

MULTICRITERIA-ANALYSE VOOR ORDINALE DATA

A.Z. Israëls en W.J. Keller^{*)}

Samenvatting

Bij het toepassen van een multicriteria-analyse beschikt men vaak niet over numerieke effecten (= scores van alternatieven op criteria) of criterium-gewichten. Zowel Paelinck als Hinloopen en Nijkamp hebben zich bezig gehouden met het geval dat zowel de effecten als de gewichten slechts ordinaal zijn gemeten. In dit rapport worden twee methoden beschouwd voor het analyseren van dergelijke data, namelijk het paarsgewijs vergelijken van ordinale effecten en het toekennen van rangscores. Verbanden tussen beide methoden worden gelegd door het 'dummificeren' (= binair coderen) van rangordeningen.

^{*)} Centraal Bureau voor de Statistiek, Hoofdafdeling Statistische Methoden, Postbus 959, 2270 AZ VOORBURG. Tel. 070 - 69 43 41.

De in dit rapport weergegeven opvattingen zijn die van de auteurs en komen niet noodzakelijk overeen met het beleid van het Centraal Bureau voor de Statistiek.

1. Inleiding

Bij multicriteria-analyse (MCA) gaat men uit van I keuze-alternatieven $A_1, \dots, A_i, \dots, A_I$ en J criteria $C_1, \dots, C_j, \dots, C_J$ die van belang zijn bij het maken van een keuze tussen de alternatieven. Een voorbeeld van zo'n MCA is het keuze-probleem voor de uitbreiding van het luchthavennet in Nederland. Mogelijke keuze-alternatieven zijn:

- A_1 . Uitbreiding van Schiphol,
- A_2 . Uitbreiding van Zestienhoven,
- A_3 . Aanleg van een luchthaven in de Markerwaard,
- A_4 . Geen uitbreiding.

Mogelijke criteria zijn:

- C_1 . Jaarlijkse meerkosten,
- C_2 . Milieu aspecten,
- C_3 . Aanlegkosten,
- C_4 . Ruimtelijke planning,
- C_5 . Luchtverkeersveiligheid.

Voor ieder criterium moet worden beoordeeld in welke mate het een gunstig (of nadelig) aspect is voor de verschillende alternatieven. Men dient hiertoe voor ieder criterium C_j een vector $e_j = (e_{1j}, \dots, e_{ij}, \dots, e_{Ij})'$ te vormen met score e_{ij} voor alternatief A_i ($i=1, \dots, I$), waarbij e_{ij} groter is naarmate A_i beter aan C_j voldoet. (Bij deze definitie moeten 'kosten' worden vervangen door 'besparingen'.) Dit levert een $I \times J$ score-matrix

$$E = (e_1 \dots e_j \dots e_J) = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{i1} & \dots & e_{ij} & \dots & e_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{I1} & \dots & e_{Ij} & \dots & e_{IJ} \end{pmatrix}.$$

Dit is de zgn. (project-) effecten-matrix, die scores bevat die per kolom vergelijkbaar zijn. Naast deze effecten-matrix is het voor het maken van een keuze tussen de alternatieven noodzakelijk te beschikken over een gewichten-set $w = (w_1, \dots, w_j, \dots, w_J)'$, die het relatieve belang van ieder criterium

aangeeft ($\sum_j w_j = 1$). De keuze van gewichten is onlosmakelijk verbonden met de eenheden waarin de kolommen e_j zijn gemeten. Vaak zorgt men er voor de kolommen in een min of meer vergelijkbare eenheid te krijgen, bijvoorbeeld door middel van standaardisatie; dit vergemakkelijkt de bepaling der gewichten.

MCA staat voor een scala van methoden die, met behulp van E en w , scores of een rangorde bepalen voor de alternatieven. De methoden verschillen qua berekening en qua meetniveau van de data. Indien mogelijk moet men er voor zorgen dat E en w numerieke gegevens bevatten. Indien dit voor E niet lukt en men slechts over gegevens op ordinaal niveau bezit, is het keuze-probleem een neteliger zaak. Toch bestaan er ook MCA-methoden voor het geval dat e_j voor iedere j een ordening van de criteria bevat. In dit rapport wordt tevens verondersteld dat voor de wegingen slechts een ordening geldt. Dit rapport borduurt daarmee voort op het werk en de ideeën van Paelinck (1975), Mastenbroek en Paelinck (1976) en Hinloopen en Nijkamp (1982). Voor een algemeen overzicht van MCA-methoden wordt verwezen naar COBA (1982).

In paragraaf 2 wordt het probleem besproken van een gewichtenset met ordinale gewichten. In paragraaf 3 wordt het werken met deze ordinale gewichten toegepast op binaire effecten en in de paragrafen 4 en 5 op ordinale effecten. In paragraaf 6 worden de behandelde methoden vergeleken en wordt nader naar de problemen bij de bepaling van gewichten gekeken. Paragraaf 7 besluit met een toepassing op een tabel uit de Consumentengids over eigenschappen van diverse autotypen.

2. Ordinale wegingen

In dit rapport wordt aangenomen dat de criteria naar afnemende belangrijkheid zijn geordend. De verzameling toegelaten gewichtensets is dan $W = \{(w_1, \dots, w_j) \mid w_1 \geq \dots \geq w_j \geq 0 \text{ en } \sum_j w_j = 1\}$. Voor twee gewichten w_j en w_{j+1} kunnen we twee limiet-gevallen onderscheiden:

$$w_j / w_{j+1} = \infty \quad (1)$$

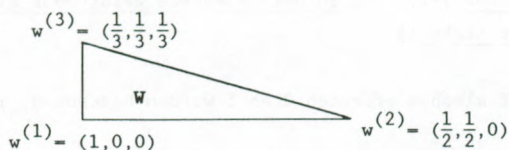
en

$$w_j = w_{j+1}. \quad (2)$$

Wanneer (1) zou worden aangenomen voor $j=1, \dots, J-1$ dan hanteert men een lexicografische (hiërarchische) oplossingsmethode. De ordening van de alternatieven vindt dan plaats op grond van de (al dan niet ordinale) scores op C_1 . Indien voor twee alternatieven A_i en A_i' geldt dat $e_{i1} = e_{i'1}$, dan beslist het tweede criterium, etc. Wanneer (2) zou worden aangenomen voor $j=1, \dots, J-1$, dan zijn alle J gewichten gelijk. Combinaties van (1) en (2) geven 2^{J-1} mogelijkheden. Echter, wanneer we reëel blijven en niet met machten van ∞ werken, houdt het gelden van (1) voor zekere j in dat $w_{j+1} = \dots = w_J = 0$, ervan uitgaande dat de J gewichten tot 1 optellen. Dit leidt ertoe dat er slechts J verschillende wegingsvectoren via combinaties van (1) en (2) bestaan. Indien j^* de eerste index is waarvoor (1) geldt dan verkrijgen we

$$w^{(j^*)} = \left(\frac{1}{j^*}, \dots, \frac{1}{j^*}, 0, \dots, 0 \right), \quad (3)$$

waarbij de eerste j^* gewichten gelijk zijn aan $1/j^*$ en de laatste $J-j^*$ aan nul. In het geval van vijf criteria levert dit de gewichtensets $(1,0,0,0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ en $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Zoals reeds is beschreven in Paelinck (1975) spannen de J gewichtensets van het type (3) een $(J-1)$ -dimensionaal hypervlak W op; de J gewichtensets $w^{(1)}, \dots, w^{(J)}$ vormen de hoekpunten van dit hypervlak. Alle gewichtensets w die aan $w_1 \geq \dots \geq w_J$ voldoen, liggen binnen dit hypervlak. Voor $J=3$ is zo'n hypervlak in figuur 1 getekend, zie ook Paelinck (1976). Omdat de positie van w binnen het hypervlak niet bekend is, zijn we speciaal geïnteresseerd in dominante relaties tussen alternatieven A_i en A_i' ; dit zijn relaties waarin het ene alternatief te verkiezen is boven het andere voor iedere w in het hypervlak.

Figuur 1. Hypervlak W voor drie criteria

3. Binaire effecten

Tabel 1. Binaire effecten-matrix

Alternatief	Criterium				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	+	-	-	+	+
A_2	+	-	-	-	-
A_3	-	-	-	+	-
A_4	-	+	+	+	-

Tabel 1 bevat een effecten-matrix met enkel plussen en minnen. Een '+' voor e_{ij} geeft een positieve waardering aan van alternatief A_i voor criterium C_j . De kolommen (criteria) zijn zo gerangschikt dat $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_5$. We kunnen de plussen en minnen in de tabel vervangen door respectievelijk enen en nullen. De effecten e_{ij} zijn dan te beschouwen als scores op dummy-variabelen C_j , en zijn daarmee in feite numeriek gemaakt, waardoor de alternatieven kunnen worden geëvalueerd voor de gewichtensets $w^{(1)}, \dots, w^{(J)}$. Dit betekent dat we de over de kolommen gecumuleerde sommen kunnen berekenen. De resultaten van de cumulaties staan in tabel 2. We zien hierin bijvoorbeeld dat wanneer voor de gewichtenset $w^{(3)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ zou worden gekozen, A_4 het beste alternatief is en A_3 het slechtste. Voor $w^{(2)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ scoren bijv. A_2 en A_4 gelijk. We geven nu de volgende definitie.

Definitie 1

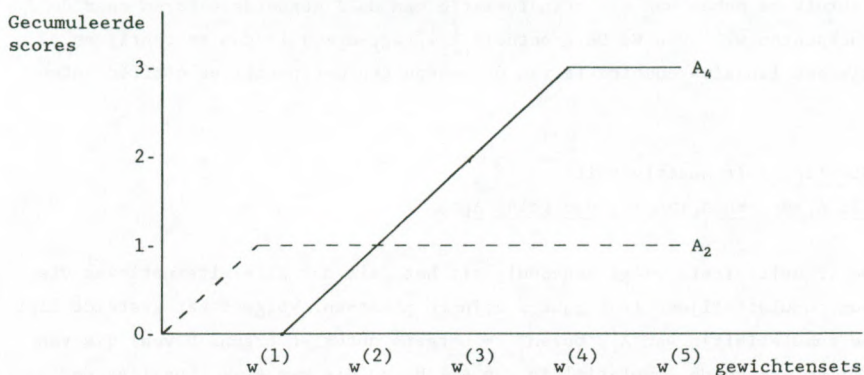
A_i is 'dominant' ten opzichte van A_i' (notatie: $A_i > A_i'$) als $\sum_{k=1}^J \text{sgn}(e_{ik} - e_{i'k}) \geq 0$ voor $j=1, \dots, J$ en het '>'-teken geldt voor minstens één j ('sgn' staat voor 'teken').

Omdat in deze paragraaf slechts effecten 0 en 1 worden beschouwd, mag 'sgn' worden weggelaten.

Tabel 2. Cumulaties van binaire effecten-matrix

Alternatief	Gewichtenset				
	w(1)	w(2)	w(3)	w(4)	w(5)
A_1	1	1	1	2	3
A_2	1	1	1	1	1
A_3	0	0	0	1	1
A_4	0	1	2	3	3

Uit tabel 2 leiden we bijvoorbeeld af dat noch $A_2 > A_4$ geldt, noch $A_4 > A_2$, zodat voor dit paar geen dominantie-relatie bestaat. Tabel 2, en dus eventuele dominanties, kunnen ook in een grafiek worden weergegeven met als vertikale as de gecumuleerde scores en als horizontale as de gewichtensets. Ieder alternatief kan dan door een lijn worden voorgesteld. Omdat de vier lijnen gedeeltelijk samenvallen hebben we slechts de cumulatie-lijnen behorende bij A_2 en A_4 getekend (figuur 2). We zien in deze figuur dat voor sommige gewichtensets A_2 hoger scoort en voor andere A_4 . Er is derhalve geen sprake van dominantie. (Wanneer we ons hadden beperkt tot positieve gewichten w_1 en w_2 voor C_1 en C_2 dan zou A_2 dominant zijn ten opzichte van A_4 .) Uit tabel 2 volgt dat er in totaal vier dominanties zijn. Deze zijn in tabel 3 weergegeven door middel van $d_{ii'} = 1$ als $A_i > A_{i'}$. Dominanties treden op voor paren lijnen die elkaar niet snijden en niet geheel samenvallen.

Figuur 2. Cumulatie-lijnen van A_2 (onderbroken) en A_4 (doorgetrokken)

Tabel 3. Dominantie-matrix voor vier alternatieven (binaire data)

Alternatief i	Alternatief i'				Rij-totaal
	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_1	-	1	1	0	2
A_2	0	-	1	0	1
A_3	0	0	-	0	0
A_4	0	0	1	-	1
Kolom-totaal	0	1	3	0	

We geven nu een aantal stellingen over de implicaties van dominantie-relaties:

Stelling 1

Als $A_i > A_i'$, dan geldt voor alle w^* in hypervlak $W = \{(w_1, \dots, w_J \mid w_1 \geq \dots \geq w_J \geq 0)\}$ dat $\sum_{j=1}^J w_j^* e_{ij} \geq \sum_{j=1}^J w_j^* e_{i',j}$ (met e_{ij} en $e_{i',j}$ de binaire effecten 0 of 1).

Deze stelling betekent dat $A_i > A_i'$ impliceert dat A_i niet alleen voor de gewichtensets $w^{(1)}, \dots, w^{(J)}$ (de hoekpunten van het hypervlak) minstens even goed is als A_i' , maar ook voor iedere willekeurige gewichtenset die aan de ordinale restricties voldoet (het binnenwerk van het hypervlak). De stelling

is reeds te vinden in Paelinck (1976). Het bewijs van de stelling volgt door gebruik te maken van een transformatie van de J eenheidsvectoren naar de J hoekpunten $w^{(j)}$ van W . De grootte $\sum_{j=1}^J w_j^*(e_{ij} - e_{i',j})$ is dan te schrijven als een lineaire combinatie van de hoekpunten met positieve coëfficiënten.

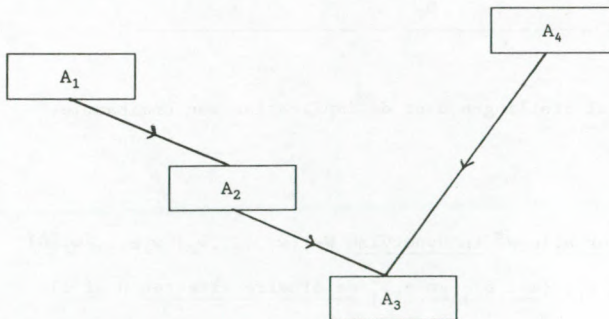
Stelling 2 (transitiviteit)

Als $A_i > A_{i'}$, en $A_{i'} > A_{i''}$, dan geldt $A_i > A_{i''}$.

De transitiviteit volgt eenvoudig uit het feit dat alle alternatieven via hun cumulatielijnen in figuur 2 zijn te plaatsen. Volgens het gestelde ligt de cumulatielijn van A_i 'boven' (= nergens onder en ergens boven) die van $A_{i'}$, en evenzo de cumulatielijn van $A_{i'}$ boven die van $A_{i''}$. Dus ligt de cumulatielijn van A_i boven die van $A_{i''}$.

Het gelden van de transitiviteit impliceert dat de dominanties een partiële ordening van de alternatieven opleveren. Deze partiële dominantie-ordening is weergegeven in figuur 3. Iedere lijn verbindt een hoger gelegen, dominant alternatief met een lager gelegen, gedomineerd alternatief.

Figuur 3. Partiële dominantie-ordening van vier alternatieven



De relatie $A_1 > A_3$ behoeft niet met een aparte lijn te worden weergegeven,

omdat de relatie volgt uit de lijnen A_1-A_2 en A_2-A_3 en de transitiviteits-eigenschap. De alternatievenparen (A_1, A_4) en (A_2, A_4) zijn niet geordend. We kunnen de lijn A_4-A_3 naar willekeur verkorten of verlengen, de hoogte van A_4 ten opzichte van A_1 en A_2 heeft geen betekenis. We kunnen in ons voorbeeld derhalve niet zeggen welk alternatief het beste is. Er zijn immers drie rangorden mogelijk, namelijk (A_1, A_2, A_4, A_3) , (A_1, A_4, A_2, A_3) en (A_4, A_1, A_2, A_3) .

We zouden dit voorbeeld van MCA op binaire data met deze partiële ordening kunnen afsluiten. Dit impliceert dat zou kunnen worden volstaan met het presenteren van de dominanties, zoals bijv. figuur 3 toont. We zoeken echter naar scores voor de alternatieven, zodat een volledige rangordening kan worden gegeven. We kiezen hiervoor een systeem van scores dat consistent is met de partiële ordening van dominanties, dat wil zeggen dat $A_1 > A_1'$, impliceert dat A_1 een hogere score krijgt dan A_1' . Dit doen we door aan A_1 een score S_1 toe te kennen volgens de volgende definitie.

Definitie 2

a. $S_1^+ = \text{aantal } i' \text{ met } A_1 > A_1'$,

b. $S_1^- = \text{aantal } i' \text{ met } A_1' > A_1$

c. $S_1 = S_1^+ - S_1^-$.

Dit betekent dat S_1^+ gelijk is aan het rijtotaal voor A_1 in de dominantie-matrix en S_1^- aan het kolomtotaal voor A_1 . De scorevector S is derhalve $(2, 0, -3, 1)$. Dit levert de score-permutatie (A_1, A_4, A_2, A_3) . We kunnen deze score-permutatie toepassen op de tabellen 1, 2 en 3; hierdoor ontstaan overzichtelijker tabellen. In de dominantie-matrix komen dan alle enen terecht in de rechterboven-driehoek. In ons geval zijn alle scores S_i verschillend. Indien A_i en A_i' dezelfde score hebben, is hun volgorde willekeurig. Er bestaat dan tevens geen dominantie tussen beide. Algemeen geldt

Stelling 3

Als $A_1 > A_1'$, dan $S_1 > S_1'$.

