

HET KALMANFILTER IN DE ECONOMETRIE: EEN LITERATUUROVERZICHT

T.J. Mourik¹

De laatste jaren kan in de econometrie een toenemend gebruik van de Kalmanfilter-techniek worden gesignaleerd. Toepassingen ten behoeve van b.v. het schatten van lineaire modellen met tijdsafhankelijke coëfficiënten, decompositie van tijdreeksen en het schatten van ontbrekende waarnemingen hebben plaatsgevonden. Dit artikel voorziet in een beschrijving van de methode in ruime zin en brengt ter illustratie enige in de literatuur verschenen toepassingen onder de aandacht.

1. Inleiding en opzet

De Kalmanfilter-techniek is in het begin van de jaren zestig als onderdeel van de systeemtheorie ontwikkeld [Kalman (1960)]. Met name in de meet- en regeltechniek wordt er sindsdien intensief gebruik van gemaakt (bijvoorbeeld t.b.v. raketbesturing). De econometrie schenkt sinds enige jaren eveneens aandacht aan deze methode, die de volgende klasse modellen betreft²:

$$\begin{aligned} \underline{y}_t &= A_t \underline{\theta}_t + X_t \alpha + R_t \underline{v}_t \\ \underline{\theta}_t &= B_t \underline{\theta}_{t-1} + Z_t \gamma + S_t \underline{w}_t \end{aligned} \quad (1.1)$$

met

$\underline{y}_t, \underline{v}_t$	vectoren van de orde $M \times 1$
$\underline{\theta}_t, \underline{w}_t$	vectoren van de orde $N \times 1$
α, γ	vectoren van de orde $K \times 1$ resp. $L \times 1$
R_t	matrix van de orde $M \times M$
B_t, S_t	matrices van de orde $N \times N$
A_t	matrix van de orde $M \times N$
X_t, Z_t	matrices van de orde $M \times K$ resp. $N \times L$
$\underline{v}_t$ en $\underline{w}_t$	stochastische verstoringen
$E(\underline{v}_t) = 0_M, E(\underline{w}_t) = 0_N$ en $E \begin{bmatrix} \underline{v}_t \\ \underline{w}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_t \\ \underline{w}_t \end{bmatrix}' = \Omega_t$; 0_M en 0_N zijn nulvectoren van ordes $M \times 1$ resp. $N \times 1$ en Ω_t is een matrix van de orde $(N+M) \times (N+M)$	

¹ Afdeling Wetenschappelijk onderzoek en econometrie, De Nederlandsche Bank N.V., Postbus 98, 1000 AB Amsterdam, tel. 020-5242494. Ik ben Prof.dr. M.M.G. Fase, dr.Th.E. Nijman en een anonieme referee erkentelijk voor hun commentaar op een eerdere versie. Zij zijn echter niet mede-verantwoordelijk voor de inhoud.

² Stochasten worden in het vervolg door onderstreping onderscheiden.

De vergelijking voor de verklaring van de waarneembare y_t wordt de output- of meetvergelijking genoemd. De elementen van de niet waarneembare vector θ_t heten de "toestandsvariabelen" en worden door de zogenaamde transitie- of systeemvergelijkingen bepaald. De matrices X_t en Z_t representeren exogene variabelen, waaraan constante coëfficiënten zijn toegedacht.

Omdat model (1.1) kan worden gezien als een andere formulering van het lineaire dynamische model (waartoe o.m. de ARIMA- en transfermodellen behoren), wordt wel gesproken van de toestandsruimteform of Markoviaanse representatie hiervan³. Een meer concrete interpretatie brengt echter een groot aantal bijzondere toepassingsmogelijkheden aan het licht. Bestaat bijvoorbeeld de matrix A_t uit exogene variabelen, dan blijkt correspondentie met het lineaire regressiemodel. De toestandsvariabelen kunnen in dat geval immers worden gezien als (gedrags)coëfficiënten. Afhankelijk van de specificatie van de transitievergelijkingen kunnen deze evenwel al dan niet tijdsafhankelijk en stochastisch zijn. Een toestandsruimteform kan ook op een overzichtelijke manier worden gebruikt voor de decompositie van een tijdreeks in trend- en seizoencomponenten. Door een geschikte keuze van de rijen in A_t en B_t kunnen de betreffende toestandsvariabelen als zodanig worden geïnterpreteerd. Meer in het algemeen kunnen de toestandsvariabelen worden gebruikt voor de modellering van latente, d.i. niet waarneembare, variabelen.

Bij het schatten van modellen als (1.1) speelt het Kalmanfilter een cruciale rol. Men kan volstaan met deze methode, indien alleen de toestandsvector θ_t de onbekende parameters van het model bevat. A priori kennis omtrent met name de Ω_t 's is in de econometrie echter bijzonder ongebruikelijk. Het Kalmanfilter schiet derhalve als schattingsmethode voor econometrische modellen als (1.1) tekort. Voor econometristen is de methode dan ook voornamelijk interessant als hulpmiddel. Zo kan de likelihoodfunctie van de

³ Het is in specifieke gevallen niet altijd op voorhand duidelijk hoe deze andere formulering luidt. In dat geval kan een beroep worden gedaan op een algoritme uit de realisatietheorie [vgl. b.v. Otter (1984)]. In de systeemtheorie beschouwt men θ_t als de verzameling variabelen waarin alle informatie over het verleden van y_t is verwerkt. Akaike (1976) heeft in deze context een nieuwe identificatie- en schattingsprocedure gepresenteerd [zie ook Mehra (1982)], waarbij de canonieke correlatiemethode een belangrijke rol speelt.

verzameling y_t 's volgens (1.1) onder de normaliteitsveronderstelling worden geschreven in termen, die - gegeven waarden voor de niet in $\underline{x}_t$ opgenomen modelparameters - m.b.v. het Kalmanfilter berekend kunnen worden. Door de likelihoodfunctie iteratief naar de onbekenden te maximaliseren worden de maximum-likelihood-schattingen verkregen. Een tweede toepassing vindt plaats binnen het multi-state Kalmanfilter, waarvoor buiten de toestandsvector uitsluitend de variantie-covariantie-matrix van de storingen, Ω_t , onbekend mag zijn. Deze laatste methode kan worden beschouwd als de nabootsing van een "leerproces" waardoor systematische voorspelfouten worden voorkomen.

In het vervolg wordt zonder verlies van algemeenheid uitgegaan van een eenvoudig model uit de klasse modellen (1.1). Hoofdstuk 2 is gewijd aan het Kalmanfilter, welke in hoofdstuk 3 geplaatst wordt in de maximum-likelihood-context. Het multi-state Kalmanfilter komt in hoofdstuk 4 aan de orde. In deze hoofdstukken wordt ter illustratie nader ingegaan op enkele in de econometrie uitgevoerde toepassingen. Het geheel wordt afgesloten met samenvattende conclusies.

2. Het Kalmanfilter

2.1 Algemeen

Bij de meeste toepassingen zal er sprake zijn van de volgende vereenvoudigende restricties op het in de inleiding beschreven model (1.1):

$$R_t = I_M, \quad B_t = B, \quad \gamma = 0_L, \quad S_t = I_N, \quad \Omega_t = \Omega \text{ en } E(\underline{v}_{it}\underline{w}_{jt}) = 0 \quad (\forall i, j, t)$$

Model (1.1) wordt dan:

$$\begin{aligned} \underline{y}_t &= A_t \underline{\theta}_t + X_t \alpha + \underline{v}_t \\ \underline{\theta}_t &= B \underline{\theta}_{t-1} + \underline{w}_t \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{met } E \begin{bmatrix} \underline{v}_t \\ \underline{w}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_t \\ \underline{w}_t \end{bmatrix}' = \Omega = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \text{ en } {}^4 \begin{bmatrix} \underline{v}_t \\ \underline{w}_t \end{bmatrix} = N(0, \Omega)$$

⁴ Dit is voor de afleiding van de formules niet noodzakelijk, maar het stelt de gebruiker in staat om hypothesen te toetsen.

Voor toepassing van het Kalmanfilter⁵ mogen uitsluitend de toestandsvariabelen $\underline{\theta}_t$ - en niet de vector α noch de matrices A_t , X_t , B en Ω - onbekend zijn. De term $X_t \alpha$ is alleen vanwege de in het volgende hoofdstuk aan de orde komende theorie toegevoegd. In speciale gevallen gelden m.b.t. Ω iets minder strenge eisen. Hieraan wordt zeker voldaan indien $\underline{y}_t$ univariaat is. De veronderstellingen betreffen in dit geval de verhoudingen W/σ_v^2 (de hoofd-diagonaal-elementen van W/σ_v^2 worden de "signal-to-noise ratio's" genoemd, zie paragraaf 3.3).

M.b.v. het Kalmanfilter kunnen in feite meerdere schattingen voor dezelfde grootheden worden berekend. Deze verschillen in de hoeveelheid informatie die is verwerkt: een berekende waarde voor $\underline{\theta}_t$, $\underline{y}_t$, $\text{var}(\underline{\theta}_t)$ of $\text{var}(\underline{y}_t)$ kan worden verkregen op basis van de waarnemingen voor de tijdstippen tot en met $t-1$ (of eerder), tot en met t of tot en met $T \geq t$ (eventueel gelijk aan het totale aantal beschikbare waarnemingen). Hiervoor worden respectievelijk de namen priori-, posteriori- en gladgestreken schattingen gebezigd. Deze schattingen zijn gelijk aan de conditionele verwachtingen en varianties. Dit verklaart dat - gegeven de informatie waarover geconditioneerd is en gegeven de juistheid van de veronderstellingen - de schattingen voor $\underline{\theta}_t$ en $\underline{y}_t$ de best mogelijke zijn uit de klasse van lineaire zuivere schatters (in termen van gemiddelde gekwadrateerde fout). De varianties en covarianties van $\underline{\theta}_t$ en $\underline{y}_t$ worden onder dezelfde voorwaarden exact berekend door het Kalmanfilter. Een Bayesiaanse interpretatie van de methode is mogelijk [vgl. b.v. Harrison en Stevens (1971) en Otter (1978)], doch niet noodzakelijk. In het vervolg zal deze benadering dan ook niet worden nagevolgd.

2.2 De startwaarden

Startwaarden m.b.t. $\underline{\theta}_0$ moeten worden ingevoerd om het recursief werkende Kalmanfilter te kunnen initialiseren. In theorie moeten deze gelijk zijn aan de onconditionele verwachting ($\theta_{0|0}$) en variantie-covariantie-matrix ($P_{0|0}$). De veronderstellingen dat $\underline{\theta}_0$ en $\underline{y}_t$ resp. $\underline{w}_t$ ($\forall t$) ongecorrleerd zijn en dat $\underline{\theta}_0 \sim N(\theta_{0|0}, P_{0|0})$ zijn

⁵ Eigenlijk moet gesproken worden van het discrete Kalmanfilter. Er bestaat nl. ook een aangepaste versie voor modellen die in continue tijd zijn gedefinieerd. Bovendien bestaat er een vergelijkbare schattingstechniek voor bepaalde niet-lineaire modellen. Deze aanpak staat bekend als het "uitgebreide" Kalmanfilter en is gebaseerd op linearisatie van het model [vgl. Jazwinski (1970)].

vereist respectievelijk gebruikelijk. Overeenkomstig het gestelde in de vorige paragraaf m.b.t. Ω kan in speciale gevallen worden volstaan met een matrix $P_{0|0}$, die op schalingsfactoren na bekend is. Er kan onderscheid worden gemaakt tussen de gevallen dat $\underline{\theta}_t$ wel of niet stationair is verondersteld:

1. $\underline{\theta}_t = B\underline{\theta}_{t-1} + \underline{w}_t$ is een stationair proces, indien de eigenwaarden van B alle in absolute waarde kleiner zijn dan 1. Er bestaat in dit geval geen serieus startwaardenprobleem. Voor $\theta_{0|0}$ kan een willekeurige waarde worden gekozen, terwijl voor $P_{0|0}$ geldt:

$$P_{0|0} = BP_{0|0}B' + W$$

Deze vergelijking kan iteratief worden opgelost. De exacte oplossing luidt:

$$\text{vec}(P_{0|0}) = (I - B \otimes B)^{-1} \text{vec}(W)$$

met $\text{vec}(\cdot)$ de operator die aangeeft dat de kolommen van de matrix achter elkaar moeten worden gerangschikt tot een lange vector en $\otimes$ het Kronecker-symbool.

2. Als $\underline{\theta}_t = B\underline{\theta}_t + \underline{w}_t$ een niet-stationair proces is (b.v. als $B = I_N$), is het gebruikelijk om de nulvector te kiezen voor $\theta_{0|0}$ en de matrix κI_N met κ een groot getal te gebruiken voor $P_{0|0}$. De eerste waarnemingen moeten dan worden benut om de invloed van deze theoretisch niet correcte startwaarden uit te laten werken (aanlooperperiode)⁶. Afhankelijk van de toepassing kunnen de uitkomsten echter lange tijd gevoelig blijken te zijn voor de keuze van de startwaarden. Indien daarbij het aantal beschikbare waarnemingen gering is, is er sprake van een serieus startwaardenprobleem.

Is $W \neq 0$, dan kan tenslotte nog worden overwogen om $\underline{\theta}_0$ als niet-stochastisch te veronderstellen. In dat geval dient voor $P_{0|0}$ de nul-matrix te worden gekozen. De optimale waarde voor $\theta_{0|0}$ kan door toepassing van het maximum-likelihood-principe worden bepaald (zie de paragrafen 3.2 en 3.3).

⁶ Overigens zijn de uitkomsten volgens een stelling van Jazwinski (1970) in de limiet van $t \rightarrow \infty$ robuust tegen de keuze van de startwaarden. De schattingen zijn dan ook bij niet correcte startwaarden pas in deze limiet zuiver.

2.3 Priori- en posteriori-schattingen

De notatie I_t wordt in het vervolg gebruikt als aanduiding voor de informatie die aanwezig is in de waarnemingen $y_1, \dots, y_t$. De priori-schattingen (een-staps-vooruit-voorspellingen) luiden dan:

$$\theta_t|t-1 = E(\underline{\theta}_t|I_{t-1}) = B E(\underline{\theta}_{t-1}|I_{t-1}) = B \theta_{t-1}|t-1 \quad (2.2)$$

$$y_t|t-1 = E(\underline{y}_t|I_{t-1}) = A_t E(\underline{\theta}_t|I_{t-1}) + X_t \alpha = A_t \theta_{t-1}|t-1 + X_t \alpha \quad (2.3)$$

$$P_t|t-1 = \text{var}(\underline{\theta}_t|I_{t-1}) = B \text{var}(\underline{\theta}_{t-1}|I_{t-1}) B' + W = B P_{t-1}|t-1 B' + W \quad (2.4)$$

$$Q_t|t-1 = \text{var}(\underline{y}_t|I_{t-1}) = A_t \text{var}(\underline{\theta}_t|I_{t-1}) A_t' + V = A_t P_t|t-1 A_t' + V \quad (2.5)$$

Model (2.1) verklaart op voorhand deze formules. Duidelijk is dat de posteriori-schattingen $\theta_{t-1}|t-1$ en $P_{t-1}|t-1$ bekend moeten zijn. Voor $t=1$ komen deze overeen met de startwaarden. Indien de t^e waarneming voor $t>1$ beschikbaar is, volgen deze schattingen uit de zogenaamde "updating"-vergelijkingen [vgl. Duncan en Horn (1972)]:

$$\theta_t|t = E(\underline{\theta}_t|I_t) = \theta_{t-1}|t-1 + K_t e_t \quad (2.6)$$

$$y_t|t = E(\underline{y}_t|I_t) = A_t \theta_{t-1}|t-1 + X_t \alpha \quad (2.7)$$

$$P_t|t = \text{var}(\underline{\theta}_t|I_t) = (I_N - K_t A_t) P_{t-1}|t-1 \quad (2.8)$$

$$Q_t|t = \text{var}(\underline{y}_t|I_t) = A_t P_{t-1}|t-1 A_t' + V \quad (2.9)$$

met $K_t = P_{t-1}|t-1 A_t' Q_t^{-1}$ en $e_t = y_t - y_t|t-1$

Voor $t=1, \dots, T$ (T het totale aantal beschikbare waarnemingen) moeten (2.2) tot en met (2.9) worden uitgerekend. Eventueel kan door onderlinge substitutie volstaan worden met het gebruik van minder formules. Bij een multivariate $\underline{y}_t$ moet ten behoeve van de berekening van de matrix K_t , die in de literatuur bekend staat als de "Kalman gain", voor iedere t een matrix worden geïnverteerd⁷. Indien de matrices A_t en X_t in (2.1) onafhankelijk van t zijn en indien het paar matrices (A, B) voldoet aan de eisen van uniforme stochastische regelbaarheid en reconstrueerbaarheid [vgl. b.v. Chan et al. (1984)], dan convergeren de matrices $P_{t-1}|t-1$ en $P_t|t$ bij

⁷ Bij de enige in de handel zijnde routine voor Kalmanfiltering (FTKALM in IMSL) is het vanwege numerieke instabiliteit mogelijk dat berekende variantie-covariantie-matrices niet positief-definitief zijn. Er bestaan ook formuleringen van het Kalmanfilter, waarin deze matrices gefactoriseerd voorkomen [vgl. Bierman (1977)].

toenemende t naar een matrix P . In dit geval wordt gesproken van het "steady state" Kalmanfilter. Controle op convergentie kan aanleiding geven tot belangrijke besparingen in rekenwerk.

Posteriori-schattingen hebben een geringere gekwadraterde fout dan priori-schattingen. De informatie in waarneming y_t is immers toegevoegd aan de priori-schattingen middels de verwerking van de een-staps-vooruit-voorspelfout e_t . Opvallend is dat $P_t|t$ onafhankelijk is van e_t . De e_t 's voor $t=1, \dots, T$ zijn bij juiste modellering onderling onafhankelijk en kunnen worden gebruikt voor toetsing van het model [vgl. Watson (1983)]

Tot slot zij nog vermeld dat de formules voor de posteriori-schattingen $\theta_t|t$ en $y_t|t$ niet kunnen worden toegepast, indien de t^e waarneming en derhalve e_t niet beschikbaar is. Is de $(t+1)^e$ waarneming wel beschikbaar, dan kunnen de posteriori-schattingen voor $t+1$ berekend worden op basis van de twee-stappen-vooruit-voorspellingen $y_{t+1}|t-1$. De formules voor dit meer-stappen-vooruit-voorspellen luiden in het algemeen ($k=1, 2, \dots$):

$$\theta_{t+k}|t = E(\theta_{t+k}|I_t) = B^k \theta_t|t \quad (2.10)$$

$$y_{t+k}|t = E(y_{t+k}|I_t) = A_{t+k} \theta_{t+k}|t + X_{t+k} \alpha \quad (2.11)$$

$$P_{t+k}|t = \text{var}(\theta_{t+k}|I_t) = B P_{t+k-1}|t B' + W \quad (2.12)$$

$$Q_{t+k}|t = \text{var}(y_{t+k}|I_t) = A_{t+k} P_{t+k}|t A_{t+k}' + V \quad (2.13)$$

2.4 Gladgestreken schattingen

In termen van gemiddelde gekwadraterde fout zijn de beste schattingen voor tijdstip t die waarin ook de informatie $y_{t+1}, \dots, y_T$ is verwerkt. Deze gladgestreken waarden volgen uit het "fixed-interval", "fixed-point" of "fixed lag" recursieve schema [vgl. Anderson en Moore (1979)]. Deze leveren alle hetzelfde resultaat op. Eerstgenoemde methode is het meest gangbaar en werkt achterwaarts ($t=T-1, \dots, 1$):

$$\theta_t|T = E(\theta_t|I_T) = \theta_t|t + P_t|t B' P_{t+1}^{-1}|t (\theta_{t+1}|T - B \theta_t|t) \quad (2.14)$$

$$y_t|T = E(y_t|I_T) = A_t \theta_t|T + X_t \alpha \quad (2.15)$$

$$P_t|T = \text{var}(\theta_t|I_T) = P_t|t + P_t|t B' P_{t+1}^{-1}|t (P_{t+1}|T - P_{t+1}|t) P_{t+1}^{-1}|t B P_t|t \quad (2.16)$$

$$Q_t|T = \text{var}(y_t|I_T) = A_t P_t|T A_t' + V \quad (2.17)$$

De priori- en/of posteriori-schattingen m.b.t. alle $\underline{\theta}_t$'s moeten beschikbaar zijn, terwijl vereist is dat de priori-variantie-covariantie-matrices $P_{t|t-1}$ ($t=1, \dots, T$) regulier zijn. Indien een of meer waarnemingen ontbreken, bestaat de kans dat niet aan deze laatste voorwaarde wordt voldaan [vgl. Harvey en McKenzie (1983)]. Het meer rekenwerk vereisende, maar voorwaartse "fixed-point" algoritme biedt dan een oplossing ($k=1, \dots, T-t$):

$$\begin{aligned} \theta_{t|t+k} = E(\underline{\theta}_t | I_{t+k}) &= \theta_{t|t+k-1} + P_{t|t+k-1} A'_{t+k} \\ &\quad * (A_{t+k} P_{t+k|t+k-1} A'_{t+k} + V)^{-1} e_{t+k} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$y_{t|t+k} = E(y_t | I_{t+k}) = \theta_{t|t+k} + x_t \alpha \quad (2.19)$$

$$P_{t|t+k} = \text{var}(\underline{\theta}_t | I_{t+k}) = P_{t|t+k-1} (I_N - A'_{t+k} K'_{t+k}) \quad (2.20)$$

$$Q_{t|t+k} = \text{var}(y_t | I_{t+k}) = A_t P_{t|t+k} A'_t + V \quad (2.21)$$

Het "fixed-lag" schema kent geen specifieke voordelen.

2.5 Enige toepassingen

Illustratief is de toepassing op het GRECON-model [Tempelaar (1983) en De Jong et al. (1984)]. Hierbij is verondersteld dat de coëfficiënten in alle gedragsvergelijkingen niet constant zijn, maar een random walk-proces volgen ($\alpha=0$ en $B=I$). Alleen de storingen behorende bij de parameters uit eenzelfde gedragsvergelijking zijn onderling gecorreleerd. Als motivatie voor de niet-constante parameters wordt de mogelijkheid genoemd dat zich tijdens de oliecrises structurele veranderingen in de Nederlandse economie hebben voorgedaan. Per gedragsvergelijking is als volgt gehandeld:

1. Als startwaarden ($\theta_{0|0}$ resp. $P_{0|0}$) zijn de OLS-uitkomsten voor parameters en parameter-variantie-covariantie-matrix gekozen.
2. Als variantie-covariantie-matrix voor het multivariate random-walk-proces voor de parameters (W) is ook de variantie-covariantie-matrix van de OLS-parameters gebruikt.
3. Het Kalmanfilter is toegepast voor drie verschillende niveaus voor de variantie van de storingsterm in de outputvergelijking ($V = \sigma_v^2$).
4. Als uiteindelijk niveau voor deze variantie is gekozen voor die waarde, die de laagste waarde voor de som van de gekwadeerde een-staps-vooruit-voorspelfouten opleverde (dit criterium komt

niet overeen met het maximum-likelihood-principe, m.n. omdat deze voorspelfouten heteroskedastisch zijn; zie paragraaf 3.3).

Op deze wijze werd voor iedere gedragsvergelijking een "goede" waarde voor de variantie van de storingsterm $\underline{v}_t$ met daarbij behorende beloop in de tijd van de parameters gevonden. Met het aldus verkregen model zijn dynamische simulaties uitgevoerd, waarvan de resultaten zijn vergeleken met de uitkomsten volgens GRECON-83B (met constante 2SLS-parameters). Geconcludeerd werd dat variabele parameters de aanpassing aan het verleden en de voorspelkracht buiten de schattingsperiode duidelijk verbeteren⁸.

Ondanks deze positieve conclusie is de gehanteerde werkwijze erg onbevredigend. Ter bepaling van de σ_v^2 's is slechts zeer globaal geroosterd (3 punten). De variantie-covariantie-matrix van het random walk-proces (W) is daarentegen vastgeprikt. Vergelijkbare bezwaren kunnen worden aangevoerd tegen studies betreffende een investeringsfunctie voor de VS [Otter (1978)], de aanbodfuncties van enerzijds Fair en anderzijds Sargent [McNelis en Neftci (1982)] en de Amerikaanse papier- en pulpmarkt [Baudin et al. (1984)]. Zij zijn te ondervangen door voor de niet in de toestandvector opgenomen onbekenden de maximum-likelihood-schattingen te gebruiken.

3. Het Kalmanfilter en maximum-likelihood

3.1 Algemeen

In dit hoofdstuk wordt eveneens uitgegaan van model (2.1). Naast de toestandvector $\underline{\theta}_t$ mogen echter ook de matrices A_t , B en Ω en de parametervector α onbekende elementen bevatten [vgl. Harvey(1981)].

