

Een verbeterde heuristiek voor meerdimensionale 0 - 1 knapsack problemen

J. A. Zoon

A. Volgenant

Samenvatting

Voor het meerdimensionale 0 - 1 knapsack probleem bestaat een heuristiek die gebaseerd is op Lagrange multiplicatoren, waardoor het mogelijk is ook een bovengrens voor de oplossing te bepalen. Deze heuristiek wordt op twee manieren uitgebreid:

1. er worden in iedere stap niet één, maar meer multiplicatorwaarden tegelijk berekend en
2. de bovengrens wordt verscherpt door sommige multiplicatorwaarden achteraf te veranderen.

Uit een vergelijking voor een grote serie gevarieerde testproblemen blijken de uitbreidingen gemiddeld een verbetering op te leveren, waartegenover slechts een matige toename in de benodigde rekentijd staat.

Sleutelwoorden knapsackprobleem,
geheeltallige programmering,
0 - 1 variabelen,
heuristieken.

Vakgroep Actuariaal & Econometrie,
Leerstoelgroep Besliskunde,
Faculteit der Economische Wetenschappen
en Econometrie,
Jodenbreestraat 23, 1011 NH Amsterdam
Telefoonnummer 020 - 525 4219 of 4218

1. Inleiding

Het meerdimensionale 0 - 1 knapsack probleem kan geformuleerd worden als

$$\text{maximaliseer } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (P)$$

onder

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j = 0 \text{ of } 1 \quad j = 1, \dots, n$$

met a_{ij} , b_i en c_j niet-negatief.

Dit model beschrijft menig praktijkprobleem, zoals de selectie van investeringsprojecten onder bestedingsrestricties voor een aantal jaren; zie Lori en Savage (1955), of de keuze van de meest winstgevende orderportefeuille als wegens capaciteitsrestricties niet alle orders verwerkt kunnen worden.

Zoals bekend is dit probleem NP-compleet - zie Garey en Johnson (1979) - en er is dan ook een groot aantal heuristieken voor ontwikkeld.

Primale heuristieken, zie bijvoorbeeld Senju en Toyoda (1968), Kochenberger, McCarl en Wymann (1974), Loulou en Michaelides (1979) en Fox en Scudder (1985), beginnen met de nul-oplossing, waarna stapsgewijs variabelen op één worden gezet volgens een bepaalde regel, tot dit niet meer mogelijk is.

Toyoda (1975) heeft gekozen voor de duale benadering: startend met de één-oplossing worden stapsgewijs variabelen op nul gezet volgens heuristische regels, tot de verkregen oplossing toegelaten is. Magazine & Oguz (1984) volgen dezelfde benadering en gebruiken daarbij de door Everett (1963) ontwikkelde techniek betreffende Lagrange multipliers. Hun algoritme zal in dit artikel nader bezien en verbeterd worden.

Glover (1977) geeft oplosmethoden met surrogaatvoorwaarden, waarbij informatie over de optimale oplossing wordt verzameld door lineaire combinaties van voorwaarden te vormen. In deze richting hebben ook Freville en Plateau (1986) gewerkt.

Balas & Martin (1980) lossen (P) op met behulp van lineaire programmering, waarbij de geheeltalligheidseis is gerelaxeerd. Vervolgens wordt de in het algemeen niet-geheeltallige oplossing geheeltallig gemaakt.

Voor een optimaal algoritme waarin dynamische programmering gebruikt wordt, zij verwezen naar Nemhauser (1969). Voor het geval de voorwaarden gelijkheden zijn worden de problemen anders benaderd, zie bijv. Kaufman, Plastria en Tubeekx (1985).

De volgende sectie geeft enige bekende resultaten voor Lagrange multiplicatoren en sectie 3 behandelt de heuristiek van Magazine & Oguz (1984). Sectie 4 laat zien hoe meer multiplicatoren tegelijk berekend kunnen worden. In sectie 5 wordt een procedure ter verscherping van de bovengrens toegevoegd aan de heuristiek.

De bijbehorende vergelijkende rekenresultaten staan tenslotte in sectie 6.

2. De Lagrange multiplicatoren

Voor het gemak van de lezer geven we in deze sectie enige bekende resultaten met betrekking tot Lagrange multiplicatoren, die in het vervolg gebruikt zullen worden.

Everett (1963) heeft getoond hoe Lagrange multiplicatoren nuttig kunnen zijn bij het oplossen van geheelgetallige optimaliseringsproblemen zoals (P). Hierbij is de volgende stelling van wezenlijk belang.

Stelling:

Zij gegeven m niet-negatieve, reële Lagrange multiplicatoren $\mu_1, \dots, \mu_m$.
Zij $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $x_i^* = 0$ of 1 , een oplossing van

$$\max_X \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{i=1}^m \mu_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}. \quad (1)$$

Dan maximaliseert X^* de functie $Z(X)$ gegeven door

$$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

onder

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = A^i \cdot X^* \quad i = 1, \dots, m.$$

Deze stelling houdt het volgende in:

stel bij gegeven Lagrange multiplicatoren dat X^* de oplossing is van het maximalisatieprobleem zonder bijvoorwaarden. Van alle oplossingen die hoogstens $A^i \cdot X^*$ van de bronnen verbruiken, geeft dan oplossing X^* de grootste opbrengst.

Probleem (1) is triviaal, het is immers equivalent aan

$$\max_X \left\{ \sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_{ij}) x_j \right\}, \quad (2)$$

waarvan de oplossing is

$$x_j^* = \begin{cases} 1 & \text{als } (c_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_{ij}) > 0, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

De moeilijkheid is nu waarden voor de Lagrange multiplicatoren te vinden zo, dat de oplossing X^* toegelaten is voor (P) en bovendien voldoet aan

$$\sum_{i=1}^m \mu_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0, \quad (4)$$

in welk geval X^* optimaal is voor (P) volgens de bovenvermelde stelling.

In het vervolg zal beschreven worden hoe (suboptimale) waarden voor de Lagrange multiplicatoren bepaald kunnen worden.

3. De heuristiek van Magazine en Oguz

De heuristiek van Magazine & Oguz (1984) is gebaseerd op de Lagrange benadering. De heuristiek initialiseert de multiplicatorwaarden op nul, zodat volgens (3) alle variabelen de waarde één krijgen. In het algemeen is deze oplossing niet toegelaten, omdat er voorwaarden van (P) overtreden worden.

In elke iteratie wordt eerst de voorwaarde bepaald waarvoor de verhouding tussen het overtollig verbruik en de capaciteit van de bron het grootst is. De bijbehorende multiplicatorwaarde wordt daarna zoveel verhoogd als nodig om (3) te verbreken voor juist één variabele, die dan de waarde nul krijgt. Deze gang van zaken wordt herhaald tot de oplossing toegelaten is.

Formeel ziet de heuristiek er als volgt uit:

stap 0 (initialisatie en normalisatie)

Stel $\mu_i := 0$ voor $i = 1, \dots, m$ en $x_j := 1$ voor $j = 1, \dots, n$.

Normeer de coëfficiënten: $a_{ij} := a_{ij} / b_i$ voor $j = 1, \dots, n$;
 $b_i := 1$ voor $i = 1, \dots, m$.

Bereken $y_i := \sum_{j=1}^n a_{ij}$ voor $i = 1, \dots, m$.

stap 1 (bepaal de meest overtreden voorwaarde i')

Bepaal $y_{i'} := \max_i \{y_i\}$.

stap 2 (bereken de verhoging van $\mu_{i'}$)

Bereken voor alle j met $x_j = 1$

$$\theta_j := \begin{cases} (c_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_{ij}) / a_{i'j} & \text{als } a_{i'j} > 0, \\ \infty & \text{anders.} \end{cases}$$

Zij $\theta_{j'} := \min_j \{ \theta_j \mid x_j = 1 \}$.

stap 3 (verhoog $\mu_{i'}$ met $\theta_{j'}$ en zet $x_{j'}$ op nul)

Stel $\mu_{i'} := \mu_{i'} + \theta_{j'}$.

Stel $x_{j'} := 0$ en $y_i := y_i - a_{i'j'}$ voor $i = 1, \dots, m$.

Als $y_i \leq 1$ voor alle i , ga dan naar stap 4 en anders terug naar stap 1.

stap 4 (verbetering achteraf)

Ga na of er nul-variabelen op één terug gezet kunnen worden zonder de voorwaarden $y_i \leq 1$ te overtreden. Als dit zo is, kies dan de variabele met de grootste opbrengst. Herhaal deze stap tot er geen nul-variabele meer is die hieraan voldoet en stop.

Zij X^* de oplossing en μ_i de multiplicatorwaarden verkregen aan het eind van stap 3; dan wordt een bovengrens voor de optimale waarde van probleem (P) volgens stelling 4.1 van Magazine & Oguz (1984) gegeven door

$$\bar{Z} = Z(X^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*). \quad (5)$$

Bij het doorlopen van de stappen 1, 2 en 3 - de kern van de heuristiek - vereist stap 1 hoogstens m vergelijkingen, stap 2 vervolgens $O(nm)$ operaties en stap 3 tenslotte m optellingen en vergelijkingen. Daar hoogstens n variabelen nul kunnen worden, is de rekentijd van de heuristiek $O(n^2m)$.

4. Het berekenen van de Lagrange multiplicatoren

De kwaliteit van de oplossing van probleem (2) hangt af van de multiplicatorwaarden: hoe kleiner het linkerlid van (4), hoe kleiner het verschil tussen de optimale en de verkregen criteriumwaarde van (P).

In de heuristiek van Magazine & Oguz (1984) worden de waarden voor de multiplicatoren stapsgewijs berekend en wel één waarde per iteratie. Het is echter ook mogelijk in een iteratie twee, drie, of algemener, k waarden tegelijk te berekenen. Dat kost meer rekentijd, maar de verwachting is dat de criteriumwaarde en of de bovengrens gunstiger uitvallen.

Zij ter illustratie $k = 2$. De heuristiek wordt dan als volgt gewijzigd:

In stap 1: bepaal ook het submaximum y_i^- .

In stap 2: vervang a_{ij} door $(a_{ij} y_i / y_i^- + a_{ij}^-)$.

In stap 3: verhoog μ_i met $\theta_j y_i / y_i^-$ en μ_i^- met θ_j .

In stap 1 worden de twee voorwaarden gezocht die verbonden zijn met de meest schaarse resp. op één na meest schaarse bron. Door de twee bijbehorende multiplicatorwaarden te verhogen wordt het verbruik van beide bronnen minder aantrekkelijk ten opzichte van de overige.

Daar bron i' schaarser is dan bron $\bar{i}$ (de verhouding bedraagt $y_{i'}/y_{\bar{i}}^-$), is het wenselijk dat de waarde van multiplicator $\mu_{i'}$ meer toeneemt dan die van $\mu_{\bar{i}}^-$. Dit komt tot uitdrukking in de berekening van θ_j in stap 2.

In lijn met de oorspronkelijke heuristiek, worden beide multiplicatorwaarden slechts zoveel verhoogd, dat voor precies één variabele de netto opbrengst $(c_j - \mu' A_j)$ nul wordt.

Tenslotte, als in stap 1 geldt $y_i^- \leq 1$, dat wil zeggen als aan voorwaarde $\bar{i}$ voldaan is, dan moet de oorspronkelijke methode worden toegepast.

5. Het verscherpen van de bovengrens

Een voordeel van de heuristiek van Magazine & Oguz (1984) is dat deze een bovengrens voor het optimum van (P) oplevert zonder lineaire programmering te gebruiken. De hoogte van deze grens hangt af van de niet-overtreden voorwaarden met positieve multiplicatorwaarden; vergelijk formule (5).

Veronderstel, dat het bovenstaande aan het begin van een iteratie geldt voor minstens één voorwaarde. Zij i^* de index van de voorwaarde met het grootste product van resterende capaciteit en multiplicator. De vraag is dan of de waarde van multiplicator μ_{i^*} lager gekozen zou kunnen worden, het liefst gelijk aan nul, omdat dan voor de berekening van de bovengrens voorwaarde i^* van minder belang zou zijn. Tegelijkertijd zou de multiplicatorwaarde van de meest schaarse bron verhoogd moeten worden.

Aangezien in de heuristiek slechts variabelen van één op nul worden gezet en niet andersom (behalve in stap 4), moeten de verlaging β resp. de verhoging θ van de multiplicatoren μ_{i^*} resp. $\mu_{i'}$ voldoen aan

$$\leq 0 \text{ voor alle } j \text{ met } x_j = 0, \quad (6a)$$

$$c_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_{ij} + \beta a_{i^*j} - \theta a_{i'j} \geq 0 \text{ voor alle } j \text{ met } x_j = 1. \quad (6b)$$

Immers, als β en θ hieraan voldoen, dan houdt (6a) resp. (6b) in dat geen enkele nul-variabele resp. één-variabele verandert, behalve de variabele waarvoor (6b) met gelijkheid geldt.

De bedoeling is nu een combinatie (β, θ) te vinden die voldoet aan (6a) en (6b) en waarvoor β maximaal is. Als (β^*, θ^*) zo'n combinatie is, dan wordt multiplicator μ_{i^*} met β^* verlaagd en $\mu_{i'}$ met θ^* verhoogd. Geldt tenslotte (6b) met gelijkheid voor een index j' , dan krijgt variabele $x_{j'}$ de waarde nul. Als de gelijkheid voor geen enkele index geldt, dan moet $\mu_{i'}$ extra verhoogd worden.

De waarden van β^* en θ^* kunnen bepaald worden met (duale) lineaire programmering, maar ook met de volgende procedure.

De ongelijkheden (6a) bepalen de ondergrenslijnen van het toegelaten gebied voor (β, θ) en we definiëren de ondergrensfunctie

$$\theta_0(\beta) = \max_j \{ (u_j + \beta a_{i^*j}) / a_{i'j} \mid x_j = 0 \text{ en } a_{i'j} > 0 \} \quad (7)$$

met $u_j = c_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_{ij}$.

In (7) mag $a_{i'j}$ niet nul zijn. Als $a_{i'j} = 0$ voor een index j , dan is de waarde van θ van geen belang en hangt (6a) slechts af van β .

Evenzo valt uit (6b) de bovengrensfunctie af te leiden

$$\theta_1(\beta) = \min_j \{ (u_j + \beta a_{i^*j}) / a_{i'j} \mid x_j = 1 \text{ en } a_{i'j} > 0 \}, \quad (8)$$

waarbij $\theta_1(\beta)$ het grootste getal θ is dat, gegeven β , aan (6b) voldoet. Ook nu moet $a_{i,j}$ positief zijn. Als $a_{i,j} = 0$ voor een zekere index j , dan is aan (6b) voor elke positieve β en θ voldaan.

De grootste waarde van β die nog voldoet aan $\theta_0(\beta) \leq \theta_1(\beta)$ is β^* , wat valt af te leiden uit (6), (7) en (8). Het berekenen van β^* is identiek aan het bepalen van het - in het algemeen unieke - nulpunt van de functie $\delta(\beta)$, gedefinieerd als

$$\delta(\beta) = \theta_1(\beta) - \theta_0(\beta), \quad (9)$$

welke continu en stuksgewijs lineair is. Evaluatie van δ in een punt β vergt $O(n)$ berekeningen. Het nulpunt is te bepalen met een numerieke procedure die een combinatie is van de secanten-methode en bisectie; zie Bus en Dekker (1975).

De waarde van β^* hangt af van het toegelaten gebied: als dit klein is, dan is β^* ook klein en kan de multiplicatorwaarde μ_i^* slechts weinig verlaagd worden. Of dit zo is hangt weer af van de onder- en bovengrenslijnen, waarover a priori weinig te zeggen valt. Vermoedelijk is het toegelaten gebied klein als het aantal lijnen n , groot is. Bovendien is een grote waarde van n ook nadelig voor het berekenen van β : een evaluatie van $\delta(\beta)$ vergt $O(n)$ berekeningen en er zijn toch al snel 5 à 10 evaluaties nodig. Als het aantal restricties groot is in verhouding tot het aantal variabelen, dan kan de beschreven procedure tot betere multiplicatorwaarden leiden.

