

Een nieuwe spantest voor retrospectieve analyse van cumulatieve som kaarten

ir P.C.J. Jeurissen

M & O Consultancy¹
Beverwijk

SAMENVATTING

Voor retrospectieve analyse van cumulatieve som kaarten is in het verleden de spantest ontwikkeld. In dit artikel wordt een aanpassing van deze spantest voorgesteld, die de twee belangrijkste nadelen van de spantest opheft. Deze nadelen zijn dat een veranderepunt kort bij een van de uiteinden van het interval minder snel gevonden wordt dan een veranderepunt in het midden van het interval en dat, als er een veranderepunt dichtbij een uiteinde van het interval ligt, de spantest een verkeerd veranderepunt vindt dat dicht bij het midden van het interval ligt. Voor een oplossing van deze problemen wordt een nieuwe kritieke waarde berekend, die met de standaarddeviatie in elk punt vermenigvuldigd moet worden. Een bijkomend voordeel van deze verandering is dat een grafische voorstelling van het acceptatiegebied van de nulhypothese te geven is. Deze vorm is een verdraaide ellips.

1 Een korte inleiding in statistisch procesbeheer.

Statistisch procesbeheer, of Statistical Process Control (SPC) is een methode om het productieproces te bewaken. Ten grondslag aan deze methode ligt het feit dat willekeurige variatie inherent is aan productie. Daarnaast kunnen afwijkingen optreden die een extra variatie toevoegen. De afwijkingen worden bijzondere oorzaken genoemd. De willekeurige variatie heeft een constant gemiddelde en spreiding. Controlekaarten zijn ontwikkeld om het productieproces te bewaken. De bekendste en meest gebruikte controlekaarten zijn de $\bar{X}$ -R kaarten, ontwikkeld door Shewart in het begin van deze eeuw. [Oak] Op deze kaarten worden in twee grafieken het procesgemiddelde en de range van vaste steekproeven aangegeven. Actielijnen staan meestal op 3σ van het gemiddelde. Een voorbeeld staat in figuur 1. De gebruikte gegevens voor deze figuur staan in tabel a1 in de appendix.

Een meer geavanceerde kaart is de cumulatieve som of cusum kaart. Op deze kaart wordt niet het gemiddelde, maar het gecumuleerde afwijkingen van het gemiddelde met een referentiewaarde bijgehouden. Het voordeel van deze kaart ten opzichte van de standaard controlekaart is dat een kleine verandering in het proces sneller leidt tot een signaal. Bovendien wordt ook een indicatie van het veranderepunt gegeven. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 2. Ook voor deze figuur zijn de gegevens in tabel a1 gebruikt. Zoals we uit deze twee grafieken zien, toont de cusum kaart een veel duidelijker verandering. De onbetrouwbaarheid van beide grafieken is gelijk.

2 Retrospectieve analyse van gegevens op cumulatieve som kaarten.

Voor retrospectieve analyse van de gegevens is het natuurlijk mogelijk alleen naar de lopende cusum kaart te kijken. Dit betekent echter dat een deel van de gegevens niet of weinig gebruikt worden. Daarom zijn voor retrospectieve analyses andere technieken ontwikkeld, zoals de

¹ M&O Consultancy, Wijkermolen 202, P.O. Box 121, 1940 AC Beverwijk.

'spantest'. R.J. Williamson [Wil] tabelleert kritieke waarden van

$$\frac{|\text{maximum cusum}|}{\sigma} \quad \text{en} \quad \frac{|\text{maximum cusum}|}{\hat{\sigma}}$$

voor $\hat{\sigma} = s, r, d$.

Het is bekend dat de 'power' van de span test in het midden van het interval groter is dan aan de randen van het interval. (zie bv. [Bsi, deel 2 appendix H].) Recente simulaties door M. v.d. Heuvel [Heu] laten zien dat de spantest ook een 'bias' heeft naar het midden van het interval, ofwel dat de spantest niet het juiste veranderpunt, maar een punt dicht bij het midden van het interval aangeeft.

