

SIMPELE EVALUATIE VAN PRODUKTIENTETWERKEN MET ONZEKERHEDEN

Nico M. van Dijk, Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie, Universiteit van Amsterdam.

Samenvatting

Produktientetwerken zoals een assemblage lijn of lopende band systeem staan thans sterk in de belangstelling onder de noemer logistiek.

Verschillende onzekerheden kunnen hierbij een rol spelen zoals in bewerkingstijden en de toestand van machines. Bovendien zijn beperkingen als een eindige opslagcapaciteit realistisch. Dit artikel beoogt:

- (i) *Simpel inzicht* te verschaffen in wanneer wél en wanneer niét een dergelijk systeem geëvalueerd kan worden met *eenvoudige oplossingen*.
- (ii) Te illustreren hoe met dit inzicht op puur intuïtieve wijze ook *simpele afschattingen* verkregen kunnen worden indien het systeem niet oplosbaar is.

Een drietal eenvoudige maar desalniettemin praktisch representatieve aspecten wordt hiertoe belicht:

- Eindige opslag (*buffers*)
- Flexibele routing (*overflow*)
- Mogelijke machine uitval (*breakdowns*)

Numerieke illustratie ondersteunt het gebruik van deze inzichten als praktisch hulpmiddel voor een snelle bepaling van orde grootheden, dan wel kwalitatieve doeleinden, in een *produktie-logistieke* omgeving met *onzekerheden*.

Nico M. van Dijk, Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie
Universiteit van Amsterdam, Roetersstraat 11, 1018 WB Amsterdam

INHOUD**I. OVERZICHT, INLEIDING EN SAMENVATTING****II. STATIONSEVENWICHT EN PRODUKTVORMEN**

- 2.1 Een tandem voorbeeld
- 2.2 Blokkering

III. MODIFICATIE METHODE

- 3.1 Omschrijving
- 3.2 Vragen
- 3.3 Illustraties

IV. BREAKDOWNS

- 4.1 Oorspronkelijk model
- 4.2 Modificaties

V. OVERFLOW

- 5.1 Oorspronkelijk model
- 5.2 Modificaties

VI. PRODUKTIELIJN

- 6.1 Oorspronkelijk model
- 6.2 Modificaties
- 6.3 Optimal design toepassing

VII. UITBREIDINGEN EN EVALUATIE

- 7.1 Uitbreidingen
- 7.2 Evaluatie

I. OVERZICHT, INLEIDING EN SAMENVATTING

Ruwe beschrijving

In een produktienetwerk zoals een assemblagelij of lopende band systeem worden onderdelen of ruwe grondstoffen langs verschillende werkstations of machines gevoerd om aldaar aan elk van deze voor enige tijd een bewerking te ondergaan. Tussen de verschillende stations is in de regel veel afhankelijkheid aanwezig als gevolg waarvan negatieve effecten, zoals het verzadigd raken van een station of het uitvallen van een machine, snel doorwerken en cumuleren bij andere stations. Dit kan bijvoorbeeld leiden tot stagnaties en vertragingen bij hoger gelegen stations (stroomopwaarts) of tekorten aan werklust bij lager gelegen stations (stroomafwaarts).

Deze negatieve effecten zijn in de regel des te sterker naarmate onzekerheden in belangrijker mate aanwezig zijn. In het bijzonder gelden daarbij de onzekerheden in de bewerkingstijden bij elk der stations (bedieningstijden) en de conditie van de machines (breakdowns).

Queueing Network

De bovenstaande beschrijving valt onder de noemer van een zogenaamd netwerk van wachtrijen oftewel een "*Queueing Network*". Onder een dergelijk netwerk verstaat men een systeem van afzonderlijke bedienings- of servicestations met taken (onderdelen, klanten, jobs of opdrachten) die van station naar station routeren om daar voor zekere tijd bij zo'n station te verblijven. De twee essentiële aspecten hierbij zijn:

- (i) *Onzekerheden* in de bedieningstijden
- (ii) *Afhankelijkheden* tussen de stations.

Motivatie

De evaluatie van een dergelijk netwerk, zogenaamd *prestatie analyse*, zowel in de ontwerp (design) fase als bij het reeds in gebruik zijn (on line), is van uiterst belang, niet in de laatste plaats vanwege de vaak sterk competitieve omgeving waarin het zich bevindt.

Typische prestatie indicatoren daarbij zijn grootheden als een doorstroom of throughput , een doorloop - of response tijd , een verlies- of blokkeringskans of een machine utilisatie. Het puur meten van deze grootheden, moge dit al mogelijk zijn, levert slechts een eerste momentopname van de huidige situatie en geenszins inzicht voor meer *qualitatieve afwegingen*. Bovendien is een dergelijk meten in velerlei situaties onmogelijk zoals bijv. in ontwerpfasen of bij niet duidelijk zichtbare verliezen. *Analytische resultaten* zouden in dit opzicht meest wenselijk zijn. Helaas echter zijn deze veelal niet verkrijgbaar en moet men zich voor evaluatie wenden tot numerieke berekeningen of computer simulaties met daaraan gekoppeld nadelen als:

- Al gauw duur en complex of zelfs onuitvoerbaar door de omvang en complexiteit.
- Te getalsmatig i.p.v. kwalitatief inzichtelijk.
- Geen garantie over betrouwbaarheid.

Een groot aantal approximatieve technieken is daarom ontwikkeld (zie bijv. [2], [3], [5], [10], [11]). Deze hebben echter in het algemeen toch nog als nadeel dure of tijdrovende berekeningen te vereisen en bovendien geen garantie te verschaffen omtrent noch de algemene toepasbaarheid noch de precisie.

Doelstelling

In velerlei praktische situaties echter, is niet zozeer een exacte of nauwkeurige evaluatie van systeemgrootheden strikt nodig. Integendeel, men kan vaak volstaan met slechts een globale indicatie van de ordegrootte dan wel de kwalitatieve eigenschappen van specifieke prestatie-maten. Bijvoorbeeld, is een verlieskans in de orde van 1% dan wel 10% óf wat is het effect van breakdowns?

Bovendien is ook het veronderstellen van exacte systeeminputgegevens, als bedienings- en breakdown rates, veelal gebaseerd op schattingen en dus *onzekerheden*.

Het is dan ook wel zo wenselijk om *simpele uitdrukkingen* te kunnen gebruiken waarmee gegarandeerde onder- en bovengrenzen voor relevante prestatie-maten verkregen kunnen worden.

Resultaten

Dit artikel beoogt derhalve inzicht te verschaffen in:

- Het oplosbaar en het niet oplosbaar zijn van een produktienetwerk met onzekerheden en;
- Hoe dit inzicht te gebruiken om ook voor niet oplosbare systemen simpele afschattingen te verschaffen.

Resultaten en overzicht

Om aan genoemde doelstelling op illustratieve wijze gestalte te geven is voor de volgende opzet gekozen:

- (i) Eerst wordt een simpel maar instructief tandem voorbeeld geanalyseerd waarmee inzicht wordt verkregen in de benodigde condities voor oplosbaarheid.
- (ii) Aan de hand van dit voorbeeld wordt vervolgens een modificatie techniek geïntroduceerd indien een realistisch maar complicerend aspect als blokkering in aanmerking genomen wordt. Dit suggereert een simpele evaluatiemethode als beschreven in een aparte sectie.
- (iii) Deze methode wordt vervolgens geïllustreerd voor een drietal kenmerkende aspecten die elk de oplosbaarheid teniet doen, namelijk:
 - *Uitval (breakdowns)*
 - *Dynamische routing (overflow)*
 - *Eindige opslagcapaciteiten (buffers).*

Voor elk van deze worden op puur *intuïtieve wijze* simpele afschattingen afgeleid met behulp van de modificatiemethode. Numerieke illustratie ondersteunt de methode als een mogelijk zinvol praktisch stuk gereedschap ter verkrijging van een eerste snelle indicatie van ordegrootheden.

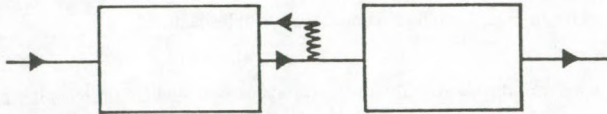
Middels een 'optimal design' voorbeeld wordt tenslotte ook het kwalitatieve karakter van de resultaten geïllustreerd. Een afsluitende sectie belicht zowel mogelijke uitbreidingen als beperkingen in complexere situaties.

II. STATIONSEVENWICHT EN PRODUKT VORMEN

In deze sectie zal aan de hand van een simpel instructief maar niettemin representatief voorbeeld allereerst een zogenaamd principe van stationsevenwicht worden afgeleid als een sleuteigenschap voor simpele exacte oplossingen. Vervolgens wordt geïllustreerd hoe deze eigenschap dikwijls verloren gaat als gevolg van realistische aspecten als blokkering.

2.1 EEN TANDEM VOORBEELD

Beschouw een simpele produktielijn bestaande uit twee achtereenvolgende werkstations elk met één machine. Klanten arriveren volgens een Poisson proces, d.w.z. met exponentieel verdeelde tussenpozen, met parameter λ en vereisen een exponentiële hoeveelheid werk met parameter μ_1 bij station 1 en μ_2 bij station 2.



Ruwweg gesproken betekent dit dat gedurende een klein tijdsinterval Δt het volgende kan plaatsvinden met kans:

$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$: een klant arriveert bij station 1

$\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$: een klant, mits aanwezig, verhuist van station 1 naar 2

$\mu_2 \Delta t + o(\Delta t)$: een klant, mits aanwezig, beeindigt bediening bij station 2.

waarbij $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ als $\Delta t \rightarrow 0$. Oftewel, per tijdseenheid arriveren gemiddeld λ klanten en station i heeft een bedieningscapaciteit (uitstroom) van μ_i klanten per tijdseenheid zolang dat station werkzaam is.

We zijn nu geïnteresseerd in de evenwichtkans $\pi(n_1, n_2)$ van een toestand met n_1 klanten bij station 1 en n_2 klanten bij station 2 voor willekeurige n_1 en n_2 . Ruwweg kan deze kans geïnterpreteerd worden als:

- (i) De kans dat het systeem zich in toestand (n_1, n_2) bevindt op tijdstip t waarbij t zeer groot is.
- (ii) De kans dat het systeem zich op een willekeurig moment in toestand (n_1, n_2) bevindt,

aangenomen dat het systeem reeds lang werkzaam is.

- (iii) De fractie van de tijd dat het systeem zich in die toestand bevindt, gezien of uitgemiddeld over een lange periode.

De beschrijvingen (i) of (ii) leiden tot de volgende zogenaamde globale balans vergelijkingen waaraan de kansen $\pi(n_1, n_2)$ moeten voldoen. Een ruime interpretatie hierbij (vermenigvuldig eventueel alle termen met Δt) is dat de kans om uit toestand (n_1, n_2) te verdwijnen gedurende een tijd Δt (de uitstroom) gecompenseerd moet worden door de kans om in eenzelfde interval in die toestand terecht te komen (de instroom), zodat aldus de netto kans op die toestand ongewijzigd blijft.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(n_1, n_2) \mu_1 1_{\{n_1 > 0\}} + \\ \pi(n_1, n_2) \mu_2 1_{\{n_2 > 0\}} + \\ \pi(n_1, n_2) \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \pi(n_1 - 1, n_2) \lambda 1_{\{n_1 > 0\}} + \\ \pi(n_1 + 1, n_2 - 1) \mu_1 1_{\{n_1 > 0\}} + \\ \pi(n_1, n_2 + 1) \mu_2 \end{array} \right\}$$

UITSTROOM

INSTROOM

Hierbij stelt $1_{\{A\}}$ een indicator van een conditie A voor, d.w.z. $1_{\{A\}} = 1$ als conditie A vervuld is en 0 anders. In het bijzonder is aan deze vergelijkingen voldaan indien een oplossing $\pi(n_1, n_2)$ gevonden zou kunnen worden van de lokalere vergelijkingen:

$\pi(n_1, n_2) \mu_1$	=	$\pi(n_1 - 1, n_2) \lambda$	$(n_1 > 0)$	(2.2)(i)
$\pi(n_1, n_2) \mu_2$	=	$\pi(n_1 + 1, n_2 - 1) \mu_1$	$(n_2 > 0)$	(2.2)(ii)
$\pi(n_1, n_2) \lambda$	=	$\pi(n_1, n_2 + 1) \mu_2$		(2.2)(iii)

Door herhaalde toepassing van (2.2)(i) en (2.2)(iii) en controle in (2.2)(ii) dan wel door directe substitutie verifieert men vrij direct de volgende oplossing van deze meer gedetailleerde vergelijkingen (2.2):

$\pi(n_1, n_2) = c(\lambda/\mu_1)^{n_1} (\lambda/\mu_2)^{n_2}$	(2.3)
--	-------

met $c = (1-\lambda/\mu_1)(1-\lambda/\mu_2)$ de normalisatie constante. Aldus is een simpele analytische oplossing verkregen waarmee aan de globale balansvergelijkingen (2.1) op een zelfs meer gedetailleerde wijze (2.2) voldaan is. Het is nu van bijzonder belang op te merken dat deze vergelijkingen (2.2) gelezen of geïnterpreteerd kunnen worden als:

Station balans

De *uitstroom* t.g.v. een vertrek bij *station* $s =$
De *instroom* t.g.v. een binnenkomst bij dat *station* s

(2.4)

Namelijk,

(2.2)(i)	voor station $s=1$	(balans per station 1)
(2.2)(ii)	voor station $s=2$	(balans per station 2)
(2.2)(iii)	voor station $s=3$	(balans per station 3),

Hierbij is de buitenwereld als een extern station $s=3$ is opgevat.

De mathematische uit=instroom vergelijkingen (2.1) zijn hiermee gereduceerd tot fysisch interpreteerbare uit=instroom vergelijkingen en wel *per station* (2.5). Dit leidde vervolgens tot een simpele oplossing (2.3). Deze oplossing valt onder de noemer van een zogenaamde produktvorm vanwege zijn factoriserende vorm naar de *individuele stations*. Algemeen kan ruwweg gesteld worden dat deze twee observaties direct gerelateerd zijn. D.w.z.

