KM 28(1988)
pag 51 - 75

TWEE BELEGGINGSINDICES VOOR AANDELEN

B. M. Balk*)

SAMENVATTING

In dit artikel wordt voor een tweetal beleggingsstrategieën de formule voor de 'total-return'-index afgeleid. De strategieën zijn passief in die zin dat na de initiële keuze van het aandelenpakket de enige toegelaten aktie bestaat uit het herbeleggen van dividenduitkeringen in de tot de portefeuille behorende fondsen.

1. Inleiding

Recent is, althans in Nederland, de belangstelling toegenomen voor de methoden volgens welke indices van aandelenkoersen worden samengesteld. Het kan zijn dat dit verschijnsel conjunctureel van aard is: samenhangend met de toegenomen belangstelling voor beleggen in aandelen en de reeds enige jaren heersende stijgende tendens van de koersen (zie Van Duijn, 1986). Iets soortgelijks zien we van tijd tot tijd bij de prijsindices van de gezinsconsumptie. In tijden van hoge inflatiepercentages wakkert de methodologische discussie aan om, met het afnemen van de inflatie weer weg te ebben. Bij geringe prijsveranderingen doet de gebruikte formule er immers niet zoveel toe!

Als tot nu toe belangrijkste vruchten van het onderzoek betreffende de methodische aspekten van indices van aandelenkoersen zijn te beschouwen het artikel van Fase en Mourik (1986) en het tweede hoofdstuk van de disser-

---

*) Centraal Bureau voor de Statistiek, Hoofdafdeling Statistieken van de Prijzen, Postbus 959, 2270 AZ Voorburg. Tel. 070-694341 toestel 2434.

De in dit rapport weergegeven opvattingen zijn die van de auteur en komen niet noodzakelijk overeen met het beleid van het Centraal Bureau voor de Statistiek. De auteur dankt J. H. Koning, E. F. Rietzschel en G. H. de Vries voor stimulerende discussies en kritiek op een concept van dit rapport.

tatie van Wijmenga (1986). Globaal komt de werkwijze van deze auteurs op hetzelfde procédé neer. Ze beginnen met een inventarisatie van een groot aantal min of meer bekende formules: rekenkundige gemiddelden, meetkundige gemiddelden, gewogen of ongewogen, formules met een eerbiedwaardige traditie, en voorstellen van recenter makelij. Deze formules worden vervolgens geëvalueerd in het licht van een groot aantal, aan de axiomatische theorie der prijsindices ontleende, eisen of 'tests' (à la de door Irving Fisher in de twintiger jaren geïntroduceerde terminologie). Soms wordt zelfs van 'natuurlijke eisen' gesproken. De uitkomst van deze evaluatie is dat geen enkele formule aan alle 'eisen' voldoet dan wel dat, bij beperking van het aantal 'eisen', méér dan één formule de eindstreep haalt. In beide gevallen is de onderzoeker genoodzaakt, min of meer subjectief, andere overwegingen bij zijn evaluatie te betrekken. In het ene geval om aannemelijk te maken dat eis A minder van belang is dan eis B, in het andere geval om uit de overblijvende formules er een aan te bevelen.

Deze situatie is in de theorie der prijsindices reeds lang bekend en behoeft ons niet te verwonderen. Bewezen is dat hele batterijen van tests, waaronder zeer 'natuurlijke', innerlijk inconsistent zijn en dus geen oplossing toelaten (zie bijvoorbeeld Eichhorn en Voeller, 1976). Ernstiger is dat met betrekking tot de indices van aandelenkoersen deze axiomatische benaderingswijze wordt gehanteerd zonder (veel) aandacht te besteden aan de doelstelling van de beoogde index. A priori maakt het immers nogal wat uit of men een index beoogt die een goed beeld geeft van het verloop van het gemiddeld niveau van aandelenkoersen op een zekere beurs (een zgn. stemmingsindex) of dat men een index wil die geïnterpreteerd kan worden als de 'total return' die een (fiktieve) belegger kan behalen en waartegen men de eigen 'performance' kan afzetten (een zgn. beleggingsindex).[1] Het is niet zonder meer aan te nemen dat 'eisen' in het ene geval even 'natuurlijk' zijn als in het andere. Het is bovendien niet erg zinvol een beleggingsindex te evalueren in een laboratoriumwereld waarin wordt afgezien van uitgekeerde dividenden e.d. en waarin geen rekening wordt gehouden met de strategieën van beleggers.

1) Vgl. het commentaar van Dorsman en Van der Hilst (1986) op het artikel van Fase en Mourik.

In dit artikel wordt dan ook een andere aanpak beproefd. Voor een tweetal (her-)beleggingsstrategieën wordt de 'total return'-index afgeleid. Deze indices worden vervolgens op een aantal punten met elkaar vergeleken. De orde van het betoog is als volgt. In paragraaf 2 wordt het concept van een dergelijke index besproken. Daarna volgen in de paragrafen 3 en 4 de beide onderzochte varianten. In paragraaf 5 vindt de vergelijking plaats en paragraaf 6 besluit.

2. Definitie van een 'total return'-index

Het beleggen waarover het hier gaat speelt zich af in de wereld van de aandelenfondsen. De omgeving wordt gekenmerkt door voortdurend veranderende koersen en door zo nu en dan plaatsvindende uitkeringen aan de aandeelhouder, bijvoorbeeld in de vorm van dividendbetalingen. Wat dient nu te worden verstaan onder een 'total return'-index?

Beschouw een belegger die op een bepaald tijdstip tegen de dan geldende koersen een pakket aandelen koopt. De waarde van dit pakket zij W^0, waarbij het superscript duidt op het tijdstip. Gedurende een zekere periode [0,t] volgt deze belegger een bepaalde strategie: hij koopt of verkoopt aandelen, herbelegt het uitgekeerde dividend, etc. 'Strategie' wordt hier dus in de brede zin genomen: het geheel van akties dat de belegger gedurende [0,t] uitvoert met betrekking tot de portefeuille waarmee hij op tijdstip 0 startte. Op tijdstip t verkoopt deze belegger het alsdan in zijn handen zijnde pakket tegen het bedrag W^t. De 'total return'-index (voor belastingheffing en afgezien van transactiekosten) is nu eenvoudig de verhouding W^t/W^0, terwijl het rendement dat de belegger behaald heeft $(W^t/W^0-1).100\%$ bedraagt. De 'total return'-index is dus de verhouding van de verkoopwaarde van het eindpakket en de aankoopwaarde van het startpakket, waarbij de relatie tussen deze beide pakketten is gelegen in de gevolgde strategie in samenhang met de veranderingen in de omgevingsvariabelen.