6. Rekenresultaten

Voor een goede vergelijking is de implementatie van de oorspronkelijke heuristiek (aangeduid met M & O) verbeterd: in stap 2 blijven de netto opbrengsten $c_j - \mu^* A_j$ bewaard en deze worden bijgesteld bij wijziging van een multiplicatorwaarde in stap 3. De rekentijd van de heuristiek is dan $O(n(n+m))$ in plaats van $O(n^2m)$. Verder is in stap 0 de normering achterwege gelaten, waardoor gegeven geheeltallige coëfficiënten geheeltallig blijven wat een voordeel is als het rekenwerk op een personal computer wordt uitgevoerd.

Allereerst zijn verschillende varianten vergeleken met M & O. Het is gebleken dat de varianten niet uniform, maar wel gemiddeld beter zijn dan M & O. Globaal is de variant met $k = 2$ plus bovengrenverscherping (aan te duiden met K2UB) de beste. In tabel 1 is K2UB daarom met algoritme M & O vergeleken.

De moeilijkheidsgraad van elk testprobleem wordt bepaald door de ratio S ; dit is de verhouding tussen het rechterlid en de som van de coëfficiënten uit de bijbehorende voorwaarde. Een grote (kleine) waarde van S betekent dus dat de voorwaarden ruim (strak) zijn. Voor de gegeven combinaties van n , m en S zijn steeds tien problemen gegenereerd met behulp van de generator gg ubs uit de I.M.L.S. (versie feb. 1979). De

Tabel 1: Vergelijking van de "gap" in % (rekentijd in honderdsten van een seconde).

n	m	S = 0.8		S = 0.5		S = 0.3	
		M & O	K2UB	M & O	K2UB	M & O	K2UB
25	25	3.1 (1)	3.0 (1)	10.5 (1)	9.2 (2)	16.1 (1)	15.2 (2)
	50	3.2 (1)	2.8 (2)	10.4 (2)	9.0 (3)	21.0 (2)	20.6 (3)
	100	5.2 (2)	3.9 (3)	15.5 (3)	14.4 (4)	26.6 (4)	22.2 (5)
	200	5.6 (4)	5.0 (5)	17.1 (6)	15.2 (7)	31.3 (7)	28.2 (9)
50	25	1.7 (2)	1.4 (3)	6.3 (3)	5.1 (6)	12.1 (4)	11.3 (7)
	50	2.0 (3)	2.0 (4)	6.0 (5)	5.8 (7)	15.8 (6)	13.0 (9)
	100	2.7 (5)	2.4 (7)	8.3 (7)	7.5 (10)	16.7 (9)	14.6 (12)
	200	2.9 (8)	2.6 (10)	9.3 (12)	8.3 (15)	17.7 (15)	17.0 (19)
100	25	0.8 (5)	0.7 (9)	3.1 (10)	2.9 (17)	6.0 (13)	6.4 (22)
	50	1.1 (7)	0.8 (11)	4.0 (13)	3.2 (20)	9.0 (17)	7.6 (25)
	100	1.5 (10)	1.2 (15)	5.3 (18)	4.6 (25)	10.0 (23)	9.0 (31)
	200	1.4 (16)	1.3 (21)	5.6 (27)	5.0 (37)	10.2 (35)	10.2 (44)
200	25	0.5 (17)	0.5 (30)	2.0 (36)	1.6 (57)	4.5 (48)	4.4 (73)
	50	0.7 (21)	0.6 (35)	2.4 (41)	2.2 (65)	5.9 (54)	5.1 (81)
	100	0.7 (26)	0.7 (42)	3.7 (52)	3.1 (78)	6.4 (66)	6.3 (96)

coëfficiënten zijn uit de verzameling $\{ 0, 1, \dots, 40 \}$ getrokken. De tabel geeft voor elke combinatie de gemiddelde "gap" (in procenten), dit is het verschil tussen de bovengrenswaarde en de criteriumwaarde gedeeld door de eerstgenoemde. Tussen haken staat de gemiddelde rekentijd (in honderdsten van een seconde) exclusief de input-output tijd. Beide heuristieken zijn geprogrammeerd in PASCAL en verwerkt op de Control Data Cyber 750 computer van SARA te Amsterdam.

Tabel 1 laat zien dat variant K2UB een kleinere "gap" heeft dan M & O, behalve in het geval $n = 100$, $m = 25$ en $S = 0.3$. Duidelijkheidshalve: de "gap" is een gemiddelde over tien problemen en een kleinere "gap" impliceert géén uniform (over alle tien problemen) kleinere "gap".