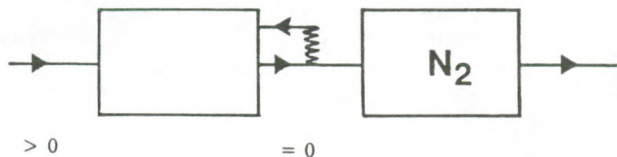
Een simpele produktvorm oplossing $\iff$ Balans per station

2.2 BLOKKERING

Puur uitgaande van de noodzakelijkheid van station-balans voor het garanderen van een produktvorm en de natuurlijke verbale interpretatie daarvan als volgens (2.4), kunnen we nu eenvoudig onderzoeken welke consequenties dit met zich meebrengt voor meer realistische situaties waarbij blokkering kan optreden.

Geen produkt-vorm

Veronderstel daartoe dat station 2 niet meer dan een eindig aantal jobs kan herbergen, zeg N_2 . Indien station 2 vol is worden jobs die station 1 verlaten teruggestuurd naar station 1. De effectieve uitstroom bij station 1 wordt derhalve nul. Men kan dus, althans in het exponentiële geval, evenzo goed veronderstellen dat de bediening van station 1 stopt zodra en zolang station 2 vol is.



Beschouw nu een toestand (n_1, n_2) waarbij station 2 vol is en station 1 niet leeg. Zeg $N_2 = 10$ en $(n_1, n_2) = (2, 10)$. In die toestand geldt dan voor station 2:

De stroom uit toestand $(2, 10)$ t.g.v. een vertrek bij station 1: $= 0$

De stroom in die toestand $(2, 10)$ t.g.v. een binnenkomst bij station 1: > 0

Balans voor station 1 is dus noodzakelijkerwijs teniet gedaan zodat volgens (2.6) geen produktvorm verwacht mag worden. Inderdaad blijkt voor dit systeem geen expliciet analytische oplossing voor $\pi(n_1, n_2)$ te bestaan en zeker dus geen produktvorm. De fysische interpretatie van station-balans leidt in dit simpele geval dus direct tot een negatief resultaat. Hieruit zou men de conclusie kunnen trekken, dat het praktisch nut van station-balans zeer gering is.

Modificatie

Aan de andere kant echter suggereert dit principe een modificatie waarmee de inconsistentie bij station 1 direct verholpen wordt, namelijk:

Zodra station 2 vol is *stop* ook de invoer.

Dan geldt: niet alleen de *uitstroom* bij station 1 $= 0$

maar tegelijkertijd ook de *instroom* bij station 1 $= 0$

Dit suggereert op intuïtieve wijze dat station-balans gerepareerd is waarmee aldus een produktformule als (2.3) weer geldig lijkt. Inderdaad, door simpelweg de formule (2.3) te substitueren met toestanden beperkt tot $n_2 \leq N_2$, controleert men direct de aangepaste station-balans vergelijkingen: (zie 2.2):

$$\pi(n_1, n_2) \mu_1 1_{\{n_2 < N_2\}} = \pi(n_1 - 1, n_2) \lambda 1_{\{n_2 < N_2\}} \quad (n_1 > 0) \quad (2.7) \text{ (i)}$$

$$\pi(n_1, n_2) \mu_2 = \pi(n_1 + 1, n_2 - 1) \mu_1 \quad (n_2 > 0) \quad (2.7) \text{ (ii)}$$

$$\pi(n_1, n_2) \lambda 1_{\{n_2 < N_2\}} = \pi(n_1, n_2 + 1) \mu_2 1_{\{n_2 < N_2\}} \quad (n_2 > 0) \quad (2.7) \text{ (iii)}$$

De beperking $n_2 < N_2$ heeft hierbij voor elk station een identiek effect voor zowel de uitstroom (linker) als de instroom (rechter) kant zodat de oplossing voor het eerdere onbeperkte geval onaangetast blijft.

Praktisch nut?

Welk nut heeft deze modificatie nu? Immers, het correspondeert niet met het feitelijke model dat geanalyseerd moet worden. De gedachte dat het een redelijke approximatie zou kunnen opleveren is te optimistisch. Immers een vrij drastische modificatie vindt plaats telkens wanneer het tweede station vol is, hetgeen realistischerwijze met vrij grote kans kan voorkomen. Bijvoorbeeld gedurende 10% van de tijd.

Wel echter zal deze modificatie een gegarandeerde bovengrens opleveren voor de verlieskans bij aankomst waarbij ook het eerste station eindig wordt verondersteld hetgeen later in sectie 6 meer gedetailleerd uiteengezet zal worden. Eveneens zal daarbij d.m.v. een andere modificatie een ondergrens voor die kans voorgesteld worden. Aldus is een simpel middel verschaft om de werkelijke waarde van boven en beneden af te schatten.

Deze afschattingen zullen uiterst grof zijn. Echter gezien de moeilijke analyseerbaarheid van het oorspronkelijke model enerzijds en de eenvoud van produktvorm formules anderzijds kan deze afschattingmethode toch fungeren als een mogelijk praktisch nuttig hulpmiddel.

In het navolgende zal deze afschattingmethode op illustratieve wijze nader onderzocht worden voor een drietal karakteristieke voorbeelden. Allereerst wordt in de volgende sectie een algemene beschrijving van de methode gegeven.

- Eindige buffers of beperkte opslagcapaciteiten (blokkering)
- Veranderingen in de routing van onderdelen (bijv. overflow)
- Het geheel of gedeeltelijk uitvallen van machines (breakdowns)

Met name zullen situaties voorkomen waarin bij één der stations één van de stromen, de uitstroom of de instroom, positief maar de ander nul is. Het volgende modificatieschema is dan van toepassing:

<i>Falen van SB</i>	<i>SB-Modificatie</i>
• $IN = 0$ maar $UIT > 0 \rightarrow$	Maak $IN > 0$ of $UIT = 0$
• $IN > 0$ maar $UIT = 0 \rightarrow$	Maak $IN = 0$ of $UIT > 0$

Weliswaar kan het aantal situaties of toestanden waarin SB faalt groot zijn maar de oorzaak van dit falen is dikwijls terug te brengen tot één of hooguit enkele gemeenschappelijke factoren zoals bovengenoemd.

Vraag 2.

Uit bovenstaand schema blijkt dat veelal niet alleen slechts enkele modificaties nodig maar ook slechts mógelijk zijn. Kandidaten voor een prestatimaat die door deze modificaties worden afgeschat doen zich daarbij vrij natuurlijk voor. In het bijzonder zal het in de regel puur op intuïtieve basis duidelijk zijn wanneer het een onder- of bovenafschatting betreft. Desgewenst kunnen formele bewijzen met behulp van monotonie resultaten uit Markov-keten theorie getoond worden (bijv. [1], [13], [14], [15], [16], [18], [20], [21], [22], [23], [24]). Dit blijkt echter voor praktische overtuiging niet nodig. De voorbeelden die in de secties hierna volgen zullen deze uitspraken ondersteunen.

Vraag 3.

Tenslotte maar meest belangrijk is de vraag van praktische relevantie. Uiteraard kan men geen nauwkeurige resultaten verwachten door vrij drastische aanpassingen van het systeem mechanisme. Gezien de eenvoud van produktvorm formules echter, kunnen de resultaten toch van praktisch nut zijn ter verkrijging van:

- *Een snelle indruk van orde* grootheden
- *Qualitatieve inzichten*

Numerieke resultaten en een 'optimal design' toepassing zullen dit nader illustreren.

3.3 ILLUSTRATIES

In de volgende secties zal een drietal toepassingen of voorbeelden gegeven worden ter illustratie van de modificatie methode. Deze voorbeelden betreffen weliswaar slechts eenvoudige componenten maar representeren desondanks karakteristieke praktische aspecten waarmee exacte produktvorm oplossingen verloren gaan. Als zodanig kunnen ze gezien worden als generieke componenten voor meer complexe situaties. Uitbreidingen in deze richting zullen kort in sectie 7 belicht worden.

Als prestatiemaat zal in elk van deze toepassingen de blokkerings- of verlieskans B onderzocht worden voor het bij aankomst in het systeem, waarbij slechts een beperkt aantal in het systeem toegelaten is, niet geaccepteerd en dus afgewezen worden. Met λ de aankomst intensiteit wordt hiermee tevens, middels de simpele relatie

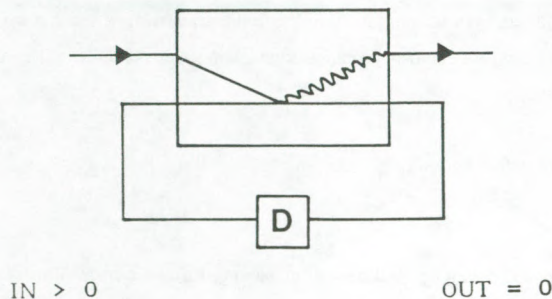
$$T = \lambda (1-B),$$

de *doorstroom of throughput* T geanalyseerd, terwijl analoge resultaten vrij direct concludeerbaar zijn voor bijvoorbeeld het gemiddeld aantal aanwezige taken L of de doorlooptijd D .

IV. BREAKDOWNS

Het uitvallen van machines of andere noodzakelijke resources als hulpgereedschappen is een precair punt van zorg in met name productielijnen vanwege het sterk cumulatieve effect in niet alleen het desbetreffende werkstation zelf maar ook de hogerop gelegen stations(stagnatie) dan wel de lager gelegen stations (tekorten). In deze sectie onderzoeken we een uiterst simpel maar daarmee niet minder representatief geval van dit realistische fenomeen en probleem.

4.1 OORSPRONKELIJK MODEL



Beschouw een werkstation met een enkele machine en een opslagcapaciteit voor ten hoogste N jobs (pallets). Deze jobs arriveren volgens een Poissonproces met parameter λ (dus random en gemiddeld λ per tijdseenheid). Elke job vereist een exponentiële bewerkingstijd met parameter μ (dus het station voltooid gemiddeld μ bewerkingen per tijdseenheid zolang het werkzaam is). De machine echter is onderhevig aan *mogelijke storingen*, zeg met kans $\gamma_1 \Delta t + O(\Delta t)$ in een klein tijdsinterval Δt , onafhankelijk van het werkzaam zijn of niet. Indien de machine stuk is moet het gerepareerd worden, met exponentiële duur met parameter γ_0 . Het station verkeert dus alternerend in een actieve (*on*) en een passieve (*off*) staat in gemiddelde tijdsverhoudingen:

<i>on</i>	<i>off</i>	<i>on</i>
$\frac{1}{\gamma_1}$	$\frac{1}{\gamma_0}$	$\frac{1}{\gamma_1}$

Ondanks de eenvoud van deze beschrijving en het feit dat de breakdowns volledig onafhankelijk van de werkbelasting kunnen optreden, is de evenwichtsverdeling slechts op recursieve wijze te berekenen en bestaat hiervoor geen simpele exacte uitdrukkingen. Algemeen kan slechts een uitdrukking in termen van genererende functies verschaft worden.

Een directe verklaring voor het ontbreken van een dergelijke simpele oplossing is het falen van stationevenwicht. Immers, als het station op '*off*' staat is er geen uitstroom (*uitstroom* = 0) maar is instroom nog steeds mogelijk (*instroom* > 0).

4.2 MODIFICATIES

Bovenafschatting. De bovenstaande inconsistentie van in en uitstroom suggereert de volgende modificatie waarmee station-balans gerepareerd lijkt te worden:

Wanneer het systeem down is : wijs binnenkomsten af.

Hiermee is niet alleen de uitstroom maar ook de instroom bij het station nul geworden wanneer het systeem op 'off' staat, terwijl het station zich als een normaal station zonder breakdowns gedraagt als het op 'on' staat.

Numerieke illustratie

De onderstaande tabel geeft enige numerieke onderbouwing. Hierin is

$\rho = \lambda/\mu$ en $\tau = \gamma_1/\gamma_0$ hetgeen min of meer als fraktie van de downtijd gezien kan worden. (Zowel τ als de verlieskansen zijn in % gegeven). Het kwalitatieve effect van een afnemende downtijd $\sim \tau$ is hierbij goed zichtbaar. Voor kleine maar daarmee realistische frakties als $\tau \leq 1\%$ worden de intervallen tevens vrij nauwkeurig.

N	ρ	τ	B_L	B_U
80	10	0.1	0.90	0.91
80		0.1	0.50	0.55
		0.05	0.50	0.53
4	1	0.2	0.20	0.33
		0.1	0.20	0.27
		0.05	0.20	0.24
		0.02	0.20	0.22
10	1	0.01	0.091	0.10
		0.005	0.091	0.096
15	1	0.02	0.062	0.081
		0.01	0.062	0.072
		0.005	0.62	0.068
10	0.8	0.01	0.023	0.032
		0.005	0.023	0.029
		0.001	0.023	0.025
10	0.5	0.01	0.000	0.011
		0.005	0.000	0.006
		0.001	0.000	0.002

Opmerkingen

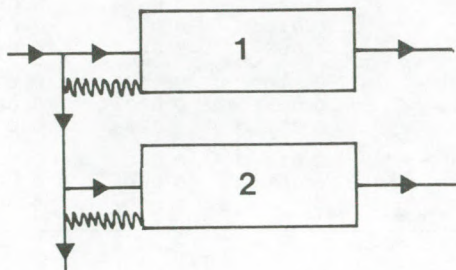
1. Analoge resultaten kunnen afgelegd worden voor situaties waarbij breakdowns alleen kunnen optreden als het station werkzaam is (het zogenaamde actieve geval in tegenstelling tot het hier bestudeerde zogenaamde onafhankelijke geval). Evenzo kunnen meer-machine stations worden toegelaten.
2. Een formeel bewijs van de relatie $B_L \leq B \leq B_U$ is te vinden in [20]
Hierbij kunnen de exponentiële aannamen losgelaten worden.

V. OVERFLOW

Een ander realistisch aspect in met name flexibele productie systemen is de mogelijkheid om onderdelen dynamisch te routeren naar een gunstiger bewerkingslokatie indien zich bij een zeker station of machine werkophopingen gaan voordoen. In deze sectie onderzoeken we hiervan wederom een zo simpel mogelijk maar daarmee niet minder essentieel representatieve situatie.

5.1 OORSPRONKELIJK MODEL

Afzonderlijke onderdelen ter bewerking arriveren bij een station met N_1 machines volgens een Poisson proces proces met parameter λ . Als alle machines bezet zijn wordt een binnenkomend onderdeel echter naar een 'overflow' station verwezen met N_2 machines. Als in geen van beide stations een machine vrij is wordt het onderdeel afgewezen. De hoeveelheid bewerking dat een onderdeel vereist is exponentieel met parameter μ . De bewerkingssnelheid van een machine bij station 2 bedraagt f . Dit t.o.v. een snelheid 1 bij station 1. Tevens zij vermeld dat een bewerking aan een onderdeel wordt afgemaakt door de machine waaraan dat onderdeel is toegewezen.



