KM 39 (1992)
pg.89-93

TOSSEN EN TOLLEN

J.J.A. Moors*

Waarin experimenteel een opmerkelijke eigenschap van Nederlandse rijksdaalders wordt ontdekt, die achteraf - gedeeltelijk - verklaard kan worden, en waarin de schrijver zich gedwongen ziet een eigen stelling te herroepen.

1. Tossen

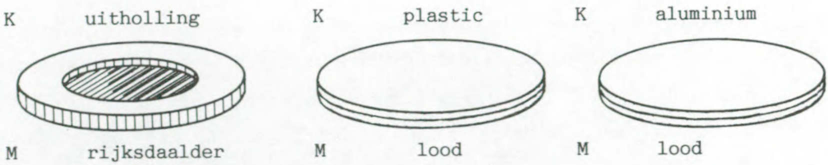
Mijn proefschrift (Moors 1985a) handelde over afgeknotte parameterruimten; de onbekende parameter kan daarbij slechts waarden aannemen in een deel van de theoretisch mogelijke parameterruimte. Zo is de complete parameterruimte voor een onbekende kans π het hele gesloten interval [0, 1]. Als vooraf reeds bekend is dat π zeker niet kleiner dan 0.2 of groter dan 0.8 is, is [0.2, 0.8] de afgeknotte parameterruimte. Het ligt voor de hand dat de extra informatie die bij afgeknotte parameterruimten aanwezig is kan leiden tot efficiëntere schattingsmethoden.

Als eenvoudige praktische toepassing nam ik voor π de kans op kruis bij toevalsexperimenten met (Nederlandse) geldstukken. Vanwege de grote mate van symmetrie lijken waarden van π die tamelijk ver van 0.5 liggen vrijwel uitgesloten. Zelfs voor geldstukken waarin opzettelijk een asymmetrie wordt aangebracht lijkt de waarde van π niet zeer extreem te kunnen worden. (Hier en in het vervolg wordt uitgesloten dat aan beide zijden van het geldstuk dezelfde afbeelding wordt aangebracht).

Om dit experimenteel na te gaan zijn door Nico L. Willemse drie 'rijksdaalders' vervaardigd met een - vermoedelijk - bijna maximale mate van asymmetrie. Zie Figuur 1.

* Vakgroep Econometrie, Katholieke Universiteit Brabant, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg.

Figuur 1. Drie asymmetrische 'rijksdaalders'.



De uitholling in de rijksdaalder bevindt zich in de afbeelding kruis. De andere twee hebben de afmetingen van een rijksdaalder, maar bestaan uit twee even dikke laagjes van verschillende materialen. De lichtste zijde - de bovenkant in Figuur 1 wordt met kruis (K) aangeduid.

Met deze 'rijksdaalders' is een groot aantal malen getossed: daarbij wordt het geldstuk plat op de duimnagel gelegd en omhoog 'geknipt'. Tabel 1 geeft de resultaten.

Tabel 1. Tossen met 'rijksdaalders'.

	uitgeholde rijksdaalder	plastic/ lood	alum./ lood
aantal exp.	6000	3000	3000
frequentie K	3062	1505	1491
rel. freq. K	0.510	0.502	0.497

Zie Moors (1985b). In geen van de drie gevallen wordt de nulhypothese $\pi = 0.5$ verworpen bij een tweezijdige toets met een significantieniveau van 10%.

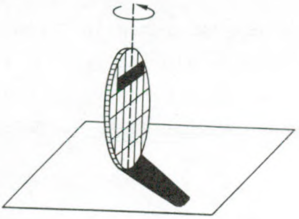
Als deze 'rijksdaalders' al onzuiver zijn, dan is de onzuiverheid zeer gering. Deze toss-experimenten verleidden mij tot de volgende stelling bij mijn proefschrift (Moors 1985a):

'Het is technisch onmogelijk een geldstuk te vervaardigen
(i) waarvoor de kans op 'kruis' lager is dan 0.4 of hoger dan 0.6;
(ii) dat bij oppervlakkige inspectie niet van normale geldstukken te onderscheiden is.
Ter staving: bij 6000 worpen met een rijksdaalder waarvan de beeldzijde is uitgehold kwam 3062 maal de beeldzijde boven.'

2. Tollen

Peter C. Sander (1985) deed de suggestie om de experimenten te herhalen, maar dan met geldstukken die rechtop worden gezet en om hun eigen as roteren; zie Figuur 2. 'De verschillen worden dan ongetwijfeld wèl duidelijk', voorspelde hij. De resultaten van deze experimenten met een tollende 'rijksdaalder' staan in Tabel 2.

Figuur 2. Tollende rijksdaalder



Tabel 2. Tollen met uitgeholde rijksdaalder

aantal exp.	425
frequentie K	26
rel. freq. K	0.061

Het effect is zelfs gigantisch, mag je wel zeggen. Zo vindt men met de Poisson-benadering voor π het 99%-betrouwbaarheidsinterval (0.035, 0.099).

