KM 18(1985)
pag 103-105

OVER COVARIANTIE EN SLUTSKY MATRICES;
EEN REACTIE OP WANSBEEK

Wouter J. Keller
Centraal Bureau voor de Statistiek
Hoofdafdeling Statistische Methoden
Postbus 959, 2270 AZ VOORBURG

In het korte en krachtige commentaar van Tom Wansbeek op het artikel van De Boer en Harkema in KM16 eindigt Wansbeek met een open probleem: vindt een specificatie voor Ω (de $p \times p$ covariantiematrix met rang $p-1$) die algemener is dan $\Omega = D - (\iota' d)^{-1} dd'$ en toch eenvoudig is. Ik doe hiervoor een suggestie.

Daartoe schrijf ik (geïnspireerd door de factoranalyse)

$$\Omega = \sigma(\Psi - \Lambda\Lambda') \tag{1}$$

met Λ een $p \times m$ matrix met rang m
Ψ een $p \times p$ diagonaal matrix
$\sigma > 0$.

Om te garanderen dat $\Omega\iota_p = 0$, kiezen we Ψ afhankelijk van Λ, en normaliseren Λ

$$\Lambda'\iota_p = \iota_m$$
$$\Psi\iota_p = \Lambda\iota_m \,. \tag{2}$$

Het model van De Boer en Harkema vinden we door te kiezen $m=1$ en $\Lambda = \sigma^{-1} d$, want dan volgt $\Psi = \sigma^{-1} D$ (met $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_p)$) en $\sigma = \iota' d$ zodat

$$\begin{aligned} \Omega &= \sigma(\sigma^{-1} D + \sigma^{-2} dd') \\ &= D - (\iota' d)^{-1}\, dd' \,. \end{aligned}$$

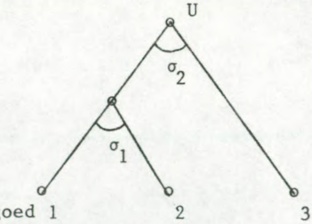
In het geval dat $m>1$ is de identificatie van Λ een probleem. Zelfs als we $\Lambda'\Lambda$ diagonaal kiezen (orthogonaliteit), is Λ slechts bepaald op een rotatie na (omdat $\Lambda BB'\Lambda' = \Lambda\Lambda'$ voor alle B: $BB'=I$). Dit is allemaal bekend uit de factoranalyse. Een voordeel ten opzichte van de factoranalyse is dat, gegeven Λ, Ψ bekend is; bij de factoranalyse is de bepaling van Ψ (de zgn. communalities) een probleem.

Een geheel analoog probleem aan dat van de specificatie van de covariantiematrix is de specificatie van de zgn. Slutsky-matrix in een vraagstelsel. Theil (1971, 1975) heeft reeds op de mogelijke overeenkomsten gespeculeerd. In Keller (1984) wordt een eenvoudige structuur voor de Slutsky-matrix voorgesteld, namelijk

$$S = -\sigma(\hat{\phi} - \phi\phi') \text{ met } \phi'\iota = 1,\ \sigma > 0 \tag{3}$$

en $\hat{\phi}=\mathrm{diag}(\phi_1,\ldots,\phi_p)$. Het is eenvoudig in te zien dat de vorm van S identiek is aan die van Ω voor m=1, op het teken na (S is dan ook negatief semidefiniet terwijl Ω positief semidefiniet is).

Voor S zijn echter leuke interpