

EEN 'KLASSIEKE RANGTOETS' VOOR HET TWEE-STEELPROEVENPROBLEEM ONDER
STOCHASTISCHE CENSURERING

W. ALBERS*

SAMENVATTING

In het twee-steelproevenprobleem met stochastische censurering beschouwen we de ongecensureerde en de gecensureerde waarnemingen als twee aparte groepen. Voor elke groep wordt een geschikte rangtoetsingsgrootte berekend en van deze twee wordt dan de optimale combinatie genomen. Er zal worden gedemonstreerd dat dit idee leidt tot toetsen die

- *nauw verwant zijn met de gewone rangtoetsen voor het ongecensureerde geval,*
- *relatief eenvoudig zijn toe te passen en te begrijpen,*
- *resultaten t.a.v. hun asymptotische normaliteit eenvoudig laten afleiden uit de standaard resultaten voor het ongecensureerde geval.*

Aangetoond wordt dat het verlies ten gevolge van het gebruiken van twee afzonderlijke rangschikkingen in plaats van een volledige rangschikking asymptotisch verwaarloosbaar is.

De optimale score functies blijken van de censureringsverdeling af te hangen. Nagegaan wordt daarom hoe adaptatie van de scorefuncties aan de waarnemingen in deze situatie uitpakt. Gekozen wordt voor beperkte adaptatie, zodat de eenvoud van de voorgestelde toets behouden kan blijven. Ter illustratie wordt een voorbeeld van het Wilcoxon-type besproken. Inzicht in het effect van de adaptatie op de efficiëntie van de toets wordt verschaft,

zowel d.m.v. exacte berekeningen als d.m.v. simulatie resultaten.

Dit artikel is gebaseerd op een voordracht voor de Sectie Mathematische Statistiek van de VVS, gehouden op 14 januari 1987 in Utrecht.

* Vakgroep Medische Informatica en Statistiek, Rijksuniversiteit Limburg, Postbus 616, 6200 MD Maastricht, tel. 043-434410

1. "GEWONE" TWEE-STEELPROEVEN RANGTOETSEN

Als aanloopje en om de notatie in te voeren, bekijken we eerst kort het ongecensureerde geval. Zij $X_1, \dots, X_m$ een steekproef uit $F(x)$ en zij $X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$ een steekproef uit $F(x-\theta)$. Op basis van deze twee steekproeven willen we $H_0: \theta = 0$ toetsen tegen bv. $H_1: \theta > 0$. Als $F(x) = \Phi(x-\mu)/\sigma$, met Φ de standaard normale verdelingsfunctie, dan wordt een t-toets gebruikt. Maar als we de normaliteitsaanname willen vermijden, nemen we onze toevlucht tot een verdelingsvrije toets, meestal een rangtoets.

De toetsingsgrootte heeft in dat geval de vorm

$$T = \sum_{j=m+1}^N J\left(\frac{R_j}{N+1}\right) - \lambda \sum_{i=1}^N J\left(\frac{i}{N+1}\right) \quad (1)$$

Hierin is $N = m+n$, $\lambda = n/N$, zijn $R_1, \dots, R_N$ de rangnummers van $X_1, \dots, X_N$ en is J een scorefunctie op $(0,1)$. Bekende voorbeelden zijn de Wilcoxon toets ($J(t) = t$) en de van der Waerden toets ($J(t) = \Phi^{-1}(t)$). Bij gegeven F is de optimale keuze voor J gelijk aan ψ met $\psi(t) = -\frac{f'}{f}(F^{-1}(t))$. Resultaten omtrent asymptotische normaliteit van T zijn in overvloed beschikbaar. We komen daar later op terug.

2. CENSURERING: INLEIDING

Onder censurering (van rechts) verstaan we, losjes gezegd, het ontbreken, volgens een nader te bepalen mechanisme, van in het algemeen "grotere" waarnemingen. De laatste jaren is er veel aandacht gewijd aan het uitbreiden van resultaten voor twee-steekproeven rangtoetsen naar het gecensureerde geval. Hierbij wordt gebruik gemaakt

van nieuwe, geavanceerde methoden (martingalen, telprocessen, etc., zie Andersen et al.), welke toetsen opleveren die onder zeer algemene patronen van censurering werken, waarbij deze patronen ook nog verschillend mogen zijn voor de twee steekproeven. Een nadeel is echter dat de resulterende toetsen geen of nauwelijks overeenkomst vertonen met de oorspronkelijke rangtoetsen (ook al kan hier door middel van "partiële integratie" enige verbetering bereikt worden, zie Prentice en Marek (1979)).

Het huidige artikel komt voort uit de wens om rangtoetsen voor gecensureerde data te ontwikkelen die wel onmiddellijk herkenbaar zijn als generalisaties van het ongecensureerde geval en die ook met de voor dat geval bestaande theorie kunnen worden behandeld. Zie hier de verklaring voor de op het eerste gezicht nogal tegenstrijdig klinkende benaming "klassieke rangtoetsen", welke in de titel is gebruikt.

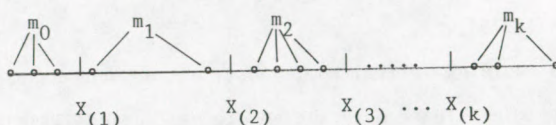
Voor we de nieuwe toetsen invoeren, noemen we eerst kort enkele relevante resultaten uit de literatuur. In de eerste plaats beschouwen we type II censurering. Hierbij heeft men slechts de eerste k van de N geordende waarnemingen ter beschikking. Dit impliceert dat J noodgedwongen constant zal zijn op $(p, 1)$, met $p = k/N$. Het is eenvoudig in te zien dat onder deze restrictie de optimale keuze gelijk is aan

$$J(t) = \begin{cases} \psi(t), & 0 < t < p, \\ X(p) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \psi(u) du, & p \leq t < 1. \end{cases} \quad (2)$$

M.a.w. de ongecensureerde waarnemingen krijgen de hen normaal toegekende score, terwijl de gecensureerde waarnemingen alle als score krijgen het gemiddelde van de na het moment van censurering nog beschikbare scores. Bij dit simpele type censurering is de relatie tot het ongecensureerde geval dus nog duidelijk herkenbaar. Ook de asymptotiek vergt geen verdere inspanning of nieuwe methoden. Auteurs die

deze situatie bekeken hebben zijn o.a. Gastwirth (1965), Bhattacharya & Mehrotra (1983) en Basu, Ghosh & Sen (1983).

Lastiger wordt het als we overstappen naar progressieve type II censurering, waaronder door Prentice (1978) een overigens ook onder andere vormen van censurering te gebruiken toets is afgeleid. Hier zijn weer k van de N geordende waarnemingen beschikbaar. Nu zijn het echter niet de eerste k , maar is het een willekeurig gespreide groep:



waarbij m_i dus het aantal gecensureerde waarnemingen is tussen de i -de en de $(i+1)$ -ste ongecensureerde waarneming. Het aspect dat de ongecensureerde waarnemingen gewone scores krijgen en de gecensureerde waarnemingen rechter gemiddelden van deze scores, blijft ook hier herkenbaar. Maar de situatie wordt gecompliceerd door het vóórkomen van de Kaplan-Meier schatter

$$\hat{F}(x) = 1 - \prod_{\{j: X_{(j)} \leq x\}} \left(\frac{n_j}{n_{j+1}} \right), \quad n_j = \sum_{i=j}^k (m_i + 1). \quad (3)$$

Deze $\hat{F}$ schat, zoals de notatie al suggereert, de verdelingsfunctie F . In het ongecensureerde geval reduceert $\hat{F}$ tot de gebruikelijke empirische verdelingsfunctie. De optimale scores die Prentice vindt, worden nu gegeven door

$$a_i = \psi(\hat{F}(x_{(i)})), \quad A_i = \chi(\hat{F}(X_{(i)})),$$

met $\hat{F}$ als in (3), χ als in (2), terwijl a_i bestemd is voor $X_{(i)}$ en A_i voor elke waarneming in de i -de groep van gecensureerde waarnemingen.

De asymptotische eigenschappen van de corresponderende toets

volgen nu niet langer onmiddellijk uit de standaard resultaten voor het ongecensureerde geval. Een en ander illustreert dat, zo gauw het beschouwde censureringsmechanisme wat meer algemeen van karakter wordt, de relatie van de resulterende toetsen tot de gewone rangtoetsen snel vervaagt.

3. EEN NIEUWE TOETS ONDER STOCHASTISCHE CENSURERING

Voor we de nieuwe toets introduceren, geven we eerst aan wat met stochastische censurering is bedoeld. Naast en onafhankelijk van de $X_1, \dots, X_N$ hebben we onafhankelijke censureringstijden $W_1, \dots, W_N$ met eenzelfde verdelingsfunctie D . Deze aanname van gelijke censurering voor beide groepen is van wezenlijk belang bij onze aanpak. Zij nu

$$\begin{cases} \tilde{X}_j = \min(X_j, W_j), \\ V_j = 1 \text{ als } \tilde{X}_j = X_j \text{ en } V_j = 0 \text{ anders,} \end{cases}$$

dan is het de bedoeling om $H_0: \theta = 0$ te toetsen, niet met de X_j , maar slechts met de $\tilde{X}_j$ en de V_j , $j=1, \dots, N$.

In deze situatie is door Albers en Akritas (1987) een toets gegeven, gebaseerd op het volgende simpele idee. Voorwaardelijk gegeven $V = v$ hebben we in feite te maken met de volgende vier steekproeven:

	ongecensureerd	gecensureerd	
Steekproef 1	$Y_1, \dots, Y_k$ uit G	$Z_1, \dots, Z_{m-k}$ uit H	(4)
Steekproef 2	$Y_{k+1}, \dots, Y_{k+l}$ uit G_θ	$Z_{m-k+1}, \dots, Z_{N-k-l}$ uit H_θ	

waarbij $k = \sum_{j=1}^m v_j$, $\ell = \sum_{j=m+1}^N v_j$, $G(\theta)$ de verdelingsfunctie is van $\tilde{X}_j$ gegeven $v_j = 1$ en $H(\theta)$ idem gegeven $v_j = 0$. Het bekijken van (4) suggereert nu om twee afzonderlijke tweesteekproevenproblemen te beschouwen, namelijk één voor de ongecensureerde waarnemingen (de Y_i) en één voor de gecensureerde (de Z_i). Voor beide problemen dient de optimale rangtoets gekozen te worden en van deze twee moet dan de optimale combinatie genomen worden.

Vóór het zinvol lijkt om dit idee verder uit te diepen, is het goed om na te gaan of het splitsen van de steekproeven en het afzonderlijk rangschikken van de waarnemingen niet leidt tot onacceptabele verliezen van efficiency (zie ook van Elteren (1960)). Daartoe maken we nu een kleine excursie naar het terrein van het combineren van onafhankelijke toetsen. Beschouw twee onafhankelijke toetsingsgrootheden T_1 en T_2 voor $H_0: \theta = 0$. Zij $T_i \sim AN(\theta\mu_i, \sigma_i^2)$ waarbij "AN" staat voor asymptotisch normaal. Eenvoudig valt na te gaan dat de optimale combinatie $T^{(c)}$ wordt gegeven door

$$T^{(c)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} T_i \quad (5)$$

en dat $T^{(c)} \sim AN(\theta \sum_{i=1}^2 \mu_i^2 / \sigma_i^2, \sum_{i=1}^2 \mu_i^2 / \sigma_i^2)$ is. Vervolgens passen we dit toe op de optimale twee-steekproeven rangtoets (dus met $J=\psi$). Daarvan is de toetsingsgrootheid $T_{m,n} \sim AN(\theta\mu(m,n), \mu(m,n))$, waarbij