De vraag rees nu of de geringe kans op kruis uitsluitend door het uithollen veroorzaakt werd. Er waren dus controle-experimenten nodig met normale rijksdaalders. Voor alle zekerheid zijn rijksdaalders van de kwaliteitsklasse 'fleur de coin' gebruikt uit drie verschillende jaren en werden de experimenten mede uitgevoerd door mijn collega's Maarten J.B.T. Janssens en Gert Nieuwenhuis. Tabel 3 toont de resultaten; het cijfer tussen haakjes geeft de volgorde aan van de serie van honderd worpen.

Tabel 3. Aantal malen kop bij negen series van 100 experimenten met een tollende rijksdaalder.

Proefpersoon	Rijksdaalder uit het jaar 1982	1983	1984	Totaal
Janssens	32 (2)	29 (1)	39 (3)	100
Nieuwenhuis	29 (3)	14 (2)	30 (1)	73
Moors	51 (1)	47 (3)	40 (2)	138
Totaal	112	90	109	311

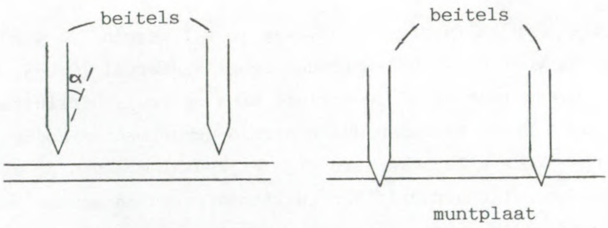
Zie Moors (1991). Ondanks de verschillen tussen de experimentatoren en de gebruikte rijksdaalders dringt één verbluffende conclusie zich op: kruis komt aanzienlijk minder vaak voor dan munt! De relatieve frequentie van K is 311/900 = 0.346; uitgaande van een homogeen model is (0.305, 0.387) het 99%-betrouwbaarheidsinterval voor π.

Daarmee is Stelling 2 bij mijn proefschrift duidelijk weerlegd: zelfs bij normale rijksdaalders is de kans op kruis (waarschijnlijk) al lager dan 0.4.

3. Verklaring

Blijft over de vraag hoe de resultaten in Tabel 3 te verklaren zijn. Zijn onze Nederlandse munten dan toch asymmetrisch? Een mogelijke verklaring werd aangedragen door Rob W.J. Stuifmeel. Hij bedacht dat muntplaten ten gevolge van het slaan wellicht enigszins konisch zijn. Zie de - zeer overdreven - schets in Figuur 3.

Figuur 3. Het slaan van muntplaten.



's Rijks Munt bracht opheldering; H.D. van de Hoof (1991) - Plv. Muntmeester en Hoofd Techniek - bevestigde dat zeer veel Nederlandse geldstukken lichtelijk konisch zijn, afhankelijk van het jaar. Tabel 4 geeft een overzicht van de waarden van hoek α.

Tabel 4. Koniciteit van Nederlandse geldstukken.

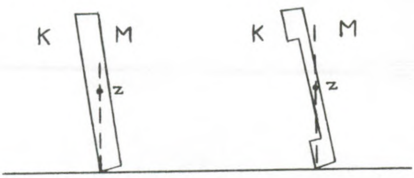
jaar	α
1974 t/m 1984	3°
1985 t/m medio 1991	0
vanaf juli 1991	7'

Tevens deelde hij mede dat de afbeelding kruis steeds wordt aangebracht op de zijde van de muntplaat met het grootste oppervlakte. De verrassende resultaten uit Tabel 3 worden dus vermoedelijk veroorzaakt door deze zeer geringe asymmetrie.

4. Resterende vraag

Onbeantwoord is nog de fysische vraag waarom de zijde met het kleinste oppervlakte vaker bovenkomt. Zelf kom ik niet verder dan de constatering dat het geldstuk in de evenwichtssituatie niet meer op de gehele rand rust en daardoor reeds overhelt in de richting van de kruiszijde. Voor de uitgeholde rijksdaalder geldt dit nog sterker. Zie Figuur 4; z is het zwaartepunt.

Figuur 4. (Uitgeholde) rijksdaalder in evenwicht.



Is er een fysicus die een model op kan stellen voor de beweging van een tollende rijksdaalder? Ik ben zeer geïnteresseerd.

Literatuur

HOOF, H.D. van de, brief d.d. 13-08-1991.

MOORS, J.J.A. (1985a), Estimation in truncated parameter spaces, proefschrift Katholieke Universiteit Brabant.

MOORS, J.J.A. (1985b), Some tossing experiments with biased coins, Reeks 'Ter Discussie' no 85.11, Katholieke Universiteit Brabant.

MOORS, J.J.A. (1991), Statistiek in de economie: één, Academic Service, Schoonhoven.

SANDER, P.C. (1985), brief d.d. 17-12-1985.

ontvangen 16- 9 -1991
geaccepteerd 14-10-1991