Er geldt echter niet dat $S_1 > S_1'$, impliceert dat $A_1 > A_1'$. Stelling 3 volgt mede uit stelling 2. Het gelden van de stelling betekent dat de scores consistent zijn met de partiële dominantie-ordening, hetgeen theoretisch gezien een fraaie eigenschap is. Praktisch gezien is het in ieder geval een prettige

eigenschap, zoals uit de volgende twee stellingen zal blijken.

Stelling 4

Het toevoegen (tussenvoegen) van een criterium C_j met gelijke effecten e_{ij} voor alle alternatieven A_i heeft geen invloed op de partiële dominantie-ordening van de alternatieven. Ook de scores, en derhalve de score-permutatie, verandert niet.

De reden van deze invarianties is het feit dat de dominantie-relaties niet veranderen.

Stelling 5

Het toevoegen van een alternatief A_i heeft geen invloed op de partiële dominantie-ordening van de reeds aanwezige alternatieven. De score-permutatie kan wel veranderen door het toevoegen van alternatieven, maar blijft consistent met de partiële dominantie-ordening.

De dominanties uit de dominantie-matrix veranderen niet bij het toevoegen van een alternatief. De matrix zelf verandert wel, omdat er een rij en kolom aan worden toegevoegd. Als we twee alternatieven A_5 en A_6 toevoegen, beide met scores $(-, +, +, +, +)$ op de vijf criteria dan wordt de score van A_4 -1 in plaats van 1 omdat $A_5 > A_4$ en $A_6 > A_4$; daarentegen behoudt A_2 zijn score van 0. Een dergelijke omkering komt alleen voor bij paren alternatieven waartussen geen dominantie-relatie bestaat.

Er bestaan vele andere mogelijke definities voor de score van een alternatief. Men kan bijvoorbeeld de gewogen effectensom $\sum_j w_j e_{ij}$ integreren over alle mogelijke w 's uit het hypervlak W (uniforme verdeling over W), hetgeen een speciaal geval is van de regime-methode (Hinloopen en Nijkamp, 1986). Ook kan men een uniforme verdeling veronderstellen over de hoekpunten $w^{(1)}, \dots, w^{(J)}$ van W . De resulterende scores zijn niet noodzakelijk consistent met de partiële dominantie-ordening. De bijbehorende score-permutaties zijn niet bestand tegen het toevoegen van een criterium met gelijke effecten en evenmin tegen het toevoegen van een alternatief. Dit laatste geldt ook voor de in deze paragraaf behandelde score-permutatie; de partiële dominantie-ordening blijft daarbij wel bewaard, net zo goed als bij (Hinloopen en Nijkamp, 1986) de vergelijkingen tussen paren alternatieven

niet veranderen.

De wenselijkheid van het bestendig zijn van een MCA-methode tegen het toevoegen van een criterium met gelijke effecten voor alle alternatieven is overigens een punt van discussie. Stel bijvoorbeeld dat aan de criteria $C_1, \dots, C_j$ een criterium C_j , wordt toegevoegd met $w_j > w_{j+1}$ en met gelijke scores e_{ij} , voor de alternatieven. Dan zou men kunnen zeggen dat dit wijst op een sterker uiteenlopen van de gewichten w_j en w_{j+1} dan men zonder het bestaan van criterium C_j , zou denken. Dit gezichtspunt impliceert dat het bestendig zijn tegen het toevoegen van C_j , niet zonder meer als een vast uitgangspunt mag worden genomen. Anderzijds is het in de praktijk zo dat de genoemde C_j , nooit als een serieus criterium bij de evaluatie zal worden betrokken, hetgeen pleit voor een methode die robuust is tegen dit soort toevoegen. Met betrekking tot het bestendig zijn van de volgorde (of de scores) van de alternatieven bij het toevoegen van een alternatief, gelden vergelijkbare argumenten voor en tegen. De problemen hieromtrent wijzen er overigens op dat een aanvechtbare, subjectieve numerieke bepaling van de scores e_{ij} en de gewichten w_j veelal de voorkeur verdient boven de onzekerheden die bij ordinale data een rol spelen.

Tenslotte volgt hier nog een kritische noot bij de gevolgde methode. Zonder enige voorkennis van de effecten-matrix bestaan er $I!$ mogelijke ordeningen voor de alternatieven. De partiële dominantie-ordening reduceert dit aantal tot zeg n mogelijke ordeningen. Het is evenwel niet noodzakelijk dat er voor ieder van deze n ordeningen een $w = (w_1, \dots, w_j) \in W$ is te vinden zodanig dat de ordening bereikt wordt. Stel bijvoorbeeld dat voor de eerste vier van I alternatieven geldt dat $A_1 > A_3$, $A_1 > A_4$, $A_2 > A_3$, $A_2 > A_4$, terwijl tussen A_1 en A_2 en tussen A_3 en A_4 geen dominantie-relatie geldt. Het is nu mogelijk dat voor iedere w waarvoor geldt dat $\sum_j w_j e_{1j} > \sum_j w_j e_{2j}$, ook geldt dat $\sum_j w_j e_{3j} > \sum_j w_j e_{4j}$. Dit houdt dan in dat de ordening (A_1, A_2, A_4, A_3) niet voorkomt. De partiële ordening bekijkt slechts paren alternatieven en geen m -tallen ($m \geq 3$) op het voorkomen van de ordening, vandaar dat de reductie in het aantal mogelijkheden niet noodzakelijk de minimum waarde bereikt. Het is zelfs mogelijk dat de score-permutatie een ordening geeft die bij geen enkele $w \in W$ voorkomt. Omdat de score-permutatie als een soort gemiddelde is te zien van alle mogelijke ordeningen is dit nauwelijks een bezwaar te noemen.

4. Ordinale effecten; methode der paarsgewijze vergelijkingen

Tabel 1 bevatte een effecten-matrix met enkel de scores '+' en '-'. Deze tabel was een dichotomisatie van tabel 4, waarin de vier scores '++++' t/m '+' staan. We zien dat per criterium hogere scores in tabel 1 door een '+' zijn vervangen en lagere door een '-'. Er bestaan twee tradities bij het behandelen van ordeningen als in tabel 4, namelijk paarsgewijze vergelijkingen en rangscores toekennen. (Beide methoden worden onder andere gebruikt bij het berekenen van correlatie-coëfficiënten. Dit geeft de correlaties van respectievelijk Kendall en Spearman.) In Hinloopen en Nijkamp (1982) wordt het uitgaan van paarsgewijze vergelijkingen de 'regime-methode' genoemd. In Hinloopen en Nijkamp (1986) is deze methode verder ontwikkeld. In deze paragraaf houden we ons bezig met een versie die afwijkt van hun methode, en daarom aangeduid zal worden met *mdpv* (methode der paarsgewijze vergelijkingen), en die aansluit bij de in de vorige paragraaf behandelde methode. Voor binaire data levert het dezelfde resultaten op.

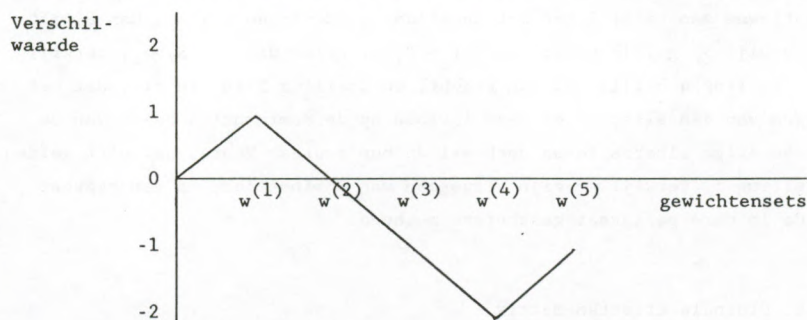
Tabel 4. Ordinale effecten-matrix

Alternatief	Criterium				
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
A ₁	++++	+	++	++	++
A ₂	+++	+	++	+	++
A ₃	++	++	+	++++	++
A ₄	+	+++	+++	+++	+

Bij de *mdpv* kunnen we uitgaan van dezelfde principes als in de vorige paragraaf. Per criterium wordt voor ieder paar (A_i, A_j) bekeken welk alternatief hoger scoort (meer plussen heeft in tabel 4). Iedere 'dominantie' op een criterium wordt gelijk gewaardeerd (met 1 punt), ongeacht het verschil in aantal plussen. Definitie 1 blijft voor de *mdpv* gehandhaafd. De dominanties zijn echter niet meer af te lezen uit een tabel met gecumuleerde scores; zo'n tabel is bij de *mdpv* niet te maken, omdat e_{ij} niet is gedefinieerd. (Alleen het teken van $e_{ik} - e_{ij}$ kan worden beschouwd te zijn

gedefinieerd, hetgeen overigens voldoende is voor het gelden van stelling 1). Men kan ook geen cumulatielijnen tekenen waarmee alle alternatieven in één figuur worden gebracht. Wel is het mogelijk om per alternatievenpaar (A_i, A_i') verschilwaarden $\sum_{k=1}^J \text{sgn}(e_{ik} - e_{i'k})$ te berekenen per gewichtenset $w^{(j)}$ met $j=1, \dots, J$. In figuur 4 is dit gedaan voor A_2 ten opzichte van A_4 . Omdat de lijn de horizontale as snijdt, is er geen sprake van dominantie. In totaal zijn er $\binom{4}{2}=6$ van dergelijke lijnen. Zij leiden tot de dominantie-matrix van tabel 5. Er zijn nu drie dominante relaties in de tabel. De scores S_i voor de vier alternatieven zijn respectievelijk 2, 0, -2 en 0. De score-permutatie is derhalve (A_1, A_2, A_4, A_3) of (A_1, A_4, A_2, A_3) . Vergeleken met tabel 3 bevat tabel 5 één dominantie-relatie minder, namelijk die tussen A_4 en A_3 . In principe kunnen door dichotomisatie zowel dominantie-relaties worden toegevoegd als verdwijnen.

Figuur 4. Verschilwaarden A_2 ten opzichte van A_4



Op grond van dit voorbeeld zou de gedachte (die ook aanvankelijk bij ons bestond) kunnen ontstaan dat de stellingen uit de vorige paragraaf ook bij de *mdpv* toepasbaar zijn. Dit is echter allerm minst waar. Zo geldt stelling 2 nu niet meer. Uit $A_1 > A_2$ en $A_2 > A_3$ volgt nu slechts dat A_3 niet dominant is ten opzichte van A_1 . In plaats van de transitiviteit geldt slechts dat er geen intransitiviteit kan plaatsvinden. Een voorbeeld waarin wel geldt dat $A_1 > A_2$ en $A_2 > A_3$, maar niet dat $A_1 > A_3$ is gegeven in tabel 6. Er is dus niet

Tabel 5. Dominantie-matrix voor vier alternatieven (ordinale data)

Alternatief	Alternatief				Rijtotaal
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
A ₁	-	1	1	0	2
A ₂	0	-	1	0	1
A ₃	0	0	-	0	0
A ₄	0	0	0	-	0

Kolomtotaal	0	1	2	0	

algemeen sprake meer van een (partiële) ordening van de alternatieven. In tabel 4 voldoet de matrix min of meer toevallig wel aan de ordenings-eigenschappen, maar in tabel 6 niet. Evenzo is een tegenvoorbeeld te geven tegen het gelden van stelling 3: de somscores voor de alternatieven uit tabel 6 zijn $S_1 = 1-0 = 1$, $S_2 = 1-1 = 0$ en $S_3 = 0-1 = -1$; voeg nu twee alternatieven aan tabel 6 toe met dezelfde waarderingen als A₃, dan blijft $S_1=1$, terwijl S_2 gelijk wordt aan $3-1 = 2$; er geldt dan dus $S_2 > S_1$, terwijl $A_1 > A_2$. Stelling 4 blijft wel van kracht, en stelling 5 in die zin, dat het toevoegen van een alternatief geen invloed op de dominanties heeft van de reeds aanwezige alternatieven doch wel op hun scores. Vooral het niet gelden van stelling 3, terwijl we zijn uitgegaan van dominanties, is een bezwaar tegen de in deze paragraaf geschetste methode.