$$\mu(m,n) = \frac{mn}{N} \int_0^1 \psi^2. \quad (6)$$

Stel nu dat de eerste steekproef in k en $(m-k)$ waarnemingen en de tweede in ℓ en $(n-\ell)$ waarnemingen is gesplitst. Omdat in deze

toepassing $\mu_i = \sigma_i^2$ volgt uit (5) dat de optimale combinatie $T_{m,n}$ in dit geval gegeven wordt door

$$T_{m,n}^{(c)} = T_{k,\ell} + T_{m-k,n-\ell},$$

waarbij $T_{m,n}^{(c)} \sim AN(\bar{\mu}, \bar{\mu})$ is, met $\bar{\mu} = \mu(k,\ell) + \mu(m-k,n-\ell)$. We hebben dus asymptotische equivalentie van $T_{m,n}^{(c)}$ en $T_{m,n}$ als $\mu(k,\ell) + \mu(m-k,n-\ell) = \mu(m,n)$. Uit (6) volgt dat aan deze eis voldaan is als (in eerste orde)

$$\frac{k}{k+\ell} = \frac{m}{m+n}, \quad (7)$$

m.a.w. als de splitsing van de twee steekproeven naar rato heeft plaatsgevonden. Het is intuïtief duidelijk dat (7) nodig is en het is dus prettig te zien dat deze eis ook voldoende is. Splitsing en aparte rangschikking hoeft dus niet per definitie tot onherstelbaar verlies van efficiency te leiden.

Een verklaring voor de asymptotische equivalentie van $T_{m,n}^{(c)}$ en $T_{m,n}$ (notatie: $T_{m,n}^{(c)} \sim T_{m,n}$) wordt geleverd door te kijken naar de parametrische tegenhanger $\tilde{T}_{m,n}$ van $T_{m,n}$, gedefinieerd door

$$\tilde{T}_{m,n} = \sum_{j=m+1}^N \psi(F(X_j)) - \lambda \sum_{i=1}^N \psi(F(X_i)) \quad (8)$$

(vergelijk met (1) voor $J=\psi$). Er geldt dat $\tilde{T}_{m,n} \sim T_{m,n}$, en dus ook dat $\tilde{T}_{k,\ell} \sim T_{k,\ell}$ en $\tilde{T}_{m-k,n-\ell} \sim T_{m-k,n-\ell}$. Maar onder (7) volgt uit (8) dat $\tilde{T}_{m,n} = \tilde{T}_{k,\ell} + \tilde{T}_{m-k,n-\ell}$, zodat $T_{m,n}^{(c)} = T_{k,\ell} + T_{m-k,n-\ell} \sim \tilde{T}_{k,\ell} + \tilde{T}_{m-k,n-\ell} = \tilde{T}_{m,n} \sim T_{m,n}$. In woorden: in het parametrische geval leidt splitsing niet tot verlies, zodat voor de asymptotisch equivalente rangtoetsen het verlies dus asymptotisch verwaarloosbaar is.

Na dit intermezzo keren we terug tot het oorspronkelijke probleem. Laat $R_1, \dots, R_{K+L}$ de rangnummers zijn van $Y_1, \dots, Y_{K+L}$ en $Q_1, \dots, Q_{N-K-L}$ van $Z_1, \dots, Z_{N-K-L}$ (zie (4)), dan voeren we voor scorefuncties J_1 en J_2 in als toetsingsgrootheid

$$T^* = \sum_{j=K+1}^{K+L} J_1(\overset{R_j}{\overline{K+L+1}}) + \sum_{j=m-K+1}^{N-K-L} J_2(\overset{Q_j}{\overline{N-K-L+1}}) - \lambda \{ \sum_{i=1}^{K+L} J_1(\overset{i}{\overline{K+L+1}}) + \sum_{i=1}^{N-K-L} J_2(\overset{i}{\overline{N-K-L+1}}) \}$$

(vergelijk (1)). Merk op dat $K = \sum_{j=1}^m V_j$ en $L = \sum_{j=m+1}^N V_j$ gebruikt worden en niet k en l . De bijbehorende toets is dus onvoorwaardelijk.