De oorzaak van deze onzuiverheid is dat de variantie van de afwijking van de ideale lijn die de eindpunten van het interval verbindt niet constant is, maar afhangt van de afstand tot de eindpunten. We kunnen gestandaardiseerde kostuums gebruiken om dit op te lossen. Als de spantest op deze wijze aangepast wordt, krijgen we de standaard veranderpuntentest, o.a. gepubliceerd door J. Praagman in zijn proefschrift [Pra]. Er wordt dan getoetst of de waarden van

$$\frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{\sigma} \quad \text{en} \quad \frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{\hat{\sigma}}$$

te groot zijn. Het veranderen van de spantest op deze wijze heeft echter als nadeel dat voor ieder interval dat we willen testen opnieuw een gestandaardiseerde cusum berekend, en eventueel getekend moet worden.

In de volgende paragraaf wordt daarom een andere wijziging voorgesteld.

3. De nieuwe spantest

Als $x_1, \dots, x_n$ een geordende verzameling van waarnemingen is, dan is de pde cusum

$$C_p = \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x}) \quad \text{met} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n.$$

en n is de span. Als de x_i onderling onafhankelijk zijn en normaal verdeelt met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ , dan is de variantie van de pde cusum

$$\text{var}(C_p) = \frac{p(n-p)}{n} \sigma^2$$

De pde gestandaardiseerde cusum is dan

$$\tilde{C}_p = \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x}) / \sigma \sqrt{p(n-p)/n}$$

De test die in de vorige paragraaf genoemd wordt, bepaalt een veranderpunt door te toetsen of deze gestandaardiseerde cusum te groot wordt. Zoals daar al aangegeven heeft dit het nadeel dat de gegevens opnieuw bewerkt moeten worden.

Dit artikel introduceert een andere mogelijkheid. In plaats van de cusum te delen door zijn standaarddeviatie, stel ik voor de kritieke waarde te vermenigvuldigen met de standaarddeviatie in elk punt, en dan de gevonden afwijking aan te geven in de cusum kaart. Dit staat aangegeven in figuur 3. Het resultaat is dan een ovaal acceptatiegebied voor de nulhypothese dat er geen veranderpunt is.

4. Kritieke waarden van de aangepaste spantest

Zoals gewoonlijk in de kwaliteitsbeheersing worden drie schatters voor σ gebruikt,

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 / (\sigma \sqrt{p(n-p)/n}),$$

$$d = \frac{8}{9(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

en

$$s = [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) / (n-1)]^{1/2}$$

Om de kritieke waarden van deze aangepaste spantest te vinden zijn simulaties gedaan met het SAS systeem, versie 6.06 voor VAX/VMS. Voor een gegeven σ en een gegeven span n zijn

$$\frac{\text{maximum gestandaardiseerde cusum}}{\sigma} \quad \text{en} \quad \frac{\text{maximum gestandaardiseerde cusum}}{\hat{\sigma}}$$

($\hat{\sigma}$ is s , r , d) 5000 maal berekend en de gewenste percentagepunten bepaald. Dit is 15 maal herhaald. Elk van de kritieke waarden in de tabellen A2-A5 is het gemiddelde van de 15 schattingen. Ook de standaarddeviatie van deze schatter is opgenomen.

5. Conclusie

Om een correcte retrospectieve analyse te doen, moet de spantest uitgevoerd worden op de gestandaardiseerde cusum waarden. Dit vereist veel rekenwerk, vooral als er voor meerdere veranderepunten getoetst moet worden. Het in dit artikel aangedragen alternatief is het vermenigvuldigen van een kritieke waarden met de standaarddeviatie in elk punt. Dit leidt tot een acceptatiegebied dat een ovale vorm heeft. Als de beide uiteinden van het te testen interval op een horizontale lijn liggen, is het acceptatiegebied een ellips, in alle andere gevallen is het een gedeformeerde ellips. Deze aangepaste spantest lijdt niet aan de gebreken van de standaard span test.

Dankbetuigingen

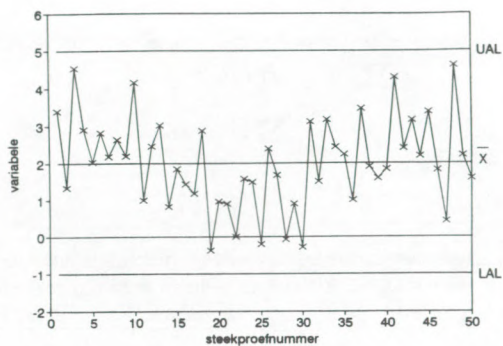
Ik bedank ir Michiel van de Heuvel voor het gebruik van een deel van zijn simulatiegegevens met betrekking tot veranderepunten.

Referenties

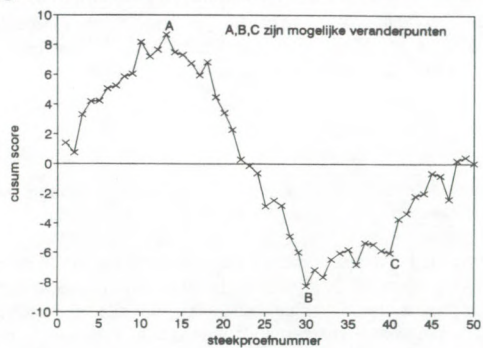
- [Bsi] BSI (British Standards Institution) (1980). *Guide to data analysis and quality control*. 4 parts, BS 5703.
- [Heu] M. v.d. Heuvel (1988). *Fiduciërekening en veranderpuntproblemen*. Afstudeerverslag nummer 493, september 1988, Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Oak] J.S. Oakland (1986). *Statistical process control*. Heineman, London.
- [Pra] J. Praagman (1986). *Efficiency of change-point tests*. proefschrift Technische Universiteit Eindhoven.
- [Wil] R.J. Williamson (1985). Span test on cusums, *The Statistician*, **34**, pagina's 345-356.

ontvangen 9 - 9 - 1992
geaccepteerd 1 - 7 - 1993

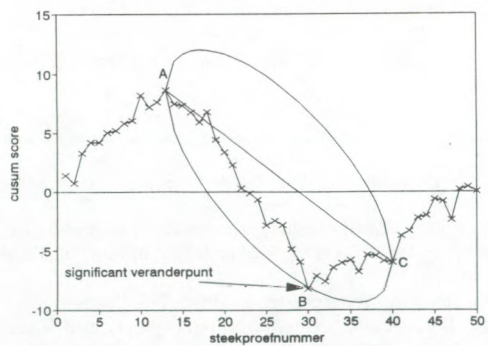
Figuren:



Figuur 1. Standaard controle kaart van de waarden in tabel A1.



Figuur 2. Cusum kaart van de waarden in tabel A1.



Figuur 3. Aangepaste spantest, met significant veranderpunt

Appendix.

Deze appendix geeft de tabel van de waarden gebruikt in de figuren, en tabellen met kritieke waarden voor verschillende standaarddeviaties (σ , r , d , s).

Tabel A1. De waarden gebruikt in de figuren in dit artikel.

teller	variabele	afwijking	cusum	teller	variabele	afwijking	cusum
1	3,390491	1,390491	1,390491	26	2,38179	0,38179	-2,47385
2	1,336612	-0,66339	0,727103	27	1,664342	-0,33566	-2,80951
3	4,539651	2,539651	3,266754	28	-0,07406	-2,07406	-4,88357
4	2,904706	0,904706	4,17146	29	0,894577	-1,10542	-5,989
5	2,026722	0,026722	4,198183	30	-0,28257	-2,28257	-8,27157
6	2,820892	0,820892	5,019075	31	3,113579	1,113579	-7,15799
7	2,17457	0,17457	5,193645	32	1,498587	-0,50141	-7,6594
8	2,633163	0,633163	5,826807	33	3,178453	1,178453	-6,48095
9	2,190397	0,190397	6,017204	34	2,425367	0,425367	-6,05558
10	4,155295	2,155295	8,172499	35	2,236535	0,236535	-5,81905
11	0,992061	-1,00794	7,16456	36	0,996379	-1,00362	-6,82267
12	2,462157	0,462157	7,626718	37	3,465653	1,465653	-5,35701
13	3,013261	1,013261	8,639979	38	1,891102	-0,1089	-5,46591
14	0,816157	-1,18384	7,456136	39	1,584169	-0,41583	-5,88174
15	1,840607	-0,15939	7,296743	40	1,831227	-0,16877	-6,05051
16	1,4315	-0,5685	6,728243	41	4,298327	2,298327	-3,75219
17	1,183156	-0,81684	5,911399	42	2,395672	0,395672	-3,35652
18	2,872843	0,872843	6,784242	43	3,154013	1,154013	-2,2025
19	-0,36061	-2,36061	4,42363	44	2,183507	0,183507	-2,019
20	0,947728	-1,05227	3,371359	45	3,385773	1,385773	-0,63322
21	0,897366	-1,10263	2,268725	46	1,814453	-0,18555	-0,81877
22	0,00544	-1,99456	0,274165	47	0,42568	-1,57432	-2,39309
23	1,568802	-0,4312	-0,15703	48	4,603506	2,603506	0,210416
24	1,493383	-0,50662	-0,66365	49	2,197402	0,197402	0,407818
25	-0,19199	-2,19199	-2,85564	50	1,592182	-0,40782	0