Voor de likelihoodfunctie van T waarnemingen $y_1, y_2, \dots, y_T$ geldt na herhaalde toepassing van de formule van Bayes ($I_t = (y_1, \dots, y_t)$):

$$L(y_1, \dots, y_T) = p(y_1, \dots, y_T) = \prod_{t=2}^T p(y_t | I_{t-1}) * p(y_1)$$

Dit wordt de "voorspelfouten-decompositie" van de likelihoodfunctie genoemd. De loglikelihood bij model (2.1) kan derhalve worden

⁸ Vanwege de simultaneïteit van het model zijn tevens een "two-stage" en "three-stage" variant van het Kalmanfilter toegepast [vgl. Brännas (1980)]. De resultaten en daarmee de conclusies verschilden niet veel.

geschreven als:

$$\log L = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{ \log |Q_t|_{t-1}| + e_t' Q_t^{-1} e_t \} \quad (3.1)$$

De functiewaarde kan m.b.v. het Kalmanfilter worden berekend voor gegeven waarden voor de niet in de toestandsvector opgenomen onbekenden. De maximum-likelihood-schattingen worden iteratief gevonden door de loglikelihood hiernaar te maximaliseren. Bij ontbrekende waarnemingen moeten de desbetreffende termen uit (3.1) worden weggelaten. De termen betreffende de eerstvolgende wel beschikbare waarnemingen moeten worden berekend uit de meer-stappen-voortuit-voorspellingen [vgl. Jones (1980), Harvey en Pierse (1984) en Nijman (1985)]. De eerste afgeleiden zijn gelijk aan de som van termen, die eveneens recursief kunnen worden berekend [vgl. Harvey en McKenzie (1983)]. Bevatten de matrices in (2.1) veel nullen, enen en min-enen, dan kan een belangrijke besparing in rekenkosten worden verkregen, wanneer hier expliciet rekening mee wordt gehouden [vgl. Kooiman (1984)]. Zoals reeds in paragraaf 2.3 is gesteld kan in voorkomende gevallen eveneens bespaard worden door te controleren op convergentie van de matrix $P_{t|t-1}$.

Met betrekking tot de startwaarden kan een nog niet behandelde procedure worden nagevolgd. In speciale gevallen, w.o. de situatie dat y_t univariaat is, zijn numerieke vereenvoudigingen mogelijk.

3.2 De startwaarden

Een stationaire Θ_t levert geen startwaardenprobleem op, omdat de matrix $P_{0|0}$ dan exact berekend kan worden. Dit moet echter iedere iteratie gebeuren als de matrix V onbekend is. Is bovendien de matrix B niet (geheel) bekend, dan moet zelfs iedere iteratie op stationariteit worden gecontroleerd. Bij een niet-stationaire Θ_t zouden de eerste termen uit de loglikelihood kunnen worden weggelaten, maar het tijdstip waarop de schattingen tamelijk onafhankelijk van de startwaarden zijn, is niet alleen afhankelijk van de toepassing, maar kan ook sterk afhankelijk zijn van de iteratie. Dit startwaardenprobleem kan, mits $W \neq 0$, worden voorkomen door te veronderstellen dat alleen Θ_0 niet stochastisch is, zodat $P_{0|0}$ gelijk is aan de nul-matrix [vgl. Rosenberg (1973), Harvey en McKenzie (1983)].

Het Kalmanfilter met als startwaarden $\theta_0^* = 0$ en $P_{0|0} = 0$ produceert iedere iteratie de een-staps-vooruit-voorspelfouten $e_1^*, \dots, e_T^*$. De bij de optimale startwaarde $\theta_0 = \theta_0^* + \theta_0$ behorende voorspelfouten kunnen als volgt worden geschreven ($t=1, \dots, T$):

$$e_t = e_t^* - A_t G_{t-1} \theta_0 \quad (3.2)$$

met $G_t = B(I_N - K_t A_t) G_{t-1}$ en $G_0 = B$

Aangezien de variantie-covariantie-matrices van θ_t en y_t bij beide filters gelijk aan elkaar zijn, geeft invulling van deze voorspelfouten in de loglikelihood (3.1), differentiatie naar θ_0 en gelijkstelling aan 0:

$$\hat{\theta}_0 = \left\{ \sum_{t=1}^T G_{t-1}' A_t' Q_t^{-1} |_{t-1} A_t G_{t-1} \right\}^{-1} * \sum_{t=1}^T G_{t-1}' A_t' Q_t^{-1} |_{t-1} e_t^* \quad (3.3)$$

M.b.v. deze expressie kan θ_0 uit de loglikelihood worden geconcentreerd:

$$\begin{aligned} \log L^* = & -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{ \log |Q_t|_{t-1}| + \\ & + e_t^{*'} Q_t^{-1} |_{t-1} e_t^* - \hat{\theta}_0' G_{t-1}' A_t' Q_t^{-1} |_{t-1} e_t^* \} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dit is de exacte loglikelihood, indien de toestandsvector uitsluitend op $t=0$ niet stochastisch is (verondersteld).

3.3 Speciale gevallen

Er kan volstaan worden met het maximaliseren van de naar V geconcentreerde loglikelihood, indien

- y_t univariaat is ($M=1$)
- y_t multivariaat is met V een diagonaalmatrix en A_t , B en W blok-diagonaal met het aantal blokken gelijk aan de dimensie van $y_t(M)$.

De formules voor de maximum-likelihood-schattingen van de M onbekenden uit V zijn dan bekend. Dit wordt in het navolgende aangetoond voor het geval dat y_t univariaat is.

Schrijf $W = \sigma_v^2 \bar{W}$ en $P_0|0 = \sigma_v^2 \bar{P}_0|0$ met $\bar{W}$ en $\bar{P}_0|0$ matrices van de orde $N \times N$. De priori-variantie-covariantie-matrices van $\underline{\theta}_t$ en $\underline{y}_t$ luiden dan:

$$P_{t|t-1} = \sigma_v^2 \bar{P}_{t|t-1} = \sigma_v^2 (B \bar{P}_{t-1|t-1} B' + \bar{W}),$$

$$Q_{t|t-1} = \sigma_v^2 \bar{Q}_{t|t-1} = \sigma_v^2 (A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1)$$

In deze notatie blijkt σ_v^2 als aparte factor in de formules voor $P_{t|t-1}$ en $Q_{t|t-1}$ te verschijnen. Van groot belang is dat deze factor verdwijnt uit de formules voor de posteriori-schattingen $\theta_{t|t}$ en $y_{t|t}$ (zie (2.6) en (2.7)). Kennis van $\bar{W}$, $\theta_0|0$ en $\bar{P}_0|0$ - gegeven waarden voor de overige niet in de toestandsvector opgenomen onbekenden - is daarom voldoende om de Kalmanfilterschattingen, op een schalingsfactor σ_v^2 voor de varianties na, te kunnen berekenen.

De loglikelihood (3.1) wordt nu

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \left(\sum_{t=1}^T \log \{ \sigma_v^2 (A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1) \} \right. \\ & \left. + \sum_{t=1}^T e_t^2 / \{ \sigma_v^2 (A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1) \} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Maximalisatie van deze functie naar σ_v^2 geeft:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2 / (A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1) \quad (3.6)$$

Invulling van deze laatste formule in (3.5) levert de naar σ_v^2 geconcentreerde loglikelihood op:

$$\log L_c = C - \frac{T}{2} \log \hat{\sigma}_v^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log (A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1) \quad (3.7)$$

met $C = -\frac{T}{2} \log 2\pi - T/2$. Wordt bovendien θ_0 constant verondersteld, dan geldt analoog aan het gestelde in de vorige paragraaf:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0 &= \left\{ \sum_{t=1}^T G_{t-1}' A_t' A_t G_{t-1} \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T G_{t-1}' A_t' e_t^* \\ \hat{\sigma}_v^{2*} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{e_t^{*2} - e_t^{*} A_t G_{t-1} \hat{\theta}_0}{A_t \bar{P}_{t|t-1} A_t' + 1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Deze schattingen voor θ_0 en σ_v^2 volgen uit het Kalmanfilter met startwaarden $\theta_0|0 = 0$ en $\bar{P}_0|0 = 0$. De naar θ_0 en σ_v^2 geconcentreerde loglikelihood is in dit geval gelijk aan (3.7), met dien verstande dat de term $\hat{\sigma}_v^2$ vervangen moet worden door $\hat{\sigma}_v^{2*}$.

