Ho en Lee en Black, Derman en Toy, zijn de discrete tijdmodellen eerst ontwikkeld en heeft men pas later de stochastische processen in continue tijd beschreven. De efficiëntie van een methode om optieprijsen te berekenen is van vitaal belang. Bij de handel in opties wil men snel een prijs kunnen bepalen en moeten ook voortdurend de waarde en rentegevoeligheid van openstaande contracten kunnen worden berekend. Er wordt daarom veel onderzoek verricht naar efficiënte algoritmen (zie o.a. Hull en White [1994]).

9 Conclusie

In dit artikel is getracht een overzicht te geven van de modellen welke gebruikt worden om opties op rente-instrumenten, zoals obligatieopties, caps, floors en collars te waarderen. Ofschoon de meeste modellen uitgaan van het gemeenschappelijke principe dat er geen risicoloze arbitrage mogelijkheden in de financiële markten bestaan, verschillen zij in belangrijke mate in hun aannamen voor het onderliggende renteproces. Voor een aantal modellen is er een positieve kans dat er in de toekomst negatieve rentes voorkomen. In andere modellen bestaat deze mogelijkheid niet. De laatste modellen lijken dus meer aan te sluiten bij de werkelijkheid. Zij hebben echter vaak het nadeel dat er geen analytische uitdrukking voor de optieprijsen binnen het model bestaan en er met rekenintensieve numerieke benaderingen moet worden gewerkt. Gegeven de snelheid en hoeveelheid van handelen in financiële

markten, moeten modellen niet alleen accuraat zijn, maar mogen zeker ook niet te veel rekentijd kosten.

Voor een goed risicobeheer van een portefeuille van vastrentende waarden met bijbehorende afgeleide instrumenten is het wellicht verstandig om twee modellen naast elkaar te gebruiken. Alleen als beide modellen aangeven dat men een risiconeutrale positie heeft, kan men niet zo snel door onverwachte bewegingen in de termijnstructuur worden getroffen.

Literatuur

Ball en Torous (1983). Bond price dynamics and options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 517-531.

Black, F., E. Derman en W. Toy (1990). A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, Jan.-Feb., 33-39.

Black, F. en M. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-659.

Brennan, M.J. en E.S. Schwartz (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance* 3, 133-155.

Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff en A.B. Sanders (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance* 47, 1209-1227.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll en S.A. Ross (1985a). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica* 53, 363-384.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll en S.A. Ross (1985b). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53, 385-407.

Fong H.G. en O.A. Vasicek (1991). Fixed income volatility management. *Journal of Portfolio management* Summer, 41-46.

Heath, D.C., R.A. Jarrow en A. Morton (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* 60, 77-105.

Hull, J. (1993). *Options, Futures and other Derivative Securities*. Prentice Hall, New Jersey.

Hull, J. en A. White (1990). Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies* 3, 573-592.

Hull, J. en A. White (1994). Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models. *Journal of Derivatives* 2 (1), 7-16.

Ho, T.S.Y. en S.-B. Lee (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* 41, 1011-1029.

Jamshidian, F. (1989). An exact bond option pricing formula. *Journal of Finance* 44, 205-9.

Longstaff, F.A. en E.S. Schwartz (1992). Interest rate volatility and the term structure: A two factor general equilibrium model. *Journal of Finance* 47, 1259-1282.

Øksendal, B. (1985) *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

Schaefer S.M., en E.S. Schwartz (1987). Time-dependent variance and the pricing of bond options. *Journal of Finance* 42, 1113-1128.

Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.

Ontvangen: 8-11-1994

Geaccepteerd: 18-4-1995