Tabel A2. Kritieke waarden van $\frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{\sigma}$

	p=0.9		p=0.95		p=0.99	
	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie
4	2,8421	0,0008	3,1752	0,0008	3,7886	0,0017
5	2,8698	0,0005	3,1941	0,0011	3,8050	0,0019
6	3,2032	0,0004	3,8071	0,0009	4,9884	0,0568
7	2,8925	0,0002	3,1970	0,0006	3,7988	0,0024
8	2,9004	0,0003	3,2099	0,0005	3,8048	0,0012
9	2,9007	0,0003	3,2127	0,0011	3,8066	0,0017
10	2,9207	0,0003	3,2317	0,0004	3,8267	0,0035
11	2,9257	0,0001	3,2312	0,0007	3,8168	0,0026
12	2,9488	0,0004	3,2431	0,0006	3,8042	0,0012
13	2,9468	0,0004	3,2458	0,0005	3,8104	0,0016
14	2,9456	0,0003	3,2451	0,0004	3,8142	0,0021
15	2,9587	0,0007	3,2568	0,0004	3,8253	0,0024
16	2,9577	0,0007	3,2478	0,0012	3,8049	0,0024
17	2,9664	0,0005	3,2557	0,0011	3,8153	0,0027
18	2,9559	0,0003	3,2554	0,0005	3,8194	0,0017
19	2,9685	0,0004	3,2669	0,0006	3,8378	0,0026
20	2,9734	0,0002	3,2694	0,0006	3,8337	0,0030
21	2,9757	0,0004	3,2661	0,0005	3,8385	0,0019
22	2,9759	0,0003	3,2692	0,0004	3,8285	0,0024
23	2,9860	0,0005	3,2682	0,0007	3,8571	0,0027
24	2,9909	0,0001	3,2838	0,0005	3,8403	0,0014
25	2,9906	0,0006	3,2737	0,0005	3,8353	0,0014
26	2,9919	0,0001	3,2835	0,0005	3,8320	0,0022
27	2,9911	0,0002	3,2748	0,0006	3,8076	0,0014
28	2,9886	0,0003	3,2766	0,0005	3,8504	0,0019
29	2,9940	0,0003	3,2759	0,0007	3,8378	0,0029
30	2,9921	0,0001	3,2772	0,0006	3,8389	0,0030
31	3,0057	0,0004	3,2919	0,0003	3,8505	0,0019
32	3,0009	0,0002	3,2848	0,0007	3,8485	0,0011
33	2,9990	0,0005	3,2861	0,0007	3,8598	0,0020
34	3,0033	0,0005	3,2863	0,0004	3,8328	0,0024
35	3,0028	0,0003	3,2973	0,0003	3,8540	0,0016
36	3,0146	0,0003	3,3010	0,0006	3,8369	0,0026
37	3,0014	0,0004	3,2807	0,0007	3,8313	0,0024
38	3,0043	0,0004	3,2881	0,0007	3,8621	0,0012
39	3,0112	0,0003	3,3064	0,0007	3,8436	0,0014
40	3,0198	0,0004	3,3075	0,0005	3,8613	0,0028
41	3,0099	0,0003	3,2923	0,0006	3,8524	0,0021
42	3,0158	0,0006	3,3057	0,0010	3,8610	0,0016
43	3,0182	0,0003	3,2955	0,0004	3,8375	0,0010
44	3,0380	0,0002	3,3114	0,0003	3,8383	0,0023
45	3,0196	0,0001	3,2940	0,0007	3,8439	0,0022
46	3,0205	0,0003	3,2994	0,0007	3,8486	0,0011
47	3,0254	0,0005	3,3051	0,0004	3,8505	0,0040
48	3,0248	0,0004	3,3077	0,0009	3,8481	0,0019
49	3,0285	0,0003	3,3110	0,0003	3,8494	0,0012
50	3,0272	0,0003	3,3062	0,0005	3,8477	0,0023