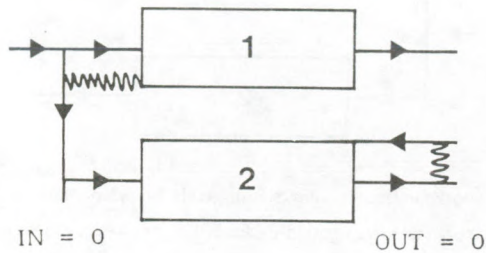
Ook hier is geen simpele formule beschikbaar voor de evenwichtsverdelingen van de werklasten bij de stations, noch voor daarmee samenhangende mate als de doorstroom of verlieskans. Hooguit (en slechts in dit simpele exponentiële geval) kan station 1 geïsoleerd als een standaard Erlang-verlies model worden beschouwd, en idem station 2 maar dan met een niet-Poisson input, in dit geval hyper-exponentieel, zie [4]. Als in de vorige sectie is de verklaring hiervoor gelegen in het ontbreken van balans per station.

Veronderstel daartoe dat $N_1 = 10$ en beschouw de toestand (8,1). In dat geval is de uitstroom bij station 2 positief omdat aldaar bewerking plaatsvindt, maar er is geen instroom in die toestand bij station 2 omdat een binnenkomende klant naar station 1 wordt verwezen.

5.2 MODIFICATIES

Bovenafschatting. Op grond van dit inzicht kan men aan de volgende (kunstmatige) modificatie denken.:

Stop bewerking bij station 2 als er machines vrij zijn bij station 1



Zowel de uitstroom als de instroom bij station 2 worden hiermee op nul gesteld wanneer station 1 beschikbaar is terwijl beide positief zijn wanneer station 1 verzadigd is. Op eerste gezicht lijkt station-balans dus gerepareerd. Inderdaad verifieert men direct de station-balans vergelijkingen (5.1) voor station 1 en (5.2) voor station 2:

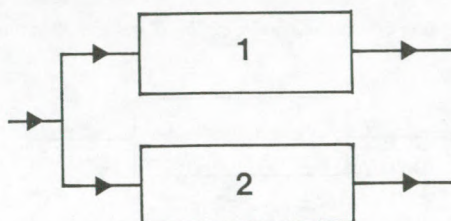
$$\begin{aligned} \pi(n_1, n_2) n_1 \mu &= \pi(n_1 - 1, n_2) \lambda \quad (n_1 > 0) \\ \pi(n_1, n_2) n_2 \mu f 1_{\{n_1=N_1\}} &= \pi(n_1, n_2-1) \lambda 1_{\{n_1=N_1\}} \quad (n_2 > 0) \end{aligned}$$

waar ook hier de indicator $n_1 = N_1$ is opgenomen voor het duidelijk maken van het effect van de modificatie, door substitutie van de produktvorm formule:

$$\pi(n_1, n_2) = c(1/n_1!)(1/n_2!) (\lambda/\mu)^{n_1} (\lambda/\mu f)^{n_2} \quad (n_1 \leq N_1, n_2 \leq N_2) \quad (5.3)$$

Het is voorts intuïtief duidelijk dat station 2 en daarmee het systeem in totaliteit door deze modificatie meer bezet wordt gehouden en dus tot een hogere afwijzingskans B_U leidt. (Voor een formeel en algemener bewijs zie [1]). Deze kans wordt berekend met (5.3) volgens $B_U = \pi(n_1 = N_1, n_2 = N_2)$.

Onderafschatting. Indien tevens verondersteld wordt dat de snelheid van de overflow machines minstens even groot is, d.w.z. $f \geq 1$, wordt een onderschatting B_L verkregen door een binnenkomende job willekeurig een van de vrije machines uit station 1 of 2 te laten kiezen. Dus als reeds n jobs aanwezig zijn wordt één van de vrije $m = N_1 + N_2 - n$ machines elk met kans $1/m$ gekozen.



De oorspronkelijke voorkeurssituatie voor station 1 als in het oorspronkelijke model is hiermee verdwenen. Het beschreven falen van station-balans is daarmee weggevallen. Het wordt verder zonder bewijs vermeld dat nu aan stationsbalans inderdaad weer voldaan is door substitutie van

$$\pi(n_1, n_2) = c \begin{pmatrix} N_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{(n_1+n_2-1)} (N_1+N_2-k)^{-1} (\lambda/\mu_1)^{n_1} (\lambda/\mu_2)^{n_2} \quad (n_1 \leq N_1, n_2 \leq N_2)$$

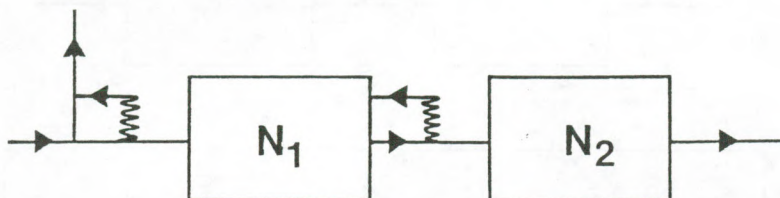
Hieruit valt B_L op dezelfde wijze te berekenen als B_U .

Numerieke illustratie. De numerieke resultaten in onderstaande tabel geven enige indruk van de onnauwkeurigheid van de afschattingen. Als eerste indicatoren van orde grootte lijken ze zinvol.

s	m	λ	f	B_L	B_U
3	1	6	2	.395	.443
			4	.297	.354
			3	.160	.208
			4	.104	.148
	2	2	2	.074	.105
			4	.046	.070
3	2	6	2	.239	.312
		3	4	.060	.107
5	1	6	2	.211	.270
		3	2	.037	.066
5	2	6	2	.117	.191
		3	2	.010	.034

VI. PRODUKTIELIJN

In deze sectie wordt het instructieve voorbeeld uit sectie 2 nader onderzocht, d.w.z. een productie- of assemblagelijns structuur met *achtereenvolgende stations en realistisch(er) beperkte opslagcapaciteiten*. Ook hier wordt de toepassing eenvoudig gehouden maar vertegenwoordigt het desondanks de wezenlijke complicatie voor analyseerbaarheid in productielijnen.



6.1 OORSPRONKELIJK MODEL

Beschouw het tandem model als beschreven in sectie 2.1 en onder de eindigheidsbeperking N_2 voor station 2 als beschreven in sectie 2.2. Bovendien wordt ook het eerste station 1 beperkt verondersteld, zeg met opslagbeperking voor niet meer dan N_1 jobs.

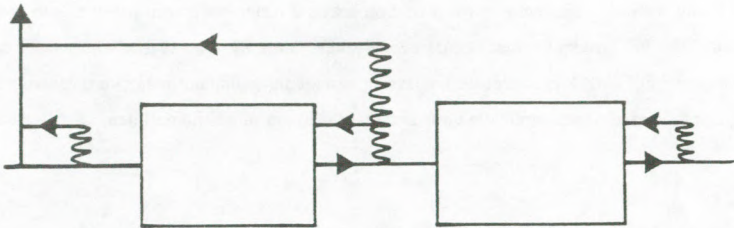
Het falen van station-balans bij station 1 als gevolg van de beperking N_2 bij station 2 is reeds uiteengezet in sectie 2.2. Analoog (men kan het geheel cyclisch zien met de buitenwereld als derde station) faalt station-balans ook bij station 2 als station 1 verzadigd is.

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow >0 \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veronderstel bijvoorbeeld dat $N_1 = 10$. Dan is de stroom uit toestand $(10,1)$ t.g.v. (een vertrek bij) station 2 positief. Echter de stroom in die toestand t.g.v. (een binnenkomst bij) station 2 is nul aangezien de toestand $(11,0)$ niet toegelaten en dus mogelijk is.

6.2 MODIFICATIES

Bovenafschatting. Voortbouwend op de analyse in sectie 2.2 met ook het bovenstaande falen van station-balans in aanmerking genomen wordt de volgende modificatie voorgesteld ter herstel van station-balans bij zowel station 1 als 2:

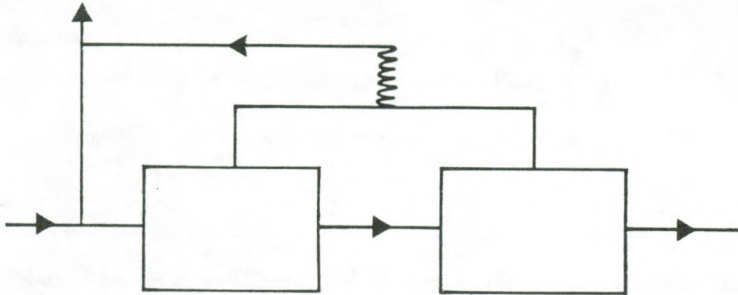


Wijs binnenkomsten af niet alleen wanneer station 1 ($n_1=N_1$) maar ook wanneer station 2 ($n_2=N_2$) vol is. Bovendien, stop de bewerking bij station 2 zodra en zolang station 1 vol is ($n_1=N_1$).

Inderdaad blijkt met deze modificaties het systeem weer aan station-balans te voldoen als volgens de station-vergelijkingen (2.7) door invulling van de produkt-vorm formule (2.3). De enige benodigde toevoeging is een indicatorfunctie $1_{\{n_1 < N_1\}}$ in zowel de linker als rechter zijde van (2.7)(ii), waarmee de oplossing (2.3) ongewijzigd blijft.

Intuitief lijken beide modificaties tot een verhoging van de afwijzingskans bij binnenkomst te leiden. Immers station 2 wordt meer bezet gehouden en daarmee indirect ook station 1. Bovendien worden binnenkomsten ook geblokeerd in situaties waarbij dat oorspronkelijk niet gebeurde. We mogen dus een bovenafschatting $B_U \geq B$ verwachten met $B_U = \pi(n_1=N_1 \text{ of } n_2=N_2)$.

Onderafschatting. Omgekeerd zou het falen van station-balans bij station 1 ook gerepareerd kunnen worden door de uitstroom positief te maken of beter gezegd altijd positief te houden. Om anderzijds toch met de capaciteitsbeperkingen rekening te houden wordt de volgende modificatie voorgesteld:



Een binnenkomende job wordt alleen afgewezen als er reeds $N_1 + N_2$ jobs in totaal aanwezig zijn. Elke station laat tot $N_1 + N_2$ jobs toe, zodat een eenmaal geaccepteerde job nooit meer geblokkeerd kan worden.

De station-balans vergelijkingen (2.2)(i) en (2.2)(ii) zijn nu direct van toepassing voor een willekeurige toestand (n_1, n_2) met $n_1 + n_2 \leq N_1 + N_2$, terwijl (2.2)(iii) slechts gering wijzigt in:

$$\pi(n_1, n_2) \lambda 1_{\{n_1 + n_2 < N_1 + N_2\}} = \pi(n_1, n_2 + 1) \mu_2 1_{\{n_1 + n_2 < N_1 + N_2\}}$$

De oplossing (2.3) blijft dus geldig zij het beperkt tot toestanden met $n_1 + n_2 \leq N_1 + N_2$. Ruwweg zou men kunnen stellen dat het totaal aantal beschikbare opslagposities $N_1 + N_2$ gepooled is. Zeg alsof verplaatsbare stoelen op een dynamische wijze gebruikt worden waar nodig bij station 1 en 2 totdat alle stoelen bezet zijn. Het systeem zal dus efficiënter werken dan wanneer alle posities zijn bevroren met N_1 in station 1 en N_2 in station 2. We mogen dus een onderafschatting verwachten:

$$B_L \leq B \text{ met } B_L = \pi(n_1 + n_2 = N_1 + N_2)$$

Opmerking. Weliswaar is dezelfde produktvorm formule (2.3) van toepassing voor zowel de onder- als bovenafschatting maar voor verschillende gebieden van toelaatbare toestanden tot:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 \leq N_1 + N_2 & \text{voor de onderafschatting} \\ n_1 \leq N_1 ; n_2 \leq N_2 \text{ en } n_1 + n_2 \neq N_1 + N_2 & \text{voor de bovenafschatting} \end{cases}$$

De normalisatie constante c in (2.3) is derhalve voor beide modellen verschillend.

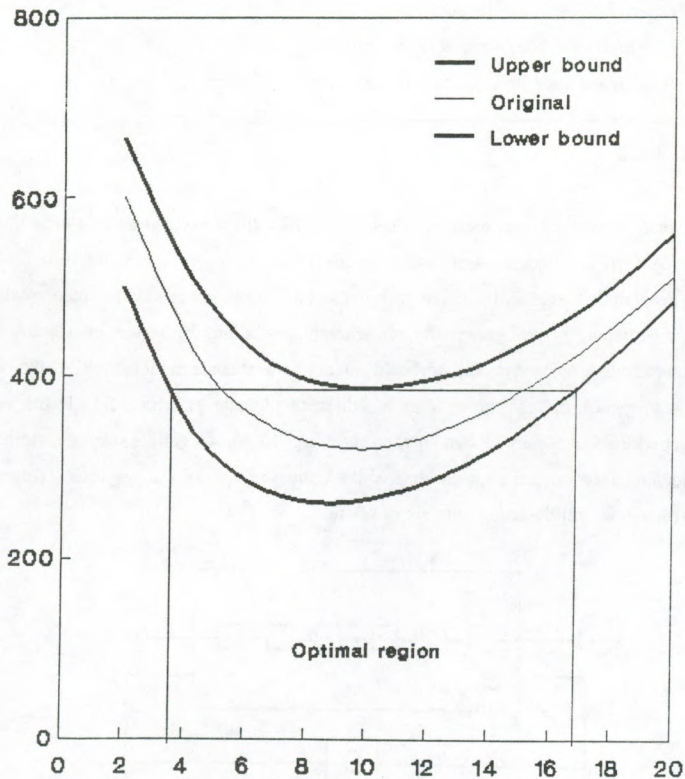
Numerieke Illustratie.

De onderstaande tabel geeft enige numerieke voorbeelden. Hierin is de exacte waarde B verkregen met numerieke berekening en geeft de waarde $\bar{B}$ het gemiddelde van de onder- en bovenafschatting als mogelijke simpele approximatie. Wederom blijkt hieruit enerzijds de grote onnauwkeurigheid van de afschattingen, maar anderzijds het mogelijk gebruik om op eenvoudige wijze zekerheid te verschaffen over de orde grootte, bijvoorbeeld een verlieskans onder 1% bij 40 en 20 plaatsen bij station 1 en 2. Ook kwalitatieve resultaten, zoals dominantie van de kleinste bewerkingssnelheid of de kleinste buffer van de twee stations, werden met de produktvorm afschattingen duidelijk kenbaar gemaakt. Hieronder geven we een speciale illustratie van het mogelijk nut van de afschattingen juist voor kwalitatieve doeleinden ondanks hun grote onnauwkeurigheid.