3.4 Enige toepassingen

Ter herinnering zij nogmaals gezegd dat een lineair dynamisch model in toestandsruimteform kan worden herschreven. De in dit hoofdstuk beschreven methode heeft dan ook met name bekendheid gekregen door toedoen van Harvey en Phillips (1979), die op deze wijze de loglikelihood van een univariaat ARMA-model hebben berekend. Gardner et al. (1980) hebben hiervoor programmatuur gepubliceerd.

Eveneens is reeds gesteld dat de methode interessant is voor het schatten van trend- en seizoencomponenten in een reeks. Harvey en Todd (1983) hebben hiervoor het door hen genoemde "basic structural model" voor een niet-stationaire reeks onder de aandacht gebracht⁹:

$$y_t = \theta_{1t} + \theta_{3t} + v_t$$

$$\theta_{1t} = \theta_{1t-1} + \theta_{2t-1} + w_{1t}$$

$$\theta_{2t} = \theta_{2t-1} + w_{2t}$$

$$\theta_{3t} = -\sum_{j=1}^{s-1} \theta_{3t-j} + w_{3t}$$

Alle stochasten zijn univariaat. θ_{1t} stelt de (tweede-orde niet-stationaire) trend voor. θ_{3t} is de seizoencomponent met s het aantal te onderscheiden seizoenen¹⁰. De storingsen zijn onderling ongecorreleerd verondersteld. Van de signal-to-noise ratio's σ_w^2 / σ_v^2 ($i=1,2,3$) moeten de maximum-likelihood-schattingen worden berekend. Dit model komt overeen met een ARIMA(0,2,s+2)x(0,1,0)-model onder $s-2$ niet-lineaire restricties.

⁹ Dit model kan overigens ook m.b.v. het EM-algoritme of m.b.v. methoden uit het frequentiedomein worden geschat [vgl. Harvey en Peters (1984)].

¹⁰ Achter de laatste vergelijking volgen voor de volledigheid nog $\theta_{3t-j} = \theta_{3t-j}$ ($j=1, \dots, s-1$). De grootte van s is niet van belang voor het aantal modelonbekenden, maar wel voor de dimensies van de vectoren en matrices in de Kalmanfilter-vergelijkingen. De schrijvers hebben ook andere mogelijkheden voor de specificatie van het seizoenpatroon genoemd [vgl. ook Harvey (1984)].

Gersch en Kitagawa (1983) onderzochten een hele klasse modellen: een AR(p)-component is toegevoegd en de trend is gespecificeerd als een niet-stationair proces van op voorhand onbekende orde. Ook de AR-parameters zijn geschat. Voor verscheidene economische tijdreeksen is naar het beste model gezocht, echter met als enig criterium Akaike's AIC¹¹. De schrijvers concludeerden dat de ruimere specificatie met name tot een gladder beloop van de trendcomponent leidt. Tevens bleek dat, wanneer op vergelijkbare wijze per reeks gezocht wordt naar het model dat de beste twaalf-stappen-voorspellingen genereert¹², andere optimale modellen resulteren.

De Vos (1983) schatte een vergelijking voor de Nederlandse girale tegoeden. Hij ging uit van een eerste-orde niet-stationaire trend ($\theta_{-2t} = 0$ in het structurele basismodel), seizoencomponenten (als in het basismodel) en als waarneembare verklarende variabelen een inkomens- en een rentevariabele (zowel de actuele waarden als enige vertragingen) met constante coëfficiënten. Van deze coëfficiënten (α) en van de signal-to-noise ratio's zijn de maximum-likelihood-schattingen berekend. Deze benadering wijkt dus af van de conventionele aanpak door de opname van als toestandsvariabelen gemodelleerde trend- en seizoeninvloeden.

Nijman en Palm (1984) hebben als volgt voor enkele variabelen uit het KOMPAS-submodel voor de arbeidsmarkt kwartaalcijfers uit jaartotalen geconstrueerd:

1. een lineair model voor de jaartotalen is geschat
2. een hiermee consistent model voor de kwartaalcijfers is bepaald
3. dit laatste model is herschreven in toestandsruimteform en geschat m.b.v. het Kalmanfilter (m.b.v. meer-stappen-voorspellingen) in de context van maximum-likelihood
4. de berekende waarden voor de outputvariabele zijn glad gestreken ten einde de beste schattingen van de tussenliggende niet-waarneembare kwartaalcijfers te verkrijgen.

¹¹ AIC = $-2\log L + 2k$ met k het aantal te schatten parameters. Dit criterium is vergelijkbaar met de voor vrijheidsgraden gecorrigeerde R^2 bij regressie.

¹² Door het maximaliseren van $\prod_{t=13}^T p(y_t | I_{t-12})$ m.b.v. (2.10) t.m. (2.13).

4. Het multi-state Kalmanfilter

4.1 Algemeen

Het toestandsruimtemodel (2.1) kan ook met behulp van het multi-state Kalmanfilter geschat worden. De matrices uitgezonderd Ω moeten daarvoor evenwel bekend zijn, terwijl eventuele exogenen niet middels X_t , maar middels A_t moeten worden gemodelleerd.

Verondersteld wordt dat de waarneembare vector y_t zich in één van een te kiezen aantal (K) verschillende overigens niet-waarneembare toestanden (de "states") kan bevinden. Tussen twee opeenvolgende tijdstippen kan sprake zijn van een overgang naar een andere toestand. Iedere toestand wordt gekarakteriseerd door een andere waarde voor de variantie-covariantie-matrix, Ω , van de storingen. De volgende K modellen worden derhalve naast elkaar beschouwd:

$$\begin{aligned} y_t^{(i)} &= A_t \theta_t^{(i)} + v_t^{(i)} \\ \theta_t^{(i)} &= B \theta_{t-1}^{(i)} + w_t^{(i)} \end{aligned} \quad i=1, \dots, K \quad (4.1)$$

$$\text{met } \begin{bmatrix} v_t^{(i)} \\ w_t^{(i)} \end{bmatrix} \approx N(0, \Omega^{(i)}), \quad \Omega^{(i)} = \begin{bmatrix} v^{(i)} & 0 \\ 0 & w^{(i)} \end{bmatrix} \text{ en } E \begin{bmatrix} v_t^{(i)} \\ w_t^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t^{(j)} \\ w_t^{(j)} \end{bmatrix}' = 0 \quad (v_t, i \neq j).$$

$\theta_t^{(i)}$ dient als notatie voor de stochast θ_t , conditioneel op de voorwaarde dat op tijdstip t toestand i van kracht is, of, anders geformuleerd, dat het i^e model uit (4.1) het correcte model is voor tijdstip t . De verzameling $\Omega^{(i)}$'s moet worden opgevat als een raster voor de gehele ruimte van mogelijke waarden. Het multi-state Kalmanfilter houdt in dat de schattingen voor de θ_t 's en de y_t 's (en hun varianties) berekend worden uit de Kalmanfilter-resultaten voor de afzonderlijke modellen [vgl. Harrison en Stevens (1971), Bär (1980) en Kool (1981)].

4.2 De oorspronkelijke gedachte

Verwachtingsvariabelen worden vaak univariaat op adaptieve wijze geconstrueerd overeenkomstig de ARIMA (0,1,1)-specificatie:

$$y_t = y_{t-1} + a_t - \lambda a_{t-1} = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} y_{t-i} + a_t \quad -1 < \lambda < 1 \quad (4.2)$$

Een nadeel van deze methode is dat λ constant is verondersteld,

waardoor systematische voorspelfouten mogelijk zijn. Daar komt nog bij dat bij toepassing van een conventionele schattingsmethode de resulterende verwachting voor y_t met t gelijk aan een tijdstip uit de schattingsperiode mede gebaseerd is op informatie die op dat tijdstip in feite nog niet beschikbaar was. Strikt genomen kan aan zo'n verwachte waarde geen economische betekenis worden toegekend.

Beschouw nu ($\underline{v}_t$ en $\underline{w}_t$ ongecorreleerd):

$$\begin{aligned}\underline{y}_t &= \underline{\theta}_t + \underline{v}_t \\ \underline{\theta}_t &= \underline{\theta}_{t-1} + \underline{w}_t\end{aligned}\tag{4.3}$$

Tussen λ en σ_a^2 in model (4.2) en σ_v^2 en σ_w^2 in model (4.3) bestaat een unieke correspondentie. Veronderstellen we echter een raster van mogelijke waarden voor σ_v^2 en σ_w^2 en berekenen we de verwachte waarde voor tijdstip t als een met tijdsafhankelijke wegingscoëfficiënten gewogen gemiddelde van de bij elk rasterpunt behorende Kalmanfilterschattingen $y_{t|t-1}^{(1)}$, dan hebben we a.h.w. een tijdsafhankelijke λ gemodelleerd. Deze verwachting is bovendien alleen op de informatie uit de waarnemingen tot en met tijdstip $t-1$ gebaseerd.