Het is duidelijk dat de 'total return'-index afhangt van drie factoren: de portefeuillesamenstelling op tijdstip 0, de gevolgde strategie en het verloop van koersen en uitkeringen gedurende de periode [0,t]. De eerste twee hiervan zijn ter keuze van de belegger, de derde kan als exogeen beschouwd worden. Er is dus niet één 'total return'-index, maar er zijn net zo veel indices als er combinaties zijn van portefeuillesamenstellingen en strategieën.

Deze situatie komt in hoge mate overeen met die bij de indices van de kosten van levensonderhoud (cost-of-living-indices) van huishoudens. Ook daar is geen sprake van één index, doch van een veelheid van indices bepaald door de specifieke nutsfunkties van de huishoudens en hun referentie-consumptiepatronen.

In het navolgende zal bij gegeven aanvangssamenstelling van de portefeuille voor een tweetal strategieën de 'total return'-index afgeleid worden. Daarbij wordt aangenomen dat uitkeringen alleen in de vorm van (contant) dividend plaatsvinden. Aangenomen wordt voorts dat, waar in het vervolg sprake is van direkt op elkaar volgende tijdstippen de periode daartussen zo kort is dat daarin geen gebeurtenissen plaatsvinden of akties ondernomen kunnen worden. Deze veronderstelling dient slechts om de zaak wiskundig behandelbaar te maken.

Stel op basistijdstip 0 bestaat de portefeuille van de belegger uit het aandelenpakket $(N_1^0,\ldots,N_n^0)$. N_i^t is het aantal aandelen van fonds i dat zich op tijdstip t in de portefeuille bevindt. De koers van aandeel i op tijdstip t wordt aangeduid met P_i^t en het op dat tijdstip betaalbaar gestelde dividend met D_i^t $(i=1,\ldots,n)$. Voor de meeste tijdstippen zal uiteraard $D_i^t=0$ zijn. Als $D_i^t\neq0$ noemt men P_i^t de koers ex-dividend.

Op tijdstip 0 is de waarde van de portefeuille

$$W^0 = \sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0 \ . \tag{1}$$

Op tijdstip 1 is de waarde geworden

$$W^1 = \sum_{i=1}^{n} N_i^0 (P_i^1 + D_i^1) \ . \tag{2}$$

De 'total return'-<u>index</u> op tijdstip 1 is dus

$$W^1/W^0 = \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \,(P_i^1 + D_i^1) \,/\, \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0 \,. \tag{3}$$

Vanaf dit tijdstip hangt de 'total return'-index af van de gevolgde strategie. De beide te behandelen strategieën zijn van het type 'buy-and-hold'. De enige toegelaten aktie is de onmiddellijke herbelegging van de dividendopbrengst in tot de portefeuille behorende fondsen. Voor de dividendopbrengst worden dus aandelen gekocht tegen de op dat moment geldende koersen. Daarbij wordt afgezien van transaktiekosten. De volgende twee varianten worden onderscheiden:

1. De totale dividendopbrengst wordt, naar rato van de waardeaandelen op het desbetreffende tijdstip, verdeeld over de diverse in de portefeuille voorkomende fondsen en voor deze bedragen worden tegen de geldende koersen aandelen bijgekocht. Wij noemen dit de HT(Herbelegging Totaal)-strategie.
2. De dividendopbrengst van een bepaald aandeel wordt uitsluitend aangewend om een aantal van deze aandelen bij te kopen. De herbelegging vindt met andere woorden plaats 'in het eigen aandeel'. Wij noemen dit de HP(Herbelegging Partieel)-strategie.

In beide varianten is sprake van een fiktieve strategie. De resulterende aantallen bijgekochte aandelen behoeven immers in het algemeen geen natuurlijke getallen voor te stellen.

In het navolgende wordt voor beide varianten de 'total return'-index voor tijdstip 2 en latere tijdstippen afgeleid. Deze indices worden daarna op een aantal punten met elkaar vergeleken.

3. Variant 1: de HT-index

Op tijdstip 1 wordt voor een bedrag

$$D^1 \equiv \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, D_i^1 \tag{4}$$

herbelegd. Van aandeel i wordt dan het volgende aantal bijgekocht

$$\Delta N_i^0 = (N_i^0 P_i^1 / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1) D^1 / P_i^1$$

$$= (N_i^0 D^1 / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1) . \quad (5)$$

De uitdrukking tussen haakjes in het middelste lid van (5) is het aandeel van fonds i in de waarde van de gehele portefeuille.

De waarde van de portefeuille op tijdstip 2 is dan

$$W^2 = \sum_{i=1}^n (N_i^0 + \Delta N_i^0) (P_i^2 + D_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n N_i^0 (P_i^2 + D_i^2) (1 + D^1 / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1) . \quad (6)$$

De 'total return'-index op tijdstip 2 is

$$W^2 / W^0 = (\sum_{i=1}^n N_i^0 (P_i^2 + D_i^2) / \sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0) \times$$

$$(1 + D^1 / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1) . \quad (7)$$

De laatste uitdrukking tussen haakjes kan met behulp van (4) als volgt worden herschreven

$$(1 + D^1 / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1) =$$

$$(\sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1 + \sum_{j=1}^n N_j^0 D_j^1) / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1 =$$

$$\sum_{j=1}^n N_j^0 (P_j^1 + D_j^1) / \sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^1 . \quad (8)$$

Substitutie hiervan in (7) en herschikking leidt tot het volgende resultaat

$$\frac{W^2}{W^0} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^0 (P_i^1 + D_i^1)}{\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0} \times \frac{\sum_{i=1}^n N_i^0 (P_i^2 + D_i^2)}{\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^1} . \quad (9)$$

Dit is een zgn. ketting-index. De eerste factor van het rechterlid van (9) is de 'total return'-index W^1/W^0. De tweede factor kan gezien worden als de 'total return'-index op tijdstip 2 van de op tijdstip 1 gemodificeerde portefeuille. Deze luidt immers

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (N_i^0 + \Delta N_i^0) (P_i^2 + D_i^2)}{\sum_{i=1}^{n} (N_i^0 + \Delta N_i^0) P_i^1} , \tag{10}$$

en het is duidelijk dat in teller en noemer van (10) de uitdrukkingen

$$1 + D^1 / \Sigma_{j=1}^{n} N_j^0 P_j^1 \tag{11}$$

tegen elkaar wegvallen.

Noem $N_i^0 + \Delta N_i^0 = N_i^0 (1 + D^1 / \Sigma_{j=1}^{n} N_j^0 P_j^1) \equiv N_i^1$. Op tijdstip 2 komt voor herbelegging in aanmerking een bedrag van

$$D^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} N_i^1 D_i^2 . \tag{12}$$

Van aandeel i wordt het volgende aantal bijgekocht

$$\begin{aligned} \Delta N_i^1 &\equiv (N_i^1 P_i^2 / \sum_{j=1}^{n} N_j^1 P_j^2) D^2 / P_i^2 \\ &= N_i^1 D^2 / \sum_{j=1}^{n} N_j^1 P_j^2 . \end{aligned} \tag{13}$$

De waarde van de portefeuille op tijdstip 3 is dan

$$\begin{aligned} W^3 &\equiv \sum_{i=1}^{n} (N_i^1 + \Delta N_i^1) (P_i^3 + D_i^3) \\ &= \sum_{i=1}^{n} N_i^1 (P_i^3 + D_i^3) (1 + D^2 / \sum_{j=1}^{n} N_j^1 P_j^2) . \end{aligned} \tag{14}$$

De 'total return'-index op tijdstip 3 is

$$W^3 / W^0 = \left(\sum_{i=1}^n N_i^1 \left(P_i^3 + D_i^3 \right) / \sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0 \right) \times$$

$$\left(1 + D^2 / \sum_{j=1}^n N_j^1 P_j^2 \right) . \qquad (15)$$

Herschikking van (15) met behulp van de definitie van N_i^1 en de relaties (4) en (12) levert de volgende ketting-index op,

$$\frac{W^3}{W^0} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^0 \left(P_i^1 + D_i^1\right)}{\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0} \times \frac{\sum_{i=1}^n N_i^0 \left(P_i^2 + D_i^2\right)}{\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^1} \times \frac{\sum_{i=1}^n N_i^0 \left(P_i^3 + D_i^3\right)}{\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^2} . \qquad (16)$$

De eerste factor van het rechterlid van (16) is de 'total return'-index W^1/W^0 en de eerste twee factoren vormen tezamen de 'total return'-index W^2/W^0 (vgl. (3) resp. (9)).

Het voorgaande generaliserend is duidelijk dat de 'total return'-index op tijdstip t luidt

$$W^t / W^0 = \prod_{\tau=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^n N_i^0 \left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / \sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^{\tau-1} \right)$$

$$\equiv R^{HT} \left(\underset{\sim}{P}^0, \ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1, \ldots, \underset{\sim}{D}^t ; \underset{\sim}{N}^0 \right) . \qquad (17)$$

We noemen dit de <u>HT</u> (Herbelegging Totaal)-<u>index</u>. De uitkomst ervan hangt in het algemeen af van de vectoren $\underset{\sim}{P}^\tau \equiv (P_1^\tau, \ldots, P_n^\tau)$, $\tau=0,\ldots,t$, $\underset{\sim}{D}^\tau \equiv (D_1^\tau, \ldots, D_n^\tau)$, $\tau=1,\ldots,t$ en $\underset{\sim}{N}^0 \equiv (N_1^0, \ldots, N_n^0)$. Dit wordt in het derde lid van (17) expliciet gemaakt.

Alternatieve schrijfwijzen van de HT-index zijn (vgl. (7) en (14))

$$R^{HT}\left(\underset{\sim}{P}^0, \ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1, \ldots, \underset{\sim}{D}^t ; \underset{\sim}{N}^0\right) = \sum_{i=1}^n N_i^{t-1} \left(P_i^t + D_i^t\right) / \sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0 , \qquad (18)$$

en (vgl. (9) en (10))

$$R^{HT}\,(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\,) =$$

$$\prod_{\tau=1}^{t}\ (\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} N_i^{\tau-1}\ (\ P_i^{\tau} + D_i^{\tau}\ )\ /\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} N_i^{\tau-1}\ P_i^{\tau-1}\ )\ . \tag{19}$$

Hierin is

$$N_i^{\tau} = N_i^0 \textstyle\prod_{\tau'=1}^{\tau}\ (\ 1 + D^{\tau'} / \textstyle\sum_{j=1}^{n} N_j^{\tau'-1}\ P_j^{\tau'}) \tag{20}$$

en

$$D^{\tau} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} N_i^{\tau-1}\ D_i^{\tau}\ . \tag{21}$$

In (18) lijkt het alsof alleen de tijdstippen t en 0 met elkaar vergeleken worden.Alle informatie over tussenliggende tijdstippen is echter 'opgeslagen' in N_i^{t-1} (vgl. (20)). Op grond van (19) kunnen we de HT-index over de gehele periode [0,t] ook schrijven als een produkt van HT-indices over deelperioden, bijvoorbeeld

$$R^{HT}\,(\ \underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\ ) =$$

$$\prod_{\tau=1}^{t} R^{HT}\ (\ \underset{\sim}{P}^{\tau-1},\ \underset{\sim}{P}^{\tau},\ \underset{\sim}{D}^{\tau};\ \underset{\sim}{N}^{\tau-1}\ )\ . \tag{22}$$

Merk op dat de $\underset{\sim}{N}^{\tau}$ niet onafhankelijk zijn, maar van elkaar afhangen via (20). In feite kunnen we ze vervangen door $\underset{\sim}{N}^{0}$ (vgl. (17)).

4. Variant 2: de HP-index

Op tijdstip 1 is het per aandeel i uitgekeerde dividend D_i^1. Dit wordt herbelegd in fonds i. Er wordt dus het volgende aantal bijgekocht

$$\Delta N_i^0 = N_i^0\ D_i^1\ /\ P_i^1\ . \tag{23}$$

Noem $N_i^0+\Delta N_i^0=N_i^0(1+D_i^1/P_i^1)\equiv N_i^1$. De waarde van de portefeuille op tijdstip 2 is dan

$$W^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} N_i^1 \left(P_i^2 + D_i^2 \right) . \tag{24}$$

De 'total return'-index op tijdstip 2 is

$$W^2 / W^0 \equiv \sum_{i=1}^{n} N_i^1 \left(P_i^2 + D_i^2 \right) / \sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0 . \tag{25}$$

Door substitutie van $N12_i$ vinden we

$$W^2 / W^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^2 \left(1 + D_i^1 / P_i^1 \right) \left(1 + D_i^2 / P_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0} . \tag{26}$$

Men kan (26) opvatten als een vergelijking van de koersen van tijdstip 0 met 'fiktieve koersen' $P_i^2(1+D_i^1/P_i^1)(1+D_i^2/P_i^2)$ op tijdstip 2. Door een wat andere rangschikking van termen vinden we nog een uitdrukking, namelijk

$$W^2/W^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0 \left(\left(P_i^1 + D_i^1 \right) / P_i^0 \right) \left(\left(P_i^2 + D_i^2 \right) / P_i^1 \right)}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0} , \tag{27}$$

dat is het met de waardeaandelen van tijdstip 0 gewogen gemiddelde van de rendementen van de afzonderlijke fondsen over de periode [0,2].

Op tijdstip 2 komen de dividendbedragen $N_i^1 D_i^2$, $i=1,\ldots,n$, voor herbelegging in aanmerking. Van aandeel i wordt dan bijgekocht

$$\Delta N_i^1 \equiv N_i^1 D_i^2 / P_i^2 . \tag{28}$$

Zij $N_i^2\equiv N_i^1+\Delta N_i^1$. De waarde van de portefeuille op tijdstip 3 is dan

$$W^3 \equiv \sum_{i=1}^{n} N_i^2 \left(P_i^3 + D_i^3 \right) , \tag{29}$$

en de 'total return'-index is

$$W^3/W^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^3 \left(1 + D_i^1 / P_i^1 \right)\left(1 + D_i^2 / P_i^2 \right)\left(1 + D_i^3 / P_i^3 \right)}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0} . \tag{30}$$

Op grond van het voorgaande is duidelijk dat op tijdstip t de 'total return'-index luidt

$$\begin{aligned} W^t/W^0 &= \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^t \prod_{\tau=1}^{t} \left(1 + D_i^\tau / P_i^\tau \right) / \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0 \prod_{\tau=1}^{t} \left(\left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / P_i^{\tau-1} \right) / \sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0 \\ &\equiv R^{HP} \left(\underset{\sim}{P}^0, \ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1, \ldots, \underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0 \right) . \end{aligned} \tag{31}$$

We noemen dit de <u>HP</u> (Herbelegging Partieel)-<u>index</u>.

De HP-index heeft dus tweeërlei interpretatie. Allereerst (het tweede lid van (31)) als een vergelijking van 'fiktieve koersen' op tijdstip t met de koersen op tijdstip 0. Onder de naam AGI (Aandelen Gewogen Index) wordt hij aanbevolen door Wijmenga (1986).[2] In de tweede plaats (het derde lid van (31)) kan de HP-index gezien worden als het met de waardeaandelen van tijdstip 0 gewogen gemiddelde van de rendementen van de afzonderlijke fondsen over de periode [0,t].

5. Vergelijking

In deze paragraaf worden de HT-index en de HP-index met elkaar op een aantal punten vergeleken. Achtereenvolgens komen de volgende onderwerpen aan de orde: 1) het geval van een enkelvoudige portefeuille (n=1);

2) Wijmenga laat de index τ lopen van 0 naar t, zie zijn formule (2.4.1), maar dat moet een vergissing zijn.

2) de splitsing van de index in een koerscomponent en een dividendcomponent;
3) de initiële keuze van het aandelenpakket;
4) het behoud van marktconformiteit;
5) de aggregeerbaarheid;
6) de pad-(on)afhankelijkheid;
7) de gevoeligheid voor koersveranderingen.

5.1. Enkelvoudige portefeuille

Indien de portefeuille slechts aandelen van één fonds bevat (n=1) vallen de HT-index en de HP-index samen. Beide indices gaan over in

$$\prod_{\tau=1}^{t} \left(P_1^{\tau} + D_1^{\tau} \right) / P_1^{\tau-1} . \qquad (32)$$

Dit is het over de periode [0,t] behaalde rendement van fonds 1 onder de veronderstelling dat het uitgekeerde dividend telkens onmiddellijk is herbelegd in dit fonds. Deze formule werd reeds afgeleid door Rietzschel (1983).

5.2. Koerscomponent en dividendcomponent

De 'total return'-index op tijdstip 1, zie (3), kan eenvoudig additief worden gesplitst[3] in een koerscomponent

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^1 / \sum_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^0 , \qquad (33)$$

en een dividendcomponent

3) Een multiplicatieve splitsing levert een dividendcomponent op, namelijk $1 + \Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 D_i^1 / \Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^1$, die niet geinterpreteerd kan worden als een 'dividend return'-index.

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, D_i^1 \;/\; \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 \;. \tag{34}$$

De vraag is of dit voor latere tijdstippen ook zo eenvoudig kan. Beschouw eerst de HT-index. Het is uit (17) duidelijk dat elke 'schakel' van de ketting-index gesplitst kan worden:

$$R^{HT}\left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ \underset{\sim}{N}^0 \right) =$$

$$\prod_{\tau=1}^{t} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, D_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau-1}} \right] . \tag{35}$$

Uitwerken van (35) levert een 'zuivere' koerscomponent

$$\prod_{\tau=1}^{t} \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{t}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{0}} \equiv K\left(\underset{\sim}{P}^0,\ \underset{\sim}{P}^t;\ \underset{\sim}{N}^0 \right) , \tag{36}$$

een 'zuivere' dividendcomponent

$$\prod_{\tau=1}^{t} \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, D_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^{\tau-1}} = \prod_{\tau=1}^{t} \frac{D^{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^{\tau-1} P_i^{\tau-1}} \tag{37}$$

(gebruik makend van (20) en (21)), maar ook een hele verzameling produkten van $\Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^{\tau} / \Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^{\tau-1}$ en $\Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 D_i^{\tau'} / \Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^{\tau'-1}$, en het is niet duidelijk of deze tot de koerscomponent of tot de dividendcomponent gerekend moeten worden. Splitsing van de HT-index voor $t \geq 2$ is dus niet eenduidig.