Onder gelijkblijven van de grootheden m en S , heeft een stijging van n tot gevolg dat de "gaps" kleiner worden, terwijl beide methoden naar elkaar toe kruipen - de verschillen nemen af. Als daarentegen m stijgt, dan groeien de "gaps" mee evenals de verschillen. De ratio S tenslotte heeft een tamelijk voorspelbare invloed op de "gaps":

Tabel 2: Vergelijking voor twee standaard problemen van Senju & Toyoda (1968).

¹ afkomstig uit Marsten en Morin (1977); ² in honderdsten van een seconde.

	M & O			K2UB			OPTIMUM ¹
	Z	$\bar{Z}$	CPU ²	Z	$\bar{Z}$	CPU ²	
limiting condition A	7719	7872	6	7772	7856	11	7772
limiting condition B	8623	8785	4	8684	8778	7	8722

hoe moeilijker het probleem, hoe groter de "gap". Bij een dalende waarde van S nemen de verschillen iets toe.

Voor de rekentijden geldt dat K2UB ruwweg de helft meer rekentijd nodig heeft dan M & O. Dit wordt voornamelijk veroorzaakt door het verscherpen van de bovengrens, omdat het gelijktijdig berekenen van twee multiplicatorwaarden een verwaarloosbare invloed heeft op de extra rekentijd.

Tabel 2 vermeldt de resultaten voor de twee standaardproblemen van Senju en Toyoda (1968). De limiting conditions A en B staan voor het moeilijke resp. gemakkelijke probleem (te vergelijken met de ratio S). In beide gevallen is K2UB beter, zowel wat de criteriumwaarde Z betreft, als de bovengrens $\bar{Z}$. Merk op dat K2UB in geval A de optimale waarde gevonden heeft. De rekentijden van deze methode zijn echter langer.

Conclusie: er is gemiddeld een verbetering bereikt die slechts een bescheiden extra hoeveelheid rekentijd vergt.

Verwijzingen

Balas E. en C. H. Martin (1980),

'Pivot and complement - a heuristic for 0-1 programming',
Management Science 26 (1), 86-96.

Bus J. C. P. en T. J. Dekker (1975),

'Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function', ACM Transactions on Mathematical Software 1, 330-345.

Everett H. (1963),

'Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources', Operations Research 2, 399-417.

- Fox G. E. en G. D. Scudder (1985),
 'A heuristic with tie breaking for certain 0-1 integer programming models',
Naval Research Logistics Quarterly 32, 613-623.
- Freville, A. en G. Plateau (1986),
 'Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems',
European Journal of Operational Research 24, 206-215.
- Garey M. D. en D. S. Johnson (1979),
 'Computers and Intractability, A guide to the theory of NP-Completeness',
 Freeman, San Fransisco.
- Kaufman L., F. Plastria en S. Tubeekx (1985),
 'The zero-one Knapsack Problem with equality constraint',
European Journal of Operational Research 19, 384-389.
- Kochenberger G. A. , B. A. McCarl en F. P. Wymann (1974),
 'A heuristic for general integer programming',
Decision Science 5 (1), 36-44.
- Lori J. H. en L. J. Savage (1955),
 'Three problems in capital rationing',
Journal of Business 6, 229-239.
- Loulou R. en E. Michaelides (1979),
 'New greedy-like heuristics for the multidimensional 0-1 knapsack problem',
Operations Research 27 1101-1114.
- Magazine M. J. en O. Oguz (1984),
 'A heuristic algorithm for the multi-dimensional 0-1 knapsack problem',
European Journal of Operational Research 16, 319-326.
- Marsten R. E. en T. L. Morin (1977),
 'Optimal solutions found for Senju and Toyoda's 0-1 integer programming problems',
Management Science 23, 1364-1365.
- Nemhauser G. en Z. Ullman (1969),
 'Discrete dynamic programming and capital allocation',
Management Science 15, 494-505.
- Senju S. en Y. Toyoda (1968),
 'An approach to linear programming with 0-1 variables',
Management Science 15 B, 196-207.
- Toyoda Y. (1975),
 'A simplified algorithm for obtaining approximate solutions to 0-1 programming problems',
Management Science 21, 1417-1427.