Uitgaande van (4.3) kunnen drie verschillende toestanden worden onderscheiden:

	σ_v^2	σ_w^2
1. geen verandering	normaal	0
2. permanente niveau-mutatie	normaal	groot
3. uitschieter	groot	0

Een voorspeller kent kansen toe aan elk van deze mogelijkheden. Als waarneming y_t beschikbaar is gekomen, kan hij een oordeel uitspreken over de toestand van waarneming y_{t-1} en zal hij zijn kansen (de gewichten) in meer of mindere mate aanpassen. De hierboven met "groot" aangeduide varianties bepalen de randen van het raster. Zij moeten derhalve waarden krijgen die m.b.t. de endogene variabele groot genoeg zijn¹³.

Het voorgaande vormt de oorspronkelijke motivatie voor gebruik van

¹³ T.b.v. de interpretatie is het gewenst om voor het "normale" niveau voor σ_v^2 een als zodanig te beschouwen waarde te kiezen. Bär (1980) heeft een methode gegeven om hiervoor een benadering te vinden.

het multi-state Kalmanfilter. Deze methode is echter niet alleen toepasbaar indien model (4.3) aan de orde is, maar ook indien wij te maken hebben met een ander model uit de klasse modellen (4.1). Vanzelfsprekend kunnen de te onderscheiden toestanden dan niet zo duidelijk worden geïnterpreteerd als hierboven.

4.3 Enige startwaarden en veronderstellingen

Ervan uitgaande dat de K te onderscheiden toestanden zijn gekozen, zijn de startwaarden $E(\underline{\theta}_{-0}^{(i)}) = \underline{\theta}_{0|0}^{(i)}$ en $\text{var}(\underline{\theta}_{-0}^{(i)}) = P_{0|0}^{(i)}$ voor $i=1, \dots, K$ noodzakelijk. Daarbij wordt verondersteld dat $\underline{\theta}_{-0}^{(i)}$ en $\underline{v}_t^{(i)}$ resp. $\underline{w}_t^{(i)}$ ongecorreleerd zijn ($\forall i, t$) en dat

$$\underline{\theta}_{-0}^{(i)} \approx N(\underline{\theta}_{0|0}^{(i)}, P_{0|0}^{(i)})$$

Bovendien moeten waarden worden toegekend aan de kansen dat toestand i op tijdstip $t=0$ van kracht is. Deze kansen worden in het vervolg genoteerd als $q_0^{(i)} = \Pr(\underline{S}_0=i)$ voor $i=1, \dots, K$. De niet waarneembare stochast $\underline{S}_t$ neemt discrete waarden aan en geeft weer welke toestand op tijdstip t van kracht is ofwel wat het ware model is voor tijdstip t . We kunnen dus schrijven $\underline{\theta}_{-t}^{(i)} = \underline{\theta}_{-t} | I_t, \underline{S}_t=i$. De verdeling van $\underline{\theta}_{-0}$ is dan bekend:

$$\underline{\theta}_{-0} \approx \sum_{i=1}^K q_0^{(i)} N(\underline{\theta}_{0|0}^{(i)}, P_{0|0}^{(i)})$$

Er zijn meer startwaarden c.q. veronderstellingen noodzakelijk. Deze zullen in het beloop van de beschrijving duidelijk worden.

4.4 Het algoritme

In deze paragraaf worden de formules voor de posteriori-schattingen voor $\underline{\theta}_{-t-1}$ en $\text{var}(\underline{\theta}_{-t-1})$ gepostuleerd (overeenkomstig de in de vorige paragraaf genoemde veronderstellingen omtrent $t=1$), waaruit vervolgens de formules voor de posteriori-schattingen voor $\underline{\theta}_{-t}$ en $\text{var}(\underline{\theta}_{-t})$ worden afgeleid. Deze blijken qua vorm gelijk te zijn aan de formules voor tijdstip $t-1$. De posteriori-schattingen voor $\underline{y}_t$ en $\text{var}(\underline{y}_t)$ en de priori-schattingen voor $\underline{\theta}_{-t}$, $\text{var}(\underline{\theta}_{-t})$, $\underline{y}_t$ en $\text{var}(\underline{y}_t)$ volgen eenvoudig uit deze resultaten (zie de literatuurverwijzingen in paragraaf 4.1).

M.b.t. tijdstip $t-1$ nemen we aan dat de parameters van de volgende verdelingen bekend zijn ($i=1, \dots, K$):

$$\theta_{t-1|t-1}^{(i)} \approx N(\theta_{t-1|t-1}^{(i)}, P_{t-1|t-1}^{(i)}) \quad (4.4)$$

De kansen $q_{t-1}^{(i)} = \Pr(\underline{s}_{t-1}=i | I_{t-1})$ worden ook bekend verondersteld. De posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_{t-1}$ luidt dan:

$$\underline{\theta}_{t-1|t-1} \approx \sum_{i=1}^K q_{t-1}^{(i)} N(\theta_{t-1|t-1}^{(i)}, P_{t-1|t-1}^{(i)}) \quad (4.5)$$

Dit betekent dat

$$\theta_{t-1|t-1} = E(\underline{\theta}_{t-1} | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^K q_{t-1}^{(i)} \theta_{t-1|t-1}^{(i)} \quad (4.6)$$

$$P_{t-1|t-1} = \text{var}(\underline{\theta}_{t-1} | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^K q_{t-1}^{(i)} \{P_{t-1|t-1}^{(i)} + (\theta_{t-1|t-1}^{(i)} - \theta_{t-1|t-1})(\theta_{t-1|t-1}^{(i)} - \theta_{t-1|t-1})'\}$$

Voor tijdstip t (na het beschikbaar komen van y_t) zijn de stochasten $\underline{\theta}_t^{(i,j)} = \underline{\theta}_t | I_t, \underline{s}_{t-1}=i, \underline{s}_t=j$ van belang, waarvoor geldt:

$$\underline{\theta}_t^{(i,j)} \approx N(\theta_t^{(i,j)}, P_t^{(i,j)})$$

met

1. $\theta_{t|t}^{(i,j)} = B \theta_{t-1|t-1}^{(i)} + (B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)})$
 $\quad * A_t' \{A_t (B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)}) A_t' + V^{(j)}\}^{-1} e_t^{(i)}$
2. $e_t^{(i)} = y_t - A_t B \theta_{t-1|t-1}^{(i)}$
3. $P_{t|t}^{(i,j)} = B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)} - (B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)})$
 $\quad * A_t' \{A_t (B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)}) A_t'$
 $\quad * A_t (B P_{t-1|t-1}^{(i)} B' + W^{(j)})$

De overgangskansen $q_t^{(i,j)} = \Pr(\underline{S}_{t-1}=i, \underline{S}_t=j | I_t)$ moeten worden berekend. In de volgende paragraaf wordt hier op ingegaan. In dit stadium worden ze bekend verondersteld. De posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_t$ luidt dan:

$$\underline{\theta}_t | t \approx \sum_{i,j=1}^K q_t^{(i,j)} N(\underline{\theta}_t^{(i,j)}, P_t^{(i,j)})$$

Derhalve is de posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_t$ een gewogen som van K^2 normale verdelingen, indien de posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_{t-1}$ een gewogen som is van K normale verdelingen (zie (4.5)). De posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_{t+1}$ is dan een gewogen som van K^3 normale verdelingen (etc.). Harrison en Stevens (1971) hebben voorgesteld om de posteriori-verdelingen voor elke t te "condenseren" ($j=1, \dots, K$). Dit voorstel houdt de volgende veronderstelling in:

$$\underline{\theta}_t^{(j)} \approx N(\underline{\theta}_t^{(j)}, P_t^{(j)}) \quad (4.7)$$

zodat

$$\underline{\theta}_t | t \approx \sum_{j=1}^K q_t^{(j)} N(\underline{\theta}_t^{(j)}, P_t^{(j)}) \quad (4.8)$$

met

$$\begin{aligned} 1. \quad q_t^{(j)} &= \sum_{i=1}^K q_t^{(i,j)} \\ 2. \quad \underline{\theta}_t^{(j)} &= \sum_{i=1}^K \frac{q_t^{(i,j)}}{q_t^{(j)}} \underline{\theta}_t^{(i,j)} \\ 3. \quad P_t^{(j)} &= \sum_{i=1}^K \frac{q_t^{(i,j)}}{q_t^{(j)}} \{P_t^{(i,j)} + (\underline{\theta}_t^{(i,j)} - \underline{\theta}_t^{(j)})(\underline{\theta}_t^{(i,j)} - \underline{\theta}_t^{(j)})'\} \end{aligned}$$

De posteriori-verdeling van $\underline{\theta}_t$ is op deze wijze benaderd door een gewogen som van K normale verdelingen¹⁴, zodat de posteriori-verdelingen m.b.t. de tijdstippen $t-1$ en t dezelfde vorm aannemen. De posteriori-schattingen voor $\underline{\theta}_t$ en $\text{var}(\underline{\theta}_t)$ zijn:

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_t | t &= \sum_{j=1}^K q_t^{(j)} \underline{\theta}_t^{(j)} \\ P_t | t &= \sum_{j=1}^K q_t^{(j)} \{P_t^{(j)} + (\underline{\theta}_t^{(j)} - \underline{\theta}_t | t)(\underline{\theta}_t^{(j)} - \underline{\theta}_t | t)'\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹⁴ In Gathercole en Smith (1983) is een "zoekstrategie" geformuleerd, waarmee een betere benadering wordt verkregen.

(4.4), (4.5) en (4.6) corresponderen met (4.7), (4.8) en (4.9). Langs deze lijnen zou ook meer stappen vooruit voorspeld kunnen worden. Binnen de context van het multi-state Kalmanfilter wordt niet gesproken over gladstrijken.

4.5 De overgangskansen

Gegeven waarneming y_t moeten de kansen dat het proces zich op tijdstip $t-1$ in toestand i en op tijdstip t in toestand j bevindt bepaald worden. Door meerdere malen de formule van Bayes toe te passen kunnen deze kansen worden ontleed:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(i,j)} &= \Pr(\underline{s}_{t-1}=i, \underline{s}_t=j | I_t) \\
 &= \Pr(\underline{y}_t=y_t | I_{t-1}, \underline{s}_{t-1}=i, \underline{s}_t=j) \\
 &\quad * \Pr(\underline{s}_{t-1}=i | I_{t-1}) \\
 &\quad * \Pr(\underline{s}_t=j | I_{t-1}, \underline{s}_{t-1}=i) / \Pr(\underline{y}_t=y_t | I_{t-1}) \\
 &= R_{2t}^{(i,j)} * R_{3t}^{(i)} * R_{4t}^{(i,j)} / R_{1t}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

De factor R_{1t} kan opgevat worden als de normalisatieconstante, omdat deze onafhankelijk is van i en j . Vanwege

$$\underline{y}_{t|t-1}^{(i,j)} = \underline{y}_t | I_{t-1}, \underline{s}_{t-1}=i, \underline{s}_t=j \approx N(\underline{y}_{t|t-1}^{(i,j)}, Q_{t|t-1}^{(i,j)})$$

geldt

$$R_{2t}^{(i,j)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |Q_{t|t-1}^{(i,j)}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y}_t - \underline{y}_{t|t-1}^{(i,j)})' Q_{t|t-1}^{(i,j)-1} (\underline{y}_t - \underline{y}_{t|t-1}^{(i,j)}) \right\}$$

De factor $R_{3t}^{(i)}$ is gelijk aan de bekende kans $q_{t-1}^{(i)}$. $R_{4t}^{(i,j)}$ uit (4.10) geeft problemen. De gebruiker moet hieraan zelf waarden toe-kennen. In de literatuur wordt m.n. het schema van Lawson (1980) toegepast, waarvoor de startwaarden $R_{40}^{(i,j)}$ ($i, j=1, \dots, K$) noodzake-lijk zijn:

$$R_{4t}^{(i,j)} = \frac{R_{4t-1}^{(i,j)} + \sum_{k=1}^K q_{t-1}^{(j,k)}}{\sum_{j=1}^K (R_{4t-1}^{(i,j)} + \sum_{k=1}^K q_{t-1}^{(j,k)})} \tag{4.11}$$

Een ander schema dan (4.11) kan ook gekozen worden. Welke keuze ook wordt gemaakt, de formules (4.10) zijn dan uit te rekenen, waarmee de overgangskansen bekend zijn.

4.6 Enige toepassingen

Deaton (1976) heeft gesteld dat de hoge spaarquotes in het Verenigde Koninkrijk in de zestiger en zeventiger jaren veroorzaakt werden door geringere consumptieve bestedingen als reactie op als onverwacht ervaren prijsstijgingen. Dit onderbouwde hij empirisch m.b.v. de schattingsresultaten van een lineaire vergelijking waarin de niveau-mutatie van de spaarquote o.a. verklaard wordt door de gerealiseerde inflatie. Daaraan lag de veronderstelling ten grondslag dat de verwachte inflatie constant in de tijd is. Lawson (1980) modelleerde daarom eerst de inflatie als een tweede-orde niet-stationair proces en schatte de verwachte inflatie als de één-staps-vooruit-voorspelling van de inflatie volgens het multi-state Kalmanfilter. Dit betekent dat naast de in paragraaf 4.2 m.b.t. (4.3) onderscheiden toestanden ook nog rekening gehouden is met de mogelijkheid dat er een mutatie optreedt in de groei van de inflatie. Vervolgens herschatte Lawson de spaarquote- vergelijking onder de gewijzigde veronderstelling dat de mutatie in de spaarquote wordt verklaard door de afwijking tussen verwachte en gerealiseerde inflatie (en verder dezelfde verklarende variabelen). Op grond van de resultaten werd geconcludeerd dat onverwachte inflatie inderdaad een significante invloed heeft gehad op de spaarquote in het Verenigd Koninkrijk.

Het op deze wijze construeren van verwachtingen is vooral nagevolgd door de monetair-economen aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam. Bomhoff en Korteweg (1980) hebben bijvoorbeeld op deze wijze verwachtingen gemaakt voor enkele exogene variabelen die als zodanig voorkomen in een model waarin de wisselkoers centraal staat. De multi-state Kalmanfilter-schattingen voor de standaarddeviaties van enkele verwachtingen zijn bovendien binnen het wisselkoersmodel gebruikt als risicoproxies. Er is daarbij sterk benadrukt dat deze handelwijze in overeenstemming is met de hypothese der rationele verwachtingen [vgl. ook Bår (1980), Kool (1981), Bomhoff (1982), Hein en Veugelers (1983) en Hafer et al. (1983)].

Woittiez (1984) heeft m.b.v. gesimuleerde reeksen onderzocht in welke gevallen opname van een waarneembare verklarende variabele met een tijdsafhankelijke coëfficiënt tot betere multi-state Kalmanfiltervoorspellingen leidt. Dit is logischerwijs sterk afhankelijk van de samenhang tussen de variatie in de endogene en exogene variabele. Als praktische toepassing zijn binnen de waarnemingsperiode een-staps-vooruit-voorspellingen gegenereerd voor de

omloopsnelheid van geld, het prijspeil en het nationaal inkomen in constante prijzen. Het benutten van de informatie die de geldhoeveelheid en vertraagde endogenen geven door deze als verklarende variabelen in de desbetreffende modellen op te nemen had doorgaans betere voorspellingen tot gevolg.

5. Samenvattende conclusies

Het Kalmanfilter is van toepassing op modellen die in toestandsruimteform luiden dan wel als zodanig kunnen worden herschreven. Hiermee kunnen alleen schattingen c.q. voorspellingen voor de endogene variabele(n) en toestandsvariabele(n) worden berekend. Afhankelijk van de toepassing kan er sprake zijn van een serieus startwaardenprobleem. Omdat de varianties en covarianties van de storingen (en overige niet in de toestandsvector opgenomen modelparameters) bekend moeten zijn, is de methode binnen de econometrie ongeschikt voor zelfstandige toepassing.

Als hulpmiddel is de methode echter waardevol, wanneer aanvullend de niet in de toestandsvector opgenomen onbekenden geschat worden door toepassing van maximum-likelihood. Een niet-lineaire functie moet worden geoptimaliseerd, waarbij de waarnemingsperiode iedere iteratie m.b.v. het Kalmanfilter moet worden doorlopen. Al dan niet tijdsafhankelijke en/of stochastische coëfficiënten, niet-waarneembare variabelen als b.v. trend- en seizoencomponenten en ook ontbrekende waarnemingen kunnen aldus op bevredigende wijze worden geschat. De methode wordt in de econometrie nog onvoldoende geplaatst binnen een ruimer kader, waarin ook aandacht wordt gegeven aan identificatie en diagnostische verificatie. De één-staps-vooruit-voorspelfouten bieden hiervoor een belangrijk aangrijpingspunt.

Voor toepassing van het multi-state Kalmanfilter is kennis van de varianties en covarianties van de storingen evenmin noodzakelijk. Overige niet in de toestandsvector opgenomen modelparameters moeten wel bekend zijn. Deze methode behelst weging van verschillende parallelle Kalmanfilters (met enige correctie) en is vanwege het vele noodzakelijke rekenwerk alleen geschikt bij gebruik van zeer eenvoudige modellen voor b.v. de constructie van verwachtingsvariabelen. Een ander onbevredigend aspect is dat - eveneens om numerieke redenen - een beroep moet worden gedaan op benaderingen. Bovendien moet de gebruiker de aanpassing van de overgangskansen exact specificeren.

Geraadpleegde literatuur

- Akaike, H., 1976, "Canonical Correlation Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion", in: R.K. Mehra en D.G. Lainiotis (eds.), System Identification, Advances and Case Studies, Academic Press, New York.
- Anderson, B.D.O. en J.B. Moore, 1979, Optimal Filtering, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey.
- Bär, F.B., 1980, "Empirische Constructie van Rationele Verwachtingen", doctoraal-scriptie Erasmus Universiteit Rotterdam.
- Baudin, A., S. Nadeau en A. Westland, 1984, "Estimation and Prediction Under Structural Instability: The Case of the U.S. Pulp and Paper Market", Journal of Forecasting, 3, blz. 63-78.
- Bierman, G.J., 1977, Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New-York.
- Bomhoff, E.J., 1982, "Predicting the Price Level in a World that Changes All the Time", Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 17, blz. 7-56.
- Bomhoff, E.J. en P. Korteweg, 1980, "Exchange Rate Variability and Monetary Policy under Rational Expectations: Some Euro-American Experience 1973-1979", Erasmus Universiteit Rotterdam.
- Brännäs, K., 1980, On Estimation in Econometric Systems in the Presence of Time-Varying Parameters, Ph. D. Thesis Universiteit van Umea, Umea, Zweden.
- Chan, S.W., G.C. Goodwin en K.S. Sin, 1984, "Convergence Properties of the Riccati Difference Equation in Optimal Filtering of Nonstabilizable Systems", IEEE Trans on Automatic Control, AC-29, blz. 110-118.
- Deaton, A.S., 1977, "Involuntary Savings Through Unanticipated Inflation", American Economic Review, 67, No. 5, blz. 899-910.
- Duncan, D.B. en S.D. Horn, 1972, "Linear Dynamic Recursive Estimation from the Viewpoint of Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, 67, No. 340, blz. 815-821.
- Gardner, G., A.C. Harvey en G.D.A. Phillips, 1980, "An Algorithm for Exact Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive-Moving Average Models by Means of Kalman Filtering", Applied Statistics, 29, blz. 311-322.
- Gathercole, R.G. en J.Q. Smith, 1983, A Dynamic Forecasting Model for a General Class of Discontinuous Time Series, Research Report, Department of Statistical Science, University College London.
- Gersch, W. en G. Kitagawa, 1983, "The Prediction of Time Series With Trends and Seasonalities", Journal of Business and Economic Statistics, 1, No. 3, blz. 253-263.
- Hafer, R.W., S.E. Hein en C.J.M. Kool, 1983, "Forecasting the Money Multiplier: Implications for Money Stock Control and Economic Activity", Review of the Federal Reserve Bank of St. Louis, 65, No. 8, blz. 22-23.
- Harrison, P.J. en C.F. Stevens, 1971, "A Bayesian Approach to Short Term Forecasting", Operational Research Quarterly, 22, No. 4, blz. 341-362.
- Harvey, A.C., 1981, Time Series Models, Philip Allan, Oxford.
- Harvey, A.C., 1984, "A Unified View of Statistical Forecasting Procedures", Journal of Forecasting, 3, blz. 245-275.
- Harvey, A.C. en C.R. McKenzie, 1983, "Missing Observations in Dynamic Econometric Models: A Partial Analysis", in: E. Parzen (ed.), Time Series Analysis of Irregularly Observed Data, Lecture Notes nr. 25, Springer-Verlag.
- Harvey, A.C. en S. Peters, 1984, Estimation procedures for structural time series models, Discussion paper A28, London School of Economics.
- Harvey, A.C. en G.D.A. Phillips, 1979, "The Estimation of Regression Models With Autoregressive-Moving Average Disturbances", Biometrika, 66, blz. 49-58.
- Harvey, A.C. en R.G. Pierse, 1984, "Estimation of Missing Observations in Economic Time Series", Journal of the American Statistical Association, 79, No. 385, blz. 125-131.

- Harvey, A.C. en P.H.J. Todd, 1983, "Forecasting Economic Time Series With Structural and Box-Jenkins Models: A Case Study", Journal of Business and Economic Statistics, 1, No. 4, blz. 299-315.
- Hein, S.E. en P.T.W.M. Veugelers, 1983, "Predicting Velocity Growth: A Time Series Perspective", Review of the Federal Reserve Bank of St. Louis, 65, No. 8, blz. 34-43.
- Jazwinski, A.H., 1970, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York.
- Jones, R.H., 1980, "Maximum Likelihood Fitting of ARMA Models to Time Series With Missing Observations", Technometrics, 22, No. 3, blz. 389-395.
- Jong, V.J. de, D.T. Tempelaar, H.W.A. Dietzenbacher, M.A. Kooyman, A.G.M. Steerneman en W. Voorhoeve, 1984, "Grecon-voorspellingen voor 1984", Economisch Statistische Berichten, 29-2-1984, blz. 200-205.
- Kalman, R.E., 1960, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Transactions ASME Journal of Basic Engineering, 82, blz. 35-45.
- Kooiman, H.J., 1984, "Seizoencorrectie en voorspellen met structurele modellen", doctoraalscriptie Vrije Universiteit Amsterdam.
- Kool, C.J.M., 1981, "Rationele Verwachtingen met behulp van Kalmanfilters", doctoraalscriptie Erasmus Universiteit Rotterdam.
- Lawson, T., 1980, "Adaptive Expectations and Uncertainty", Review of Economic Studies, 17, blz. 305-320.
- McNelis, P.D. en S.N. Neftci, 1982, "Policy-Dependent Parameters in the Presence of Optimal Learning: An Application of Kalman Filtering to the Fair and Sargent Supply-side Equations", Review of Economics and Statistics, 431, blz. 296-306.
- Mehra, R.K., 1982, "Identification in Control and Econometrics", in: M. Hazewinkel en A.H.G. Rinnooy Kan (eds.), Current Developments in the Interface: Economics, Econometrics and Mathematics, Dordrecht.
- Nijman, Th. E., 1985, Missing Observations in Dynamic Macro-Economic Modelling, Proefschrift Vrije Universiteit Amsterdam.
- Nijman, Th. E. en F. Palm, 1984, "Missing Observations in a Quarterly Model for the Aggregate Labor Market in the Netherlands", Research Memorandum 1984-13 Economische Faculteit Vrije Universiteit Amsterdam.
- Otter, P.W., 1978, "The Discrete Kalman Filter Applied to Linear Regression Models: Statistical Considerations and an Application", Statistica Neerlandica, 31, No. 1, blz. 41-56.
- Otter, P.W., 1984, Dynamic Space Modelling, Filtering and Self-Tuning Control of Stochastic Systems, Proefschrift Rijksuniversiteit Groningen.
- Rosenberg, B., 1973, "Random Coëfficiënt Models: the Analysis of a Cross-Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regressions", Annals of Economic and Social Measurement, 2, blz. 399-428.
- Tempelaar, D.T., 1983, "Analysing Econometric Models with Kalman Filter Methods: An Application to a Sho-t Term Forecasting Model of the Dutch Economy", paper gepresenteerd op het Europese Econometrische Congres te Pisa.
- Vos, A.F. de, 1983, "De Specificatie van Relaties tussen Tijdreeksen, i.h.b. (girale) Geldhoeveelheden, Inkomen en Rente", Kwantitatieve Methoden, 10, blz. 14-32.
- Watson, P.K., 1983, "Kalman Filtering as an Alternative to Ordinary Least Squares - Some Theoretical Considerations and Empirical Results", Empirical Economics, 8, blz. 71-85.
- Woittiez, I., 1984, "Verwachtingen en Variabele Parameter Technieken", doctoraalscriptie Erasmus Universiteit Rotterdam.