De asymptotische eigenschappen van T^* zijn vrijwel als standaard gevolg van de bekende theorie voor gewone rangtoetsen te geven. Naast de al eerder genoemde

$$\psi(t) = -\frac{f'}{f}(F^{-1}(t)) \text{ en } \chi(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 \psi(u) du$$

gebruiken we de functies

$$\Gamma = F \cdot G^{-1} \quad \text{en} \quad \Lambda = F \cdot H^{-1}$$

om de invloed van de censureringsverdeling D tot uitdrukking te brengen. Zij verder de kans op een ongecensureerde waarneming onder H_0

$$\tau = \int f(1-D) = P_0(\tilde{X}_j = X_j) = P_0(X_j < W_j).$$

Neem ten slotte aan dat de volgende standaardisatie geldt

$$\tau \int J_1 + (1-\tau) \int J_2 = 0. \quad (9)$$

Deze eis is niet noodzakelijk, maar maakt het te formuleren resultaat compacter. Nu geldt, onder standaard voorwaarden (zie bv. Hájek & Šidák (1967) dat

$$T^* \text{ is AN} \left(\frac{\lambda(1-\lambda) \{ \tau \int J_1 \psi \cdot \Gamma + (1-\tau) \int J_2 X \cdot \Lambda \}}{N \lambda(1-\lambda) \{ \tau \int J_1^2 + (1-\tau) \int J_2^2 \}} \right) \quad (10)$$

Dit resultaat geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen

1) optimaal is de keuze $J_1 = \psi \cdot \Gamma$ en $J_2 = X \cdot \Lambda$.

2) voor de "gewone" T in (1) geldt T is

$AN(\lambda(1-\lambda) \int J \psi, N \lambda(1-\lambda) \int J^2)$ mits $\int J=0$ (vergelijk (9)). Vergelijking van dit resultaat met (10) toont duidelijk dat het laatste geval inderdaad een mengsel van twee tweestekproevenproblemen betreft, waarbij de mengverhouding door het censureringspercentage wordt bepaald.

3) Voor de in opmerking 1) gegeven keuze is na te gaan dat de toets gebaseerd op T^* equivalent is met die van Prentice. Dus inderdaad is ook hier het verlies ten gevolge van de splitting asymptotisch verwaarloosbaar.

Tot slot van deze paragraaf geven we een voorbeeld, dat ook in de volgende paragrafen zal terugkeren. Neem als conventie dat voor een verdelingsfunctie I we $1-I$ aangeven met $\bar{I}$. Kies in de eerste plaats $\bar{D} = \beta(\bar{F})$, met

$$\beta(t) = t^{1/\tau} - 1 \quad (11)$$

met τ weer gelijk aan $P_0(X_j < W_j)$. Dan geldt dat $\bar{G} = \bar{H} = \bar{F}^{1/\tau}$ zodat $\Gamma(t) = \Lambda(t) = 1 - (1-t)^\tau$. Kies verder de Wilcoxon score functie $\psi(t) = 2t-1$, zodat $\chi(t) = t$. Dan vinden we

$$J_1(t) = \psi(\Gamma(t)) = 1 - 2(1-t)^\tau, \quad J_2(t) = \chi(\Lambda(t)) = 1 - (1-t)^\tau.$$

In dat geval is $T^*_{AN}(\theta, \mu)$ met $\mu = N\lambda(1-\lambda)\tau/(1+2\tau)$. Het verlies tengevolge van de censurering wordt uitgedrukt door het feit dat de asymptotische relatieve efficiency $ARE(T^*, \text{Wilcoxon}) = 3\tau/(1+2\tau)$. Merk op dat $ARE \uparrow 1$ als $\tau \uparrow 1$.