Dit blijkt ten overvloede als we het verschil van de HT-index en de koersindex (36) beschouwen. We vinden dan de volgende uitdrukking

$$R^{HT}\left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\right) - K\left(\underset{\sim}{P}^0,\ \underset{\sim}{P}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\right) =$$

$$\sum_{\tau=1}^{t} K\left(\underset{\sim}{P}^\tau,\ \underset{\sim}{P}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\right) D^\tau \Big/ \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0\ . \tag{38}$$

De afleiding hiervan wordt in de Appendix gegeven. Duidelijk blijkt uit (38) dat er sprake is van een interactie van koersverloop en uitgekeerd dividend. Voor elk tijdstip $\tau=1,\ldots,t$ is er een term gevormd door het op τ uitgekeerde dividend D^τ geinfleerd met de koersindex $K(\underset{\sim}{P}^\tau,\underset{\sim}{P}^t;\underset{\sim}{N}^0)$. De som van deze termen wordt gerelateerd aan W^0, de waarde van de portefeuille op het basistijdstip.

Bij de HP-index is geen sprake van 'schakels'. Deze index kan als volgt worden ontbonden: een 'zuivere' koerscomponent

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 \prod_{\tau=1}^{t} \left(P_i^\tau \,/\, P_i^{\tau-1} \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^t \Big/ \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 = K\left(\underset{\sim}{P}^0,\ \underset{\sim}{P}^t;\ \underset{\sim}{N}^0\right)\ , \tag{39}$$

een 'zuivere' dividendcomponent

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 \prod_{\tau=1}^{t} \left(D_i^\tau \,/\, P_i^{\tau-1} \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0\ , \tag{40}$$

en een aantal termen van de vorm

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0 \prod_{1\le\tau\ne\tau'\le n} \left(P_i^\tau \,/\, P_i^{\tau-1} \right)\left(D_i^{\tau'} / P_i^{\tau'-1} \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} N_i^0\, P_i^0\ . \tag{41}$$

Ook hiervan is niet duidelijk of ze tot de koerscomponent of tot de dividendcomponent gerekend moeten worden. Ook de HP-index is voor $t\ge2$ dus niet eenduidig te splitsen. Nadere beschouwing van het verschil van HP-index en koersindex levert geen additionele informatie op.

Merk op dat in beide gevallen de formule voor de 'zuivere' koerscomponent dezelfde is ((36) resp. (39)) en dat deze overeenkomt met de formule welke gebruikt wordt voor de CBS beurswaarde-index.

5.3. De initiële pakketkeuze

In hoofdstuk 2 is er van uit gegaan dat op het basistijdstip de portefeuille bestaat uit N_i^0 aandelen van fonds i (i=1,...,n). Impliciet is daarmee aangenomen dat de belegger voor bepaalde aantallen aandelen gekozen heeft. Het model is echter voldoende algemeen om ook rekening te kunnen houden met andere uitgangspunten. Stel bijvoorbeeld dat de belegger op tijdstip 0 een gelijk bedrag c wil beleggen in elk van de fondsen 1,...,n. De aantallen aangekochte aandelen zijn dan $N_i^0=c/P_i^0$, i=1,...,n. (Dit behoeven geen natuurlijke getallen te zijn.) Onder deze veronderstelling neemt de HT-index de volgende gedaante aan

$$R^{HT}\left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ c/\underset{\sim}{P}^0 \right) =$$

$$\prod_{\tau=1}^{t} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / P_i^0}{\sum_{i=1}^{n} P_i^{\tau-1} / P_i^0} \right) . \tag{42}$$

Hiervan uitgaande kan een relatie worden gelegd met de formule van de nieuwe CBS-stemmingsindex voor aandelen (zie CBS, 1986). Deze luidt, voor tijdstip τ ten opzichte van tijdstip 0

$$I\left(\underset{\sim}{P}^0,\ \underset{\sim}{P}^\tau \right) \equiv (1/n) \sum_{i=1}^{n} P_i^\tau / P_i^0 . \tag{43}$$

Het dividend-effect wordt berekend als $I(\underset{\sim}{P}^0,\underset{\sim}{D}^\tau)$.[4] Substitutie in (42) levert de volgende relatie op,

$$R^{HT}\left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\ \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t;\ c/\underset{\sim}{P}^0 \right) =$$

$$\prod_{\tau=1}^{t}\left(\left(I\left(\underset{\sim}{P}^0,\underset{\sim}{P}^\tau\right) + I\left(\underset{\sim}{P}^0,\underset{\sim}{D}^\tau\right)\right) / I\left(\underset{\sim}{P}^0,\underset{\sim}{P}^{\tau-1}\right)\right) . \tag{44}$$

Met behulp van deze relatie is het mogelijk uit gepubliceerde stemmingsindexcijfers en dividend-effecten een 'total return'-index te berekenen.

4) In de publikaties wordt dit van een negatief voorteken voorzien.

Onder de eerder genoemde veronderstelling neemt de HP-index de volgende gedaante aan,

$$R^{HP} (\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t; c/P^0) =$$

$$(1/n) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\tau=1}^{t} (P_i^\tau + D_i^\tau) / P_i^{\tau-1} \right) . \tag{45}$$

Dit komt, afgezien van de in noot 2 gemaakte opmerking, overeen met de EVI (Evenveel Vermogen Index; zie Wijmenga 1986, pag. 47).

5.4. Marktconformiteit

Onder beide beleggingsstrategieën veranderen de aantallen aandelen in de portefeuille voortdurend. Onder de HT-strategie vinden we

$$N_i^\tau = N_i^0 \prod_{\tau'=1}^{\tau} \left(1 + D^{\tau'} / \textstyle\sum_{j=1}^{n} N_j^{\tau'-1} P_j^{\tau'} \right) \tag{20}$$

en onder de HP-strategie

$$N_i^\tau = N_i^0 \prod_{\tau'=1}^{\tau} \left(1 + D_i^{\tau'} / P_i^{\tau'} \right) \tag{46}$$

(τ=1,...,t-1; i=1,...,n). Het kenmerkende onderscheid is dat bij de HT-strategie de onderlinge aantals<u>verhoudingen</u> in de portefeuille ongewijzigd blijven, immers in dat geval is

$$N_i^\tau / N_j^\tau = N_i^0 / N_j^0 \quad (i \neq j) , \tag{47}$$

terwijl dat bij de HP-strategie in het algemeen reeds na één periode niet meer het geval is.

Indien de aantalsverhoudingen in een portefeuille overeenstemmen met de aantalsverhoudingen in de markt van aandelen noemen we zo een portefeuille <u>marktconform</u>. Men spreekt ook wel van een marktportefeuille. Veranderen de aantalsverhoudingen in de markt (door emissies, faillissementen, ed.) dan is een voordien marktconforme portefeuille in het algemeen[5)] niet langer marktconform. Stel dat de aantalsverhoudingen in de markt gedurende de periode [0,t] niet veranderen en dat op tijdstip 0 de portefeuille marktconform is. Het in de voorgaande alinea beschreven onderscheid kan dan als volgt verwoord worden: onder de HT-strategie blijft de portefeuille marktconform, terwijl onder de HP-strategie deze eigenschap i.h.a. reeds na één periode verloren gaat. De HT-index kan dan ook worden geschreven als een produkt van HT-indices over deelperioden (zie (22)), waarbij aan het begin van elke deelperiode opnieuw een marktportefeuille gekozen wordt. Dit heeft een niet onbelangrijke operationele consequentie.

Stel dat op tijdstip 0 de aantallen aandelen in de markt worden gegeven door $(\hat{N}_1^0,\ldots,\hat{N}_n^0)$, en stel dat deze aantallen gedurende de periode [0,t] niet veranderen, dus

$$\hat{N}_i^\tau = \hat{N}_i^0 \quad (i=1,\ldots,n;\ \tau=1,\ldots,t). \tag{48}$$

Marktconformiteit van de initiële portefeuille betekent dat

$$N_i^0 \;/\; N_j^0 = \hat{N}_i^0 \;/\; \hat{N}_j^0 \quad (i\neq j). \tag{49}$$

Onder de HT-strategie hebben we dan

$$N_i^\tau \;/\; N_j^\tau = N_i^0 \;/\; N_j^0 = \hat{N}_i^0 \;/\; \hat{N}_j^0 = \hat{N}_i^\tau \;/\; \hat{N}_j^\tau \quad (i\neq j). \tag{50}$$

Omdat de HT-index (19) alleen afhangt van de onderlinge aantalsverhoudingen N_i^τ/N_j^τ $(i\neq j)$, kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} &R^{HT}\,(\,\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\,\underset{\sim}{P}^t,\,\underset{\sim}{D}^1,\ldots,\,\underset{\sim}{D}^t;\,\underset{\sim}{N}^0\,) = \\ &\prod_{\tau=1}^{t}\,(\,\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{N}_i^{\tau-1}\,(\,P_i^\tau + D_i^\tau\,)\;/\;\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{N}_i^{\tau-1}\,P_i^{\tau-1}\,) = \\ &\prod_{\tau=1}^{t}\,(\,\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{N}_i^{\tau}\,(\,P_i^\tau + D_i^\tau\,)\;/\;\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{N}_i^{\tau-1}\,P_i^{\tau-1}\,)\,. \end{aligned} \tag{51}$$

5) Dat wil zeggen behalve in het geval van aandelensplitsing, die in portefeuille en markt eenzelfde effect teweeg brengt.

Merk op dat $\Sigma_{i=1}^{n}\hat{N}_i^\tau P_i^\tau$ resp. $\Sigma_{i=1}^{n}\hat{N}_i^\tau(P_i^\tau+D_i^\tau)$ de totale beurswaarde excl. resp. incl. dividend van alle fondsen op tijdstip τ voorstelt. Onder de hiervoor genoemde veronderstellingen - constante aantallen aandelen in de markt en een (initieel) marktconforme portefeuille - kan de HT-index dus worden geschreven als een kettingindex van verhoudingen van totale beurswaarden. Omgekeerd kan zo een kettingindex worden geinterpreteerd als een 'total return'-index.

5.5. Aggregeerbaarheid

Stel dat we de gehele aandelenportefeuille verdelen in twee of meer disjunkte deelportefeuilles. De 'total return'-index voor de gehele portefeuille noemen we aggregeerbaar als hij te schrijven is als een gewogen gemiddelde van de 'total return'-indices voor de deelportefeuilles. We beschouwen achtereenvolgens de HT-index en de HP-index.

Stel dat de portefeuille $(N_1^0,\ldots,N_n^0)$ uit twee delen bestaat, bijvoorbeeld $(N_1^0,\ldots,N_m^0)$ en $(N_{m+1}^0,\ldots,N_n^0)$. Noem de delen resp. A en B. De HT-index voor pakket A is

$$\prod_{\tau=1}^{t} \left(\Sigma_{i=1}^{m} N_i^0 \left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / \Sigma_{i=1}^{m} N_i^0 P_i^{\tau-1} \right) , \tag{52}$$

en voor pakket B

$$\prod_{\tau=1}^{t} \left(\Sigma_{i=m+1}^{n} N_i^0 \left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / \Sigma_{i=m+1}^{n} N_i^0 P_i^{\tau-1} \right) , \tag{53}$$

terwijl de index voor het gehele pakket gegeven wordt door (17). Voor de overeenkomstige factoren van de drie indices geldt dat

$$\Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 \left(P_i^\tau + D_i^\tau \right) / \Sigma_{i=1}^{n} N_i^0 P_i^{\tau-1} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} N_i^0 \left(P_i^{\tau} + D_i^{\tau} \right)}{\sum_{i=1}^{m} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}} +$$

$$\frac{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}} \cdot \frac{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^0 \left(P_i^{\tau} + D_I^{\tau} \right)}{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^0 \, P_i^{\tau-1}} , \tag{54}$$

dat wil zeggen elke factor van de HT-index voor het gehele pakket is een gewogen gemiddelde van de overeenkomstige factoren van de indices voor de deelpakketten A en B. Voor de HT-index zelve gaat deze relatie echter niet op, dat wil zeggen (17) is niet te schrijven als een gewogen gemiddelde van (52) en (53). De HT-index is dus niet aggregeerbaar.

Wel kan de HT-index worden geschreven als een gewogen gemiddelde van uitdrukkingen die betrekking hebben op elk van beide deelpakketten. Hiervoor gaan we uit van (18).

$$R^{HT} \left(\underset{\sim}{P}^0, \ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1, \ldots, \underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0 \right) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} N_i^0 \, P_i^0}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} N_i^{t-1} \left(P_i^t + D_i^t \right)}{\sum_{i=1}^{m} N_i^0 \, P_i^0} +$$

$$\frac{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^0 \, P_i^0}{\sum_{i=1}^{n} N_i^0 \, P_i^0} \cdot \frac{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^{t-1} \left(P_i^t + D_i^t \right)}{\sum_{i=m+1}^{n} N_i^0 \, P_i^0} . \tag{55}$$