Tabel A3. Kritieke waarden van $\frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{r}$

	p=0.9		p=0.95		p=0.99	
	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie
4	4,1462	0,0025	4,9736	0,0041	7,7471	0,1013
5	3,8573	0,0020	4,5916	0,0040	6,3488	0,0170
6	3,6795	0,0011	4,3202	0,0013	5,8446	0,0197
7	3,5816	0,0017	4,1660	0,0014	5,4988	0,0355
8	3,5028	0,0016	4,0602	0,0033	5,3079	0,0059
9	3,4584	0,0005	3,9735	0,0012	5,1598	0,0074
10	3,4017	0,0012	3,8989	0,0020	5,0161	0,0069
11	3,3645	0,0008	3,8372	0,0016	4,8828	0,0065
12	3,3431	0,0011	3,8120	0,0017	4,8373	0,0062
13	3,3311	0,0005	3,7826	0,0009	4,7381	0,0044
14	3,2975	0,0010	3,7325	0,0020	4,7000	0,0061
15	3,2970	0,0008	3,7202	0,0012	4,6309	0,0060
16	3,2798	0,0011	3,6947	0,0014	4,6097	0,0059
17	3,2756	0,0008	3,6765	0,0012	4,5254	0,0054
18	3,2461	0,0003	3,6499	0,0005	4,5242	0,0089
19	3,2369	0,0011	3,6402	0,0010	4,4887	0,0032
20	3,2272	0,0004	3,6308	0,0011	4,4497	0,0038
21	3,2229	0,0004	3,6039	0,0008	4,3962	0,0027
22	3,2221	0,0004	3,6039	0,0005	4,4231	0,0048
23	3,2111	0,0004	3,6005	0,0010	4,3879	0,0023
24	3,2130	0,0003	3,5826	0,0009	4,3549	0,0058
25	3,2077	0,0005	3,5680	0,0016	4,3390	0,0030
26	3,2000	0,0007	3,5686	0,0013	4,3328	0,0030
27	3,1906	0,0003	3,5488	0,0006	4,2941	0,0041
28	3,1804	0,0009	3,5466	0,0015	4,2945	0,0042
29	3,1865	0,0004	3,5358	0,0010	4,2666	0,0042
30	3,1776	0,0005	3,5311	0,0005	4,2656	0,0033
31	3,1794	0,0004	3,5269	0,0013	4,2744	0,0046
32	3,1801	0,0006	3,5279	0,0007	4,2546	0,0017
33	3,1759	0,0004	3,5141	0,0014	4,2281	0,0020
34	3,1645	0,0005	3,5144	0,0009	4,2070	0,0047
35	3,1671	0,0003	3,5094	0,0004	4,2355	0,0027
36	3,1676	0,0003	3,5149	0,0007	4,2111	0,0034
37	3,1467	0,0008	3,4871	0,0012	4,2087	0,0051
38	3,1552	0,0005	3,4884	0,0008	4,1887	0,0048
39	3,1593	0,0003	3,4981	0,0010	4,1876	0,0016
40	3,1597	0,0004	3,4990	0,0008	4,1974	0,0029
41	3,1518	0,0005	3,4897	0,0011	4,1920	0,0031
42	3,1596	0,0007	3,4869	0,0008	4,2051	0,0052
43	3,1488	0,0002	3,4779	0,0006	4,1501	0,0033
44	3,1636	0,0006	3,4865	0,0005	4,1584	0,0038
45	3,1381	0,0003	3,4691	0,0005	4,1450	0,0019
46	3,1466	0,0006	3,4687	0,0010	4,1367	0,0026
47	3,1503	0,0007	3,4755	0,0008	4,1614	0,0069
48	3,1592	0,0009	3,4778	0,0015	4,1298	0,0037
49	3,1517	0,0003	3,4747	0,0004	4,1431	0,0008
50	3,1430	0,0002	3,4634	0,0008	4,1233	0,0021

Tabel A4. Kritieke waarden van $\frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{d}$

	p=0.9		p=0.95		p=0.99	
	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie
4	3,9631	0,0032	4,7689	0,0034	7,3449	0,0520
5	3,7151	0,0017	4,4937	0,0053	6,3311	0,0321
6	3,5499	0,0010	4,2410	0,0017	5,8362	0,0205
7	3,4754	0,0019	4,0962	0,0027	5,5577	0,0271
8	3,4197	0,0018	3,9971	0,0038	5,3826	0,0123
9	3,3753	0,0007	3,9260	0,0016	5,1853	0,0083
10	3,3298	0,0011	3,8496	0,0021	3,8496	0,0111
11	3,3020	0,0011	3,8004	0,0017	4,9074	0,0063
12	3,2847	0,0012	3,7729	0,0019	4,8735	0,0053
13	3,2764	0,0005	3,7435	0,0006	4,7625	0,0030
14	3,2484	0,0013	3,7070	0,0017	4,7133	0,0057
15	3,2497	0,0011	3,6941	0,0007	4,6716	0,0038
16	3,2323	0,0012	3,6690	0,0007	4,6323	0,0068
17	3,2316	0,0007	3,6423	0,0012	4,5764	0,0056
18	3,2159	0,0004	3,6239	0,0003	4,5441	0,0081
19	3,1987	0,0011	3,6198	0,0017	4,4939	0,0019
20	3,1948	0,0003	3,6044	0,0007	4,4736	0,0034
21	3,1856	0,0004	3,5887	0,0007	4,4136	0,0031
22	3,1862	0,0004	3,5853	0,0011	4,4313	0,0024
23	3,1787	0,0003	3,5831	0,0012	4,3957	0,0031
24	3,1807	0,0005	3,5615	0,0012	4,3656	0,0077
25	3,1784	0,0009	3,5591	0,0015	4,3476	0,0027
26	3,1730	0,0006	3,5469	0,0014	4,3484	0,0038
27	3,1601	0,0004	3,5282	0,0009	4,3061	0,0036
28	3,1578	0,0010	3,5226	0,0015	4,3127	0,0052
29	3,1554	0,0005	3,5163	0,0011	4,2767	0,0048
30	3,1541	0,0005	3,5169	0,0008	4,2703	0,0023
31	3,1538	0,0006	3,5149	0,0009	4,2840	0,0046
32	3,1460	0,0005	3,5121	0,0009	4,2705	0,0026
33	3,1516	0,0004	3,5007	0,0009	4,2423	0,0021
34	3,1469	0,0005	3,4929	0,0009	4,2160	0,0060
35	3,1460	0,0003	3,4935	0,0006	4,2340	0,0044
36	3,1462	0,0004	3,5053	0,0010	4,2214	0,0033
37	3,1243	0,0008	3,4675	0,0010	4,2017	0,0059
38	3,1307	0,0004	3,4739	0,0008	4,2165	0,0039
39	3,1375	0,0003	3,4835	0,0009	4,2054	0,0010
40	3,1432	0,0005	3,4842	0,0008	4,2039	0,0035
41	3,1321	0,0006	3,4710	0,0007	4,1955	0,0017
42	3,1383	0,0010	3,4684	0,0007	4,2148	0,0052
43	3,1243	0,0001	3,4600	0,0006	4,1651	0,0038
44	3,1469	0,0005	3,4768	0,0006	4,1580	0,0034
45	3,1178	0,0004	3,4566	0,0005	4,1473	0,0017
46	3,1288	0,0005	3,4549	0,0010	4,1576	0,0028
47	3,1340	0,0006	3,4653	0,0007	4,1518	0,0071
48	3,1416	0,0008	3,4685	0,0015	4,1223	0,0041
49	3,1278	0,0004	3,4562	0,0004	4,1480	0,0021
50	3,1237	0,0002	3,4448	0,0008	4,1211	0,0031