4. ADAPTATIE

Een probleem met het voorafgaande is uiteraard dat de ware F en D , en dus ook de optimale $J_1 = \psi \cdot \Gamma$ en $J_2 = \chi \cdot \Lambda$, doorgaans onbekend zijn. Ditzelfde probleem speelt overigens ook al in het ongecensureerde geval, zij het in wat eenvoudiger vorm. Dan is alleen F , en dus de optimale $J = \psi$, onbekend. De consequentie van deze onwetendheid is meestal dat men gokt op een bepaalde F^* en D^* en dan de bijbehorende $J_1^* = \psi^* \cdot \Gamma^*$ en $J_2^* = \chi^* \cdot \Lambda^*$ gebruikt. Vindt men dat toch te onbevredigend, dan kan geprobeerd worden de situatie te verbeteren door middel van adaptatie: de steekproef wordt eerst gebruikt om F en D te schatten, waarna de met deze schatting corresponderende T^* wordt toegepast.

Om te zien waar deze aanpak toe leidt, kijken we eerst naar het ongecensureerde geval, waar dus alleen van aanpassing aan F sprake is. Op dit gebied bestaat een uitgebreide literatuur, beginnend met Stein (1956). Het blijkt dat adaptatieve toetsen gegeven kunnen worden die uniform asymptotisch efficient zijn. Het vervelende is echter dat de ervaring leert dat voor het zichtbaar worden van dit optimale karakter enorme steekproeven nodig zijn. In het licht hiervan lijkt het zinvol

om minder ambitieuze vormen van adaptatie te onderzoeken. Hierbij wordt niet de beste F geschat uit alle mogelijke verdelingsfuncties, maar slechts uit een aanzienlijk beperkter verzameling, zoals een parametrische familie. Deze aanpak is gehanteerd door Albers (1979, 1980) en leidt inderdaad tot bevredigende resultaten.

Gezien het bovenstaande zullen we ook hier beperkte adaptatie bekijken. Bovendien concentreren we ons op D , omdat, zoals hiervoor is opgemerkt, aan het probleem van aanpassing aan F niets nieuws is. Naar analogie van (11) geven we $\bar{D}^*$ als functie van $\bar{F}^*$, maar ditmaal niet met een vaste keuze, maar één uit een parametrische familie $\{\beta_\xi\}$. De keuze voor ξ dient dan op grond van de waarnemingen gemaakt te worden. Omdat $\tau = \int_0^1 \beta_\xi^*$, is de simpelste aanpak om $\{\beta_\xi^*\}$ zo te parametriseren dat $\int_0^1 \beta_\xi^* = \xi$. Dan is namelijk onmiddellijk duidelijk dat ξ , en dus τ , geschat kan worden door

$$S = \frac{K+L}{N}.$$

Met andere woorden, we kiezen die $\bar{D}$ uit de beschikbare familie die leidt tot het in de steekproef gevonden censureringspercentage. Eenvoudig valt na te gaan dat voor de adaptieve toets gebaseerd op T_S^* eveneens (10) geldt, met J_i vervangen door $J_{i\tau}$. Een voorbeeld wordt geleverd door (11) te vervangen door $\beta_\xi^*(t) = t^{1/\xi - 1}$.

5. NUMERIEKE ILLUSTRATIE

In deze slotparagraaf zullen we het voorafgaande kort illustreren zowel door middel van exacte efficiency berekeningen als door middel van simulatie resultaten. Als eerste geven we de exacte effi-

ciencies. We hebben zojuist gezien dat T_S^* asymptotisch optimaal is als de ware β in de gekozen familie $\{\beta_\xi^*\}$ voorkomt (en als bovendien ψ en χ in J_1 en J_2 gebruikt zijn). Om na te gaan wat er gebeurt als $\beta \in \{\beta_\xi^*\}$, beschouwen we het geval waarbij $\beta_\xi^*(t) = t^{1/\xi - 1}$, terwijl