Tabel 6. Ordinale effecten-matrix

Alternatief	Criterium		
	C ₁	C ₂	C ₃
A ₁	+++	+	+
A ₂	++	++	+
A ₃	+	++	++

Het feit dat in paragraaf 3 wel aan de transitiviteit en de daaruit voortvloeiende partiële ordening is voldaan en hier niet, hangt eenvoudig samen met het feit dat in figuur 2 in principe alle alternatieven in een

figuur zijn te plaatsen d.m.v. hun gecumuleerde scores in $w^{(j)}$, terwijl dat hier niet mogelijk blijkt.

In de vorige paragraaf gaven we andere mogelijke definities dan S_i voor de score van een alternatief, door een uniforme verdeling te veronderstellen over hypervlak W of over de hoekpunten van W en door de effecten over de uniforme verdeling te integreren respectievelijk te middelen. Een identieke aanpak is hier niet mogelijk omdat effecten e_{ij} niet zijn gedefinieerd. Wel kan men, zoals bij de regime-methode van Hinloopen en Nijkamp (1986), *ieder paar alternatieven* over het hele hypervlak W vergelijken. Hierbij worden niet alleen dominanties meegenomen, maar bevat een met tabel 3 vergelijkbare tabel kansen dat A_i beter is dan A_j . Dit leidt tot een score voor ieder alternatief. Het toevoegen van een criterium met gelijke waarderingen voor ieder alternatief heeft invloed op de methode omdat W als het ware wordt uitgerekt. Het toevoegen van een alternatief laat de paarsgewijze vergelijkingen tussen de reeds aanwezige alternatieven ongewijzigd, zoals vermeld in Hinloopen en Nijkamp (1986).

5. Ordinale effecten; puntscore-methode

We gaan andermaal uit van tabel 4. We beschouwen nu echter als scores e_{ij} de zogenaamde *puntscores*, welke zijn gedefinieerd als 'het aantal plussen minus 1'. De puntscores e_{i1} van de vier alternatieven op C_1 zijn respectievelijk 3, 2, 1 en 0. Voor dit criterium zijn de puntscores 1 lager dan de rangscores. Voor C_2 zijn de scores van de vier alternatieven respectievelijk 0, 0, 1 en 2. Het had voor de hand gelegen om, wanneer het aantal plussen slechts kolomgewijs vergelijkbaar is, per criterium scores 0, 1, 2 en 3 te hanteren en bij gelijke scores te middelen, zoals bij rangscores te doen gebruikelijk is. In paragraaf 6 zal worden uitgelegd waarom we dat hier niet hebben gedaan.

We zien in tabel 4 dat alternatief A_1 3 hoger scoort dan A_4 en slechts 1 hoger dan A_2 . Desondanks kunnen we niet zeggen dat het verschil in de hoogte van de score zwaarder meetelt dan bij de *mdpv*: het telt anders mee. Bij de *mdpv* werd het verschil tussen A_1 en A_4 geaccentueerd door het feit dat zowel A_2 als A_3 op C_1 hoger scoorden dan A_4 en lager dan A_1 , terwijl het

verschil tussen A_1 en A_2 maar in één relatie naar voren kwam, namelijk dat A_1 hoger scoorde dan A_2 .

In tegenstelling tot in de vorige paragraaf kunnen we nu wel gecumuleerde scores berekenen (voor de gewichten $w^{(j)}$, $j=1, \dots, J$). Vanwege de diversiteit van de scores (vergeleken met de binaire data van paragraaf 3) en het geringe aantal alternatieven kunnen we deze gecumuleerde scores vrij eenvoudig grafisch weergeven, zie figuur 5. De definitie van dominantie verandert ten opzichte van de vorige paragrafen omdat het niet meer slechts van belang is of A_i op een criterium C_j hoger scoort dan A_i' , maar ook hoeveel hoger.

Definitie 1'

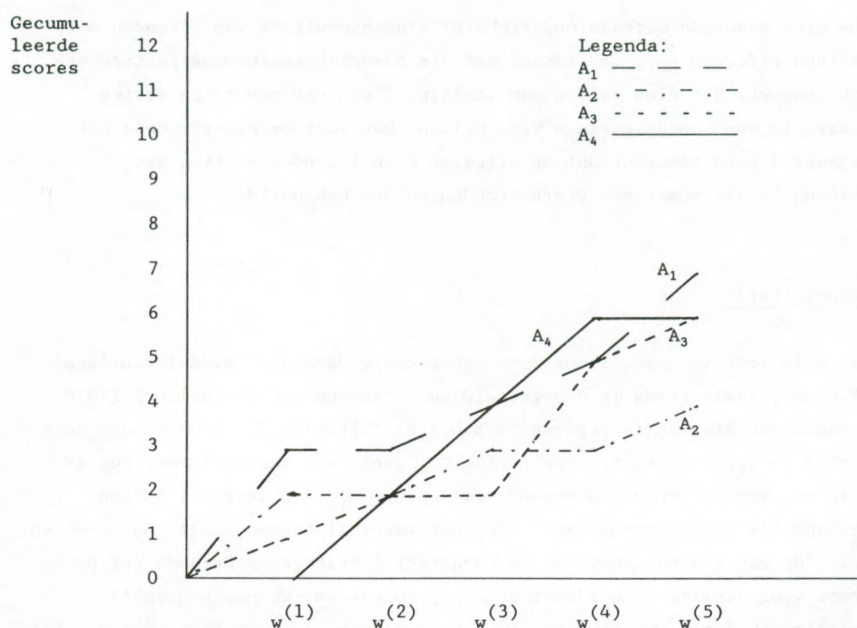
A_i is dominant ten opzichte van A_i' (notatie: $A_i > A_i'$) als $\sum_{k=1}^j (e_{ik} - e_{i'k}) \geq 0$ voor $j=1, \dots, J$ en het '>'-teken geldt voor minstens één j .

Vergeleken met definitie 1 is enkel 'sgn' weggelaten. Het gaat nu om de scores in de punten $w^{(j)}$. Dominantie betekent dan dat voor alle $w^{(j)}$ het ene alternatief minstens even hoog scoort als het ander, en één keer hoger.

Tabel 7. Cumulaties van puntscores

Alternatief	Criterium				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	3	3	4	5	7
A_2	2	2	3	3	4
A_3	1	2	2	5	6
A_4	0	2	4	6	6

Figuur 5. Cumulatielijnen van de vier alternatieven



In figuur 5 of tabel 7 nemen we twee dominanties waar, namelijk $A_1 > A_2$ en $A_1 > A_3$. Er geldt niet meer dat $A_2 > A_3$ vanwege het grote verschil in puntscore op C_4 . De scores S_i zijn nu gelijk aan respectievelijk 2, -1, -1 en 0. De stellingen 1 tot en met 4 zijn alle geldig. Zo geldt nog steeds dat de dominantierelaties voor de hoekpunten van W ook voor de overige punten van W gelden. Een verschil met de vorige twee paragrafen is dat in figuur 5 snijpunten tussen $w^{(j)}$ en $w^{(j+1)}$ kunnen voorkomen. Dit is het geval bij de alternatieven A_2 en A_3 tussen $w^{(3)}$ en $w^{(4)}$. Voor het opsporen van dominantierelaties over W kan men desondanks volstaan met vergelijking in de punten $w^{(1)}, \dots, w^{(j)}$. Stelling 5 geldt omdat we veronderstellen dat het toevoegen van een alternatief geen invloed heeft op de scores van de oude alternatieven. Stelling 5 zou niet meer gelden, indien men veronderstelt dat een toe te voegen alternatief invloed heeft op alle hogere (rang-)scores, die diens rang 1 hoger worden; gesteld dat het toegevoegde alternatief

Tabel 9. Cumulaties van gedummificeerde tabel

Alternatief	Criterium											
	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{31}	C_{32}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{51}	C_{52}
A_1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	7
A_2	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4
A_3	1	1	1	2	2	2	2	3	4	5	6	6
A_4	0	0	0	1	2	3	4	5	6	6	6	6

In tabel 9 zijn gecumuleerde scores gegeven voor de twaalf criteria. De kolommen 3, 5, 7, 10 en 12 zijn tezamen identiek aan tabel 7. Voor de dominantie-relaties behoeven we slechts deze vijf kolommen te beschouwen. De ordening van de gewichten van de criteria $C_{j1}, \dots, C_{jk}$ binnen het oorspronkelijke criterium C_j heeft derhalve geen invloed op de dominanties.

Het bovenstaande toont een verband tussen de *mdpv* en de puntscore-methode. Als we bij het dummificeren de volgorde van de oorspronkelijke criteria handhaven dan is het toepassen van de *mdpv* op de gedummificeerde tabel identiek aan de puntscore-methode. Zij leveren dezelfde dominanties op en derhalve dezelfde scores S_1 . Deze identiteit lukte overigens bij onze manier van het bepalen van puntcores; de puntcores waren equidistant; bijvoorbeeld voor C_5 werden niet de scores 3, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 0 genomen, maar 2, 1, 1, 0. De toepassing van de *mdpv* op een gedummificeerde tabel is trouwens niet specifiek voor puntcores. Wanneer de scores van de vier alternatieven op C_5 in de numerieke vorm (4,1,1,0) zouden zijn gegeven, dan leverde dummificeren de criteria $C_{51}=(1,1,1,0)$ en $C_{52}=C_{53}=C_{54}=(1,0,0,0)$ op. Dominantie in de punten $w^{(j)}$, en dus in het gehele hypervlak W , voor de numerieke scores is dan identiek aan dominantie via de *mdpv* op de gedummificeerde tabel.

We gaan nu nader in op de gewichten. Een foute gedachte zou zijn dat wanneer een criterium C_j bij het dummificeren in vele criteria C_{jk} zou worden gesplitst de nieuwe gewichten w_{jk} alle veel kleiner zouden moeten worden. De gewichten zijn namelijk niet los te zien van de spreiding in de effecten per criterium. Bij de *mdpv* en de puntscore-methode had C_1 (evenals

C_4) een grote spreiding. In tabel 9 wordt deze grotere spreiding omgezet in het hebben van meer dummies dan de overige criteria. Alle drie criteria C_{11} , C_{12} en C_{13} krijgen een hoge weging, omdat de spreiding in deze criteria niet groot is ten opzichte van de andere criteria. Er moet dus gelden dat $w_{11}+w_{12}+w_{13}$ groter is dan w_1 in de vorige paragraaf om ervoor te zorgen dat het oorspronkelijke criterium C_1 ook na dummificeren het belangrijkste blijft. De duidelijke afhankelijkheid tussen w_j en de spreiding in de effecten e_{1j} van C_j benadrukt overigens hoe moeilijk het is om gewichten te bepalen, zelfs wanneer alleen een ordening is vereist. Dit geldt overigens voor vrijwel alle MCA-methoden. Komen echter alleen binaire effecten voor, zoals bij het dummificeren, dan zijn de gewichten altijd eenvoudig te interpreteren als het belang dat wordt gehecht aan het verschil tussen hoog en laag op het (sub-) criterium.

We hebben de redelijkheid getoond om er voor te zorgen dat $w_{11}+w_{12}+w_{13}$ groter is dan w_1 . De methode van dummificatie biedt mogelijkheden om verschillende gewichten w_{11} , w_{12} en w_{13} te kiezen, in principe zelfs zodanig dat bijvoorbeeld w_{12} kleiner is dan w_{jk} voor een zeker criterium C_{jk} met $j \neq 1$. Men kan bijvoorbeeld vinden dat het voor C_1 vooral van belang is dat het alternatief tenminste '+++' scoort. In dat geval wordt C_{12} een groot gewicht gegeven. Een dergelijke aanpak laat zich overigens vertalen in numerieke scores op C_1 . Kennelijk komt een effectenvector $e_j = (4, 3, 1, 0)'$ meer met de wensen van de onderzoeker overeen dan $e_j = (3, 2, 1, 0)'$. De geconstateerde identiteit met de punt-score-methode geldt wanneer we voor ieder subcriterium C_{jk} het verschil tussen hoog en laag belangrijker achten dan voor $C_{(j+1)1}$, of, anders gezegd, wanneer voor alle j een verschil van 1 punt op criterium C_j belangrijker wordt geacht dan een verschil van 1 op criterium C_{j+1} . Per criterium C_j is de volgorde van w_{jk} niet van belang voor de methode!