Tabel A5. Kritieke waarden van $\frac{|\text{maximum gestandaardiseerde cusum}|}{s}$

	p=0.9		p=0.95		p=0.99	
	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie	krit waarde	variantie
4	3,5447	0,0014	4,2412	0,0019	6,7088	0,0578
5	3,2396	0,0011	3,6702	0,0021	5,0411	0,0174
6	3,1293	0,0002	3,4521	0,0005	4,3244	0,0033
7	3,0752	0,0002	3,3447	0,0006	3,9909	0,0025
8	3,0410	0,0003	3,2966	0,0005	3,8550	0,0029
9	3,0224	0,0002	3,2690	0,0003	3,7699	0,0012
10	3,0087	0,0001	3,2459	0,0005	3,7050	0,0018
11	2,9970	0,0002	3,2321	0,0002	3,6556	0,0009
12	3,0015	0,0002	3,2360	0,0002	3,6573	0,0011
13	2,9985	0,0003	3,2307	0,0002	3,6549	0,0016
14	2,9839	0,0003	3,2256	0,0004	3,6515	0,0016
15	2,9939	0,0004	3,2289	0,0006	3,6518	0,0011
16	2,9878	0,0004	3,2325	0,0003	3,6573	0,0009
17	2,9864	0,0002	3,2327	0,0003	3,6631	0,0004
18	2,9851	0,0001	3,2351	0,0006	3,6796	0,0015
19	2,9843	0,0004	3,2291	0,0005	3,6711	0,0006
20	2,9795	0,0002	3,2326	0,0004	3,6646	0,0013
21	2,9786	0,0002	3,2296	0,0001	3,6745	0,0009
22	2,9898	0,0002	3,2436	0,0002	3,6847	0,0008
23	2,9908	0,0001	3,2489	0,0002	3,7036	0,0009
24	2,9911	0,0003	3,2528	0,0005	3,7093	0,0010
25	2,9933	0,0003	3,2457	0,0008	3,6912	0,0014
26	2,9926	0,0003	3,2473	0,0005	3,7068	0,0012
27	2,9936	0,0002	3,2426	0,0003	3,7027	0,0013
28	2,9856	0,0003	3,2408	0,0005	3,7046	0,0008
29	2,9924	0,0003	3,2454	0,0003	3,7328	0,0016
30	2,9929	0,0003	3,2472	0,0005	3,7244	0,0013
31	2,9966	0,0003	3,2524	0,0005	3,7344	0,0028
32	2,9916	0,0002	3,2550	0,0002	3,7360	0,0015
33	2,9930	0,0002	3,2496	0,0005	3,7269	0,0011
34	2,9953	0,0004	3,2488	0,0004	3,7269	0,0022
35	2,9985	0,0002	3,2613	0,0004	3,7316	0,0017
36	3,0032	0,0002	3,2573	0,0003	3,7326	0,0013
37	2,9959	0,0004	3,2517	0,0007	3,7335	0,0019
38	2,9939	0,0003	3,2573	0,0001	3,7403	0,0014
39	3,0037	0,0003	3,2661	0,0004	3,7416	0,0012
40	3,0138	0,0002	3,2768	0,0003	3,7564	0,0013
41	3,0040	0,0002	3,2669	0,0005	3,7618	0,0028
42	3,0119	0,0004	3,2743	0,0006	3,7715	0,0019
43	3,0073	0,0002	3,2628	0,0005	3,7513	0,0019
44	3,0190	0,0001	3,2762	0,0003	3,7636	0,0012
45	3,0072	0,0002	3,2647	0,0004	3,7603	0,0015
46	3,0100	0,0003	3,2713	0,0005	3,7652	0,0016
47	3,0164	0,0003	3,2754	0,0005	3,7807	0,0019
48	3,0250	0,0006	3,2805	0,0007	3,7676	0,0012
49	3,0165	0,0003	3,2717	0,0003	3,7802	0,0003
50	3,0209	0,0003	3,2777	0,0006	3,7638	0,0009