De uitdrukking voor bijvoorbeeld pakket A,

$$\sum_{i=1}^{m} N_i^{t-1} \left(P_i^t + D_i^t \right) / \sum_{i=1}^{m} N_i^0 \, P_i^0 , \tag{56}$$

kan echter niet geïnterpreteerd worden als de HT-index voor pakket A. In (56) wordt N_i^{t-1} gegeven door (vgl. (20))

$$N_i^{t-1} = N_i^0 \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + D^{\tau} / \sum_{j=1}^{n} N_j^{\tau-1} \, P_j^{\tau} \right) . \tag{57}$$

De HT-index voor pakket A heeft weliswaar dezelfde gedaante als (56), maar met

$$N_i^{t-1} = N_i^0 \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + D_A^\tau \Big/ \sum_{j=1}^m N_j^{\tau-1} P_j^\tau \right) \tag{58}$$

en

$$D_A^\tau = \sum_{j=1}^m N_j^{\tau-1} D_j^\tau . \tag{59}$$

Hieruit blijkt dat er sprake is van een verschillende achterliggende strategie. In (57) is verondersteld dat het totale dividend, uitgekeerd op A+B, in de gehele portefeuille (A+B) wordt herbelegd. Onder deze veronderstelling geeft (56) de 'total return' van het pakket A weer. Daarentegen veronderstelt de HT-index voor A dat het op A uitgekeerde dividend in A wordt herbelegd.

Betreffende de HP-index (31) kunnen we kort zijn. Uit de struktuur van deze index - het met de waardeaandelen van tijdstip 0 gewogen gemiddelde van de rendementen van de afzonderlijke fondsen - blijkt duidelijk dat deze aggregeerbaar is. De achterliggende strategie deed dit ook verwachten.

5.6. Pad-(on)afhankelijkheid

In de literatuur betreffende aandelenindices speelt het probleem van de pad-(on)afhankelijkheid een grote rol. Uit de formules voor de HT-index en de HP-index ((17) resp. (31)) blijkt dat ze in het algemeen pad-afhankelijk zijn, dat wil zeggen de uitkomst hangt niet alleen af van $\underline{P}^0$, $\underline{P}^t$ en $\underline{D}^t$, de variabelen aan begin en eind van de beschouwde periode, maar in het algemeen ook van de variabelen die betrekking hebben op alle tussengelegen tijdstippen, $\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^{t-1}$, $\underline{D}^1,\ldots,\underline{D}^{t-1}$. Dit kan als volgt gepreciseerd worden. Met betrekking tot de HT-index is eenvoudig in te zien dat indien voor zekere $\tau\in[1,t-1]$ $\underline{D}^\tau=\underline{0}$, dat wil zeggen op tijdstip τ zijn er geen dividenduitkeringen, de index niet afhangt van $\underline{P}^\tau$. Anders gezegd, de HT-index hangt, naast $\underline{P}^0$, $\underline{P}^t$ en $\underline{D}^t$, alleen af van die paren $(\underline{P}^\tau,\underline{D}^\tau)$, $\tau\in[1,t-1]$, waarvoor $\underline{D}^\tau\neq\underline{0}$. Voor de HP-index geldt dat indien voor zekere i en zekere $\tau \in [1,t-1]$ $D_i^\tau = 0$ de index niet afhangt van P_i^τ. Ofwel, de HP-index hangt, naast $\underset{\sim}{P}^0$, $\underset{\sim}{P}^t$ en $\underset{\sim}{D}^t$, alleen af van die paren (P_i^τ, D_i^τ), $\tau \in [1,t-1]$, $i=1,\ldots,n$, waarvoor $D_i^\tau \neq 0$.

Een voldoende voorwaarde voor pad-onafhankelijkheid over de periode $[0,t]$ is dat er in de periode $[1, t-1]$ geen dividend-uitkeringen plaatsvinden. In dat geval geven beide indices ook hetzelfde resultaat, namelijk

$$R^{HT} \left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{0},\ldots, \underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0 \right) =$$

$$R^{HP} \left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{0},\ldots, \underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0 \right) =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n N_i^0 \left(P_i^t + D_i^t \right) / \sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0 . \tag{60}$$

5.7. De gevoeligheid voor koersveranderingen

In dit laatste onderdeel beschouwen we de gevoeligheid van de beide 'total return'-indices voor koersveranderingen van de tot de portefeuille behorende fondsen. Als maat voor de gevoeligheid hanteren we de elasticiteit van de index met betrekking tot de laatste koers van aandeel i, gedefinieerd als

$$\varepsilon_{it} = \partial \ln R \left(\underset{\sim}{P}^0,\ldots,\underset{\sim}{P}^t,\underset{\sim}{D}^1,\ldots,\underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0 \right) / \partial \ln P_i^t . \tag{61}$$

De beide indices vertonen dezelfde struktuur, namelijk die van het rechterlid van formule (18). In het geval van de HT-strategie wordt N_i^{t-1} $(i=1,\ldots,n)$ gegeven door (20) en (21), en in het geval van de HP-strategie door (46). Op grond hiervan zijn de elasticiteiten ε_{it}^{HT} en ε_{it}^{HP} gemakkelijk af te leiden. Meer dan in de elasticiteiten zelf, zijn we echter geinteresseerd in de onderlinge verhoudingen ervan. Hiervoor vinden we

$$\frac{\varepsilon_{it}^{HT}}{\varepsilon_{jt}^{HT}} = \frac{N_i^{t-1} P_i^t}{N_j^{t-1} P_j^t} = \frac{N_i^0 P_i^t}{N_j^0 P_j^t} \tag{62}$$

en

$$\frac{\varepsilon_{it}^{HP}}{\varepsilon_{jt}^{HP}} = \frac{N_i^{t-1} P_i^t}{N_j^{t-1} P_j^t} = \frac{N_i^0 P_i^t \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + D_i^\tau / P_i^\tau \right)}{N_j^0 P_j^t \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + D_j^\tau / P_j^\tau \right)} \tag{63}$$

($1 \le i \ne j \le n$). De invloed van een koersverandering van fonds i op de HT-index is dus evenredig met het produkt van N_i^0, het initiële aantal aandelen, en P_i^t, de laatste koers. In het geval van de HP-index dient $N_i^0 P_i^t$ nog met de factor $\Pi_{\tau=1}^{t-1}(1+D_i^\tau/P_i^\tau)$ vermenigvuldigd te worden. Deze factor speelt alleen een rol voorzover er dividend uitgekeerd wordt.

Stel dat gedurende het interval [1,t-1] fonds i wel dividenduitkeringen pleegt en fonds j niet (dat wil zeggen $D_j^\tau=0$ voor $\tau=1,\ldots,t-1$). In dat geval is

$$\frac{\varepsilon_{it}^{HP}}{\varepsilon_{jt}^{HP}} > \frac{\varepsilon_{it}^{HT}}{\varepsilon_{jt}^{HT}} , \tag{64}$$

dat wil zeggen fonds i heeft, relatief ten opzichte van fonds j, meer invloed op de HP-index dan op de HT-index.

Een regelmatig dividend-uitkerend fonds wordt wel een 'rendementsfonds' genoemd. Een fonds dat geen dividend uitkeert maar de winst binnen de onderneming herinvesteert heet een 'groeifonds'. Relatie (64) betekent dan dat een rendementsfonds, relatief ten opzichte van een groeifonds, meer invloed heeft op de HP-index dan op de HT-index. Het gaat te ver om, zoals Wijmenga(1986) doet, hier van een nadeel van de HT-index te spreken. Relatie (64) is geboren uit de vergelijking van twee beleggingsindices met een van elkaar verschillende achterliggende strategie. Zolang er geen derde strategie is ontwikkeld, die als vergelijkingsmaatstaf kan fungeren, heeft het weinig zin over de HT- en de HP-index in termen van beter/slechter of voordelig/nadelig te spreken.

6. Conclusies

In het voorgaande werd voor een tweetal passieve beleggingsstrategieën de formule voor de 'total return'-index afgeleid. De strategieën zijn passief in die zin dat na de initiële pakketkeuze de enige toegelaten aktie bestaat uit het herbeleggen van het uitgekeerde dividend in tot de portefeuille behorende fondsen. De beide indices onderscheiden zich van elkaar met betrekking tot de volgende twee eigenschappen:

1. Aangenomen dat het aantal aandelen in de markt niet verandert en dat de initiële portefeuille marktconform is, blijft onder de HT-strategie de marktconformiteit behouden terwijl deze onder de HP-strategie verloren gaat.
2. De HP-index is aggregeerbaar en de HT-index niet.

Daarnaast kan worden opgemerkt dat in het geval van de HT-index het verschil van deze 'total return'-index en de (zuivere) koersindex een weliswaar niet eenvoudige maar toch goed interpreteerbare formule oplevert. Bij de HP-index is dat niet het geval.

In de werkelijkheid bestaat er een grote verscheidenheid aan portefeuilles en strategieën. Vele beleggers hebben er behoefte aan geregeld het verkregen rendement op hun eigen portefeuille te vergelijken met een algemene maatstaf. Voor een dergelijke maatstaf is van belang

1. dat hij op een redelijk inzichtelijke manier berekend wordt;
2. dat hij geïnterpreteerd kan worden als een 'total return'-index ;
3. dat de daarbij veronderstelde strategie door de 'modale' belegger gevolgd kan worden.

De beide in dit rapport afgeleide indices voldoen aan deze eisen. De keuze tussen de twee hangt af van het relatieve gewicht dat geplaatst wordt op de eigenschappen 'behoud van marktconformiteit' en 'aggregeerbaarheid'.

Appendix: afleiding van formule (38)

Voor de HT-index gaan we uit van formule (18). Gebruik makend van (21) vinden we

$$R^{HT} (\underset{\sim}{P}^0, \ldots, \underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{D}^1, \ldots, \underset{\sim}{D}^t; \underset{\sim}{N}^0) - K (\underset{\sim}{P}^0, \underset{\sim}{P}^t; \underset{\sim}{N}^0) =$$

$$(\textstyle\sum_{i=1}^n (N_i^{t-1} - N_i^0) P_i^t + D^t) / \textstyle\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^0 . \qquad \text{(A.1)}$$

Beschouw het eerste gedeelte van de teller.

$$\textstyle\sum_{i=1}^n (N_i^{t-1} - N_i^0) P_i^t = \textstyle\sum_{i=1}^n \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-1} (N_i^\tau - N_i^{\tau-1}) P_i^t =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-1} (N_i^{\tau-1} D^\tau / \textstyle\sum_{j=1}^n N_j^{\tau-1} P_j^\tau) P_i^t$$

op grond van (20). Verwisseling van de sommatietekens en opnieuw gebruik maken van (20) geeft

$$\textstyle\sum_{i=1}^n (N_i^{t-1} - N_i^0) P_i^t =$$

$$\textstyle\sum_{\tau=1}^{t-1} (\textstyle\sum_{i=1}^n N_i^{\tau-1} P_i^t / \textstyle\sum_{j=1}^n N_j^{\tau-1} P_j^\tau) D^\tau =$$

$$\textstyle\sum_{\tau=1}^{t-1} (\textstyle\sum_{i=1}^n N_i^0 P_i^t / \textstyle\sum_{j=1}^n N_j^0 P_j^\tau) D^\tau = \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-1} K (\underset{\sim}{P}^\tau, \underset{\sim}{P}^t; \underset{\sim}{N}^0) D^\tau .$$

Tenslotte geldt voor het tweede gedeelte van de teller van (A.1) dat

$$D^t = K (\underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{P}^t; \underset{\sim}{N}^0) D^t ,$$

omdat $K(\underset{\sim}{P}^t, \underset{\sim}{P}^t; \underset{\sim}{N}^0)D^t = 1$ op grond van de definitie.

Literatuur

CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek), 1986, De CBS-stemmingsindex voor aandelen (Centraal Bureau voor de Statistiek, Voorburg).

Dorsman, A.B. en J. van der Hilst, 1986, Beursindexcijfers (II). Economisch-Statistische Berichten 71, pp. 285-287.

van Duijn, J.J., 1986, Aandelen: een attractieve belegging voor de lange termijn. Economisch-Statistische Berichten 71, pp. 1094-1097.

Eichhorn, W. en J. Voeller, 1976, Theory of the price index. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 140 (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York).

Fase, M.M.G. en T.J. Mourik, 1986, Beursindexcijfers voor Nederland; inventarisatie en beoordeling. Economisch-Statistische Berichten 71, pp. 112-117.

Rietzschel, E.F., 1983, Een herbeleggingsindex voor aandelen. Doctoraalscriptie Universiteit van Amsterdam.

Wijmenga, R.Th., 1986, Beleggingsadviezen en buitengewoon rendement. Een onderzoek naar de efficiëntie van de Amsterdamse effectenbeurs. Proefschrift Erasmus Universiteit Rotterdam.

Ontvangen: 30-09-1987
Geaccepteerd: 03-11-1987