N_1	N_2	μ_1	μ_2	B_L	B_U	B	$\bar{B}$
1	1	1	1	.500	.667	.600	.583
2	2	1	1	.333	.500	.422	.417
2	2	.2	.2	.842	.893	.867	.867
2	2	.5	.1	.900	.912	.903	.906
3	3	1	1	.250	.400	.325	.325
5	3	1	1	.200	.348	.280	.274
5	5	1	1	.166	.286	.222	.226
10	10	1	1	.090	.167	.124	.128
20	20	1	1	.047	.091	.064	.069
40	20	1	1	.003	.007	.003	.005
5	5	.1	.1	.909	.948	.917	.928
5	5	.5	.5	.900	.910	.900	.904
5	5	.5	.5	.539	.674	.584	.611
5	5	.5	2.0	.500	.512	.508	.506
5	5	2.0	2.0	.002	.032	.018	.017
5	10	.1	.1	.906	.948	.909	.926
5	10	.5	.5	.533	.671	.547	.602
5	10	2.0	2.0	.000	.017	.009	.009

6.3 OPTIMAL DESIGN TOEPASSING

Veronderstel dat het totaal aantal plaatsen $N_1 + N_2$ (analoge resultaten zijn te verkrijgen waarbij dit geen opslagplaatsen maar zelfs het aantal machines voorstelt) nog valt te bepalen of beter gezegd te optimaliseren met een afweging van (lineaire kosten in dit aantal enerzijds en (lineaire) verlieskosten in de verlieskansen B anderzijds. De curven op basis van de gegarandeerde onder en bovenafschattingen lopen dan weliswaar wijd uit elkaar maar vertonen wel heel sterk hetzelfde kwalitatieve karakter met min of meer hetzelfde 'optimum' 8, 9, of 10. Elk van deze aantallen zal dus ook voor het werkelijke model een zeer goede keuze zijn. Bovendien garanderen de curven een optimum binnen het domein 4-16 (zie figuur) zodat men eventuele verdere berekeningen, zoals numeriek of met simulatie, hiertoe kan beperken.



VII. UITBREIDINGEN EN EVALUATIE

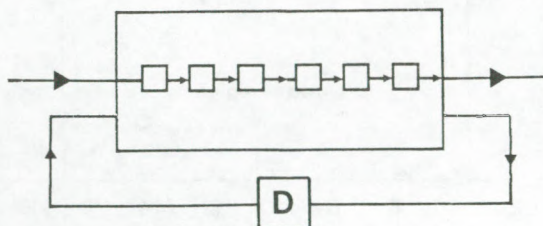
7.1 UITBREIDINGEN

De voorbeelden tot dusver waren klein van omvang maar belichtten desondanks elk een praktisch kernaspect waarmee een produkt-vorm oplossing teniet wordt gedaan. In realistische situaties zijn systemen weliswaar aanzienlijk groter en complexer maar soortgelijke aspecten als beperkte opslagcapaciteiten, blokkering, machine storingen en dynamische routing zullen daarbij nog steeds de meest essentiële rol spelen. De bestudeerde modellen kunnen dan ook als representatieve of generieke componenten gezien met mogelijk praktisch nut voor verschillende doeleinden:

- (i) Als *geïsoleerde* component
- (ii) Als *generiek element* van langere lijnen
- (iii) Als *onderdeel* van een *gecombineerde* situatie
- (iv) Als *bouwstenen* voor *decompositie* en *aggregatie* methoden

(i) Geïsoleerd

Zo kan het reeds zinvol zijn om puur voor een bepaald knelpunt het gedrag van het bijbehorende onderdeel afzonderlijk te onderzoeken, zoals het effect van storingen of van overflow bij dat punt. Hierop zou een van de bestudeerde modellen, eventueel met aanpassingen als een meervoudige i.p.v. enkelvoudige bediening of een groepering van assemblage-stations i.p.v. een enkel station, al vrij direct van toepassing kunnen zijn. Bijvoorbeeld, in het onderstaande model is het breakdown model uit sectie 4 toegepast op een groep van 6 achtereenvolgende stations, die slechts een totale capaciteitsbeperking van N jobs hebben en gemeenschappelijk aan mogelijke storing onderhevig zijn, bijvoorbeeld omdat ze op een gemeenschappelijke conveyer belt zijn aangesloten. De numerieke resultaten zijn van eenzelfde ordegroute als in sectie 4.



N	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	γ_0	γ_1	B_L	B_U
20	1	1	1	1	1	1	25	1	.23	.26
20	1	1	1	1	1	1	50	1	.23	.25
20	1	1	1	1	1	1	100	1	.23	.24
20	10	1	10	1	10	1	50	1	.13	.15
20	10	1	10	1	10	1	100	1	.13	.14
20	10	10	10	10	10	10	50	1	.001	.02
10	10	10	10	10	10	10	100	1	0	.01

(ii) **Generieke component**

Het model en de modificaties voor afschattingen uit sectie 6 zijn direct uitbreidbaar naar meerdere stations dan twee. Uiteraard zal hierbij de onnauwkeurigheid proportioneel toenemen en lijkt hoofdzakelijk de bovenafschatting alleen van nut te blijven

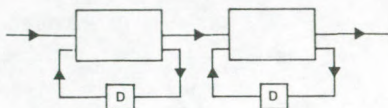
In praktische situaties echter heeft dikwijls niet elk station afzonderlijk beperkte opslag maar veelal een groep van stations gemeenschappelijk door strategisch geplaatste buffers aan het begin, het eind en op slechts enkele tussenplaatsen van de lijn. (Denk bijvoorbeeld aan push- en pull-systemen en zogenaamde *ontkoppelpunten*). Door *aggregatie* van zo'n groep *als enkel station* kan derhalve het aantal "*stations*" in zo'n geval toch beperkt blijven, zeg 3-5. Hieronder is exact dezelfde modificatie van sectie 6 toegepast op 3 van zulke "*stations*".

N_1	N_2	N_3	μ_1	μ_2	μ_3	B_L	B_U	B	$\bar{B}$
1	1	1	1	1	1	.50	.86	.64	.68
1	1	1	10	1	1	.40	.77	.54	.58
2	2	2	10	1	1	.25	.56	.36	.41
5	5	5	1	1	1	.16	.42	.25	.29
5	5	5	10	1	1	.12	.30	.18	.21
1	5	5	10	10	1	.08	.24	.13	.16
1	5	5	100	100	1	.08	.17	.09	.13
1	1	5	10	10	10	.13	.31	.17	.21
1	1	5	100	100	1	.12	.18	.13	.15
1	1	5	10	10	10	0	.18	.10	.09
1	1	5	100	100	100	0	.02	.01	.01

(iii) Combinaties

Een aantal aspecten kunnen tegelijkertijd spelen, bijvoorbeeld blokkeringen en storingen. In dat geval kunnen ook de afzonderlijke modificaties gecombineerd worden. Uiteraard zal daarbij de onnauwkeurigheid cumulatief toenemen. In het onderstaande model bijvoorbeeld beschouwen we het model uit sectie 6 waarbij tevens elk station afzonderlijk aan storing onderhevig is.