Voor alle behandelde situaties is een somscore S_i voor alternatief A_i gedefinieerd als het verschil van het aantal keren dat A_i een ander alternatief domineert en het aantal keren dat A_i gedomineerd wordt. Slechts indien aan de transitiviteit van de dominantie-relatie is voldaan bepalen de scores een partiële ordening. Voor binaire data is hieraan altijd voldaan. Bij ordinale data is hier slechts aan voldaan bij het gebruik van

puntscores, en niet bij de *mdpv*. Dit hangt samen met het feit dat bij binaire data en bij het gebruik van puntscores effecten e_{ij} zijn gedefinieerd, en dientengevolge ook gecumuleerde scores $\sum_{k=1}^j e_{ik}$ in de punten $w^{(j)}$. Voor deze gevallen kunnen daardoor alle alternatieven in één figuur worden geplaatst. Men kan ook zeggen dat het bij de puntscore-methode lukt, aangezien bij deze methode de scores via het dummificeren tot binaire data zijn terug te voeren. Bij de *mdpv* is dit niet mogelijk.

7. Tevredenheid over auto-eigenschappen

In de Consumentengids van januari 1985 staat een 51x14-tabel met tevredenheidsscores voor 51 autotypen op 14 criteria. Mogelijke scores waren '+', '.', en '-', die respectievelijk staan voor 'tevredener dan gemiddeld', 'gemiddeld tevreden' en 'minder tevreden dan gemiddeld'. In tabel 10 is de tabel uit de Consumentengids weergegeven met verwisseling van de kolommen. Deze zijn namelijk geordend naar afnemende belangrijkheid volgens het oordeel van de tweede auteur van dit rapport, waarbij het verschil tussen '+' en '.' en tussen '.' en '-' per criterium groter wordt geacht naarmate het criterium eerder in de rangorde voorkomt. Dit betekent dat de volgorde van de subcriteria na het dummificeren van de tabel overeenkomt met de volgorde in tabel 10. De 14 criteria zijn respectievelijk:

- C₁. Gedrag in bochten natte weg
- C₂. Gedrag in bochten droge weg
- C₃. Roestwering laklaag
- C₄. Roestwering chroomdelen
- C₅. Lawaai in de auto
- C₆. Zijwindgevoeligheid
- C₇. Stuurprecisie
- C₈. Zitcomfort voor
- C₉. Zitcomfort achter
- C₁₀. Verwarming
- C₁₁. Ventilatie
- C₁₂. Dashboard
- C₁₃. Bedieningsgemak pedalen
- C₁₄. Bedieningsgemak versnelling

De ordening was reeds voor de vorstperiode vastgesteld, vandaar dat het criterium 'verwarming' slechts op de tiende plaats komt.

We hebben op tabel 10 de puntscore-methode van paragraaf 5 toegepast, welke methode onder de gedane veronderstellingen overeenkomt met de methode van dummificeren uit paragraaf 6. Voor liefst 1012 van de 1275 paren bestaan dominantie-relaties. Op grond van deze dominanties zijn de scores S_i berekend voor de 51 alternatieven, en op grond hiervan zijn de score-permutaties bepaald. In tabel 11 worden de gegevens van tabel 10 opnieuw getoond, doch nu met de auto's A_i geordend naar hun scores S_i . De eerste kolom bevat het nummer van de auto uit tabel 10 en de laatste kolom bevat de scores S_i . Autonummer 10, de Ford Escort, blijkt dominant te zijn ten opzichte van alle andere auto's en scoort dan ook 50 punten. Autonummer 42, de Toyota Corolla, scoort erg laag omdat het juist op de belangrijkste criteria negatief scoort.

We hebben ter vergelijking ook de *mdpv* van paragraaf 4 op tabel 10 toegepast, en daarbij de volgorde der criteria ongemoeid gelaten. Er vinden nu 999 dominanties plaats. Zowel de score-permutatie als de scores zelf blijken sterk overeen te komen. Dit is overigens een simpel gevolg van het feit dat zes van de 14 criteria, waaronder de belangrijkste twee criteria, binair zijn en de overige acht criteria slechts drie mogelijkheden hebben. In het geval van meer subcriteria per oorspronkelijk criterium zullen de verschillen groter kunnen zijn.

TABLE 2. TYPEDRUGS OVER AUTO-EIGENVALUES

[illegible]

Tenslotte dit: de volgorde van de criteria is een subjectieve zaak. In het bovenstaande voorbeeld was de volgorde bepaald door de tweede auteur van dit rapport ('de beoordelaar'). De hieruit volgende rangorde van auto's (zie tabel 11) is dus niet noodzakelijk relevant voor andere personen. Sterker nog: aangezien een aantal aspecten (met name prijs en uiterlijk van de auto) niet in de beoordeling betrokken was, bleek onze beoordelaar de nummer 1 auto (Ford Escort) maar een matige keus te vinden. Misschien dat dit (mogelijk ten overvloede) de relativiteit van multicriteria methoden nog eens mag onderstrepen.

Literatuur

- COBA, 1982, Evaluatiemethoden, een introductie. Rapport van de Werkgroep Evaluatiemethoden van de Commissie voor de Ontwikkeling van Beleids-Analyse (Staatsuitgeverij, 's-Gravenhage).
- Consumentenbond, 1985, De ene auto laat u vaker in de steek dan de andere. Consumentengids, jaargang 33, no. 1, pp. 4-6.
- Hinloopen, E. en P. Nijkamp, 1982, Discussienota over een nieuwe multicriteria-methode: de Regime-methode.
- Hinloopen, E. en P. Nijkamp, 1986, De regime-methode voor ordinale multicriteria analyses. Kwantitatieve Methoden, te verschijnen.
- Mastenbroek, A.P. en J.H.P. Paelinck, 1976, Multiple criteria decision making: Information exhaustion, uncertainty and non-linearities. NEI Series: Foundations of empirical economic research, 1976/4 (Rotterdam).
- Paelinck, J.H.P., 1975, Qualitative multiple-criteria analysis, environmental protection and multiregional development. NEI Series: Foundations of empirical economic research, 1975/10 (Rotterdam).
- Paelinck, J.H.P., 1976, Beslissingen op grond van verscheidene criteria bij zuiver kwalitatieve informatie. Economische Statistische Berichten 3043.