$$\beta(t) = \delta t^{\gamma_1 - 1} + (1 - \delta)t^{\gamma_2 - 1}.$$

De ware β is dus een mengsel van β_ξ^* 's en lijkt alleen op zo'n type functie als $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Voor een twintigtal (γ_1, γ_2) met $\gamma_2/\gamma_1 \approx 3$ A 4 is de ARE van de toets gebaseerd op T_S^* berekend ten opzichte van de optimale toets, dus voor bekende β . (Hierbij is weer de Wilcoxon situatie aangehouden, dus $\psi(t) = 2t - 1$ en $\chi(t) = t$ en is F logistiek genomen). Het blijkt dat de ARE gemiddeld 98% is terwijl de laagst voorkomende waarde 93% is.

Vervolgens bespreken we de simulatie resultaten. Weer is $\psi(t) = 2t - 1$ en $\chi(t) = t$ gekozen en ook geldt weer $\beta_\xi^*(t) = t^{1/\xi - 1}$. Het gedrag van de bijbehorende T_S^* is vergeleken met dat van de toets van Prentice. Op basis van 400 simulaties per geval, $\alpha = 0.05$, $\theta = 1$, $(m, n) = (25, 25), (40, 20), (30, 60), (50, 50)$, F logistiek, normaal, dubbel-exponentieel, D uniform, exponentieel en logistiek, is vastgesteld dat het onderscheidend vermogen van de hier voorgestelde toets gemiddeld slechts 0.03 lager is dan het onderscheidend vermogen van de toets van Prentice. Ook dit resultaat suggereert weer dat het efficiency verlies ten gevolge van het splitsen en apart rangschikken verwaarloosbaar is.

Tot slot zij opgemerkt dat meer details over de efficiency berekeningen en de simulaties te vinden zijn in het eerdergenoemde artikel van Albers en Akritas (1987).

Opmerking: De auteur dankt de beoordelaar voor enkele welkome opmerkingen en aanvullingen.

REFERENCES

- Albers, W. (1979). Asymptotic deficiencies of one-sample rank tests under restricted adaptation. *Ann. Statist.* 7, 944-954.
- Albers, W. (1980). Asymptotic expansions for the power of adaptive rank tests in the one-sample problem. In: *Statistique non Paramétrique Asymptotique* (ed. J.P. Raoult), Springer LNM 821, 108-158.
- Albers, W. and Akritas, M. (1987). Combined rank tests for the two-sample problem with randomly censored data. To appear in *J. Amer. Statist. Ass.* 82.
- Andersen, P.K., Borgan, O., Gill, R. and Keiding, N. (1982). Linear nonparametric tests for comparison of counting processes, with applications to censored survival data. *Int. Statist. Rev.* 50, 219-258.
- Basu, A.P., Ghosh, J.K. and Sen, P.K. (1983). A unified way of deriving LMP rank tests for censored data. *J. Royal. Statist. Soc. (B)* 45, 384-391.
- Bhattacharya, G.K. and Mehrotra, K.G. (1983). A unified treatment of locally most powerful tests under type II censoring. *J. Amer. Statist. Ass.* 78, 375-381.
- Elteren, P.H. van, (1960). On the combination of independent two sample tests of Wilcoxon. *Bull. Int. Statist. Inst.* 37, 351-361.
- Gastwirth, J.L. (1965). Asymptotically most powerful rank tests for the two-sample problem with censored data. *Ann. Math. Statist.* 36, 1243-1247.
- Hájek, J. and Šidák, Z. (1967). *Theory of rank tests*. Academic Press, New York.

Prentice, R.L. (1978). Linear rank tests with right censored data.
Biometrika 65, 167-179.

Prentice, R.L. and Marek, P. (1979). A qualitative discrepancy between
censored data rank tests. Biometrics 35, 861-867. See also
Correction Note, Biometrics 36, p. 751 and Correspondence,
Biometrics 36, 353-355.

Stein, C. (1956). Efficient nonparametric testing and estimation.
Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Statist. & Prob. I, 187-195.

Ontvangen: 24-02-1987

Geaccepteerd: 01-06-1987