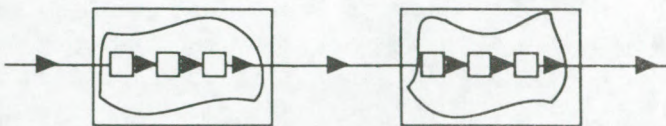
(Tandem lijn met eindige stations en afzonderlijke storingen)



N_1	N_2	μ_1	μ_2	γ_{10}	γ_{11}	γ_{20}	γ_{21}	B_L	B_u
4	4	1	1	100	1	100	1	.20	.34
5	5	100	1	50	1	50	1	.09	.20
10	10	1	1	100	1	100	1	.09	.18
10	10	100	1	50	1	50	1	.04	.13
10	10	100	1	100	1	100	1	.04	.11
10	10	10	10	50	1	50	1	0	.04
10	10	10	10	100	1	100	1	0	.02

(iv) Decompositie methoden

Tenslotte maar daarmee niet minder belangrijk is een van de meest gebruikte methoden ter evaluatie van netwerksystemen die van *decompositie*, waarbij het netwerk wordt opgeknipt in afzonderlijk te evalueren *subnetwerken* die vervolgens volgens een 'afstem procedure' weer aan elkaar worden gekoppeld. De beschreven methode in dit artikel zou juist voor een relatief klein subnetwerk van toepassing kunnen zijn



Bijvoorbeeld, verwijzend ook naar (ii), zou men een netwerk van 6 (eventueel geaggregeerde) stations die elk afzonderlijk een opslagbeperking bezitten kunnen splitsen in twee subnetwerken van 3 stations 'en daarop afzonderlijk de modificatie procedure los kunnen laten als geïllustreerd onder (ii). De onder- en bovenafschatting en middeling voor de throughput van subnetwerk 1 kunnen dan als invoerintensiteit voor subnetwerk 2 gebruikt worden.

Een dergelijke gecombineerde simpele afschattings- en decompositie methode is recentelijk vruchtbaar toegepast in [12].

7.2 EVALUATIE

In dit artikel is inzicht verschaft in de praktische geldigheid en het mogelijke gebruik van een zogenaamd principe van balans per station (station-balans) waarmee simpele produktvorm oplossingen verkregen kunnen worden voor het tijds gemiddelde karakter van productielijnen met onzekerheden.

In het bijzonder werd op basis van inzicht in dit principe een eenvoudige evaluatie of beter gezegd afschattingsmethode ontwikkeld waarmee op puur intuïtieve en fysische basis simpele afschattingen van prestatie maten verkregen konden worden. Typische aspecten die daarbij een rol speelden waren:

- *blokkering*
- *storingen, en*
- *flexible routing*

Hoewel de resultaten zeer onnauwkeurig zijn en de modellen klein lijkt de methode desondanks van mogelijk praktisch nut t.b.v.:

- *snelle evaluaties, en*
- *kwalitatieve doeleinden*

Verschillende uitbreidingen naar enigszins meer complexe situaties lijken mogelijk en ondersteunen de methode voor verdere exploitatie.

ontvangen	21- 6 -1991
geaccepteerd	1 - 12-1992

REFERENCES

- [1] Adan, I.J.B.F. and van der Wal, J. (1989): "Monotonocity of the throughput in single server production and assembly networks with respect to the buffer sizes". In Queueing Networks with blocking (Eds. Perros and Altioek), North Holland, 345-356.
- [2] Boxma, O.J. and Konheim, A.G. (1981): "Approximate Analysis of Exponential Queueing Systems with Blocking". Acta Inform. 15, 19-66.
- [3] Chandy, K.M. and Sauer, C.H. (1978): "Approximate methods for analyzing queueing network models of computer systems". ACM Computing Surveys 10, 281-317.
- [4] Doorn, van E.A. (1984): "On the overflow process from a finite Markovian queue". Performance Evaluation 4, 233-240.
- [5] Gerhwin, S.B. (1987): "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking". Operations Research, March-April, 291-305.
- [6] Hordijk, A. and Ridder, A (1987): "Stochastic inequalities for an overflow model". J. Appl. Probability 24, 696-708.
- [7] Hordijk, A. and Ridder, A. (1988): "Approximating sensitive queueing networks by reversible Markov chains". In: Computer Performance and Reliability, North Holland, 105-117.
- [8] Hordijk, A. and Van Dijk, N.M. (1983): "Networks of queues; Part I: Job-local balance and the adjoint process; Part II: General routing and service characteristics". Lecture Notes in Control and Information Sciences (Eds. Baccelli F. and Fayolle, G.) Springer Verlag, Berlin, 158-205.
- [9] Jackson, J.R. (1957): "Networks of Waiting Lines". Operations Research 5, 518-521.

- [10] Perros, H.G. (1990): "Approximation algorithms for queueing networks with blocking. Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems". Takagi (Ed.) Elsevier Science Publishers B.V.
- [11] Perros, H.G. and Snyder, P.M. (1989): "A computationally efficient approximation algorithm for analyzing open queueing networks with blocking". *Performance Evaluation*.
- [12] Shanthikumar, J.G. and Jafari, M. (1987): "Bounding the performance of tandem queues with finite spaces". Technical report, School of Business Administration, University of California, Berkeley.
- [13] Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1986): "The effect of increasing service rates in a closed queueing network". *J. Appl. Probability* 23, 474-478.
- [14] Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1987): "Stochastic monotonicity of the queue lengths in closed queueing networks". *Operations Research* 35, 583-588.
- [15] Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1989): "Monotonicity and concavity properties in cyclic queueing networks with finite buffers". In: *Queueing Networks with Blocking* (Eds. Perros and Altio), North Holland.
- [16] Stoyan, D. (1983): "Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models". John Wiley & Sons, New York.
- [17] Suri, R. (1984): "Generalized Quick Bounds for Performance of Queueing Networks". *Comp. Perf.* 5, 116-120.
- [18] Tsoucas, P. and Walrand, J. (1983): "Monotonicity of throughput in non-Markovian networks". To appear: *J. Appl. Probability*.
- [19] Van Dijk, N.M. (1987): "Simple and Insensitive Bounds for a Grading and an Overflow Model". *Oper. Res. Letters* 6, 73-76.
- [20] Van Dijk, N.M. (1988): "Simple Bounds for Queueing System with Breakdowns". *Performance Evaluation* 8, 117-128.

- [21] Van Dijk, N.M. (1989): "A Proof of Simple Insensitive Bounds for a Pure Overflow System". J. Appl. Probability 26, 113-120.
- [22] Van Dijk, N.M. and Lamond, B.F. (1988): "Bounds for the Call Congestion of Finite Single-Server Exponential Tandem Queues". Operations Research 36, 470-477.
- [23] Van Dijk, N.M. and van der Wal, J, (1989): "Simple Bounds and Monotonicity Results for Finite Multi-Server Exponential Tandem Queues". Queueing Systems 4, 1-16.
- [24] Whitt, W. (1986): "Stochastic comparisons for non-Markov Processes". Math. Oper. Res. 11, 608-618.
- [25] Zahorjan, J., Sevcik K.C., Eager, D.L. and Gallar, B. (1982): "Balanced job bound analysis of queueing networks". Comm. Assoc. Comp. Mach. 25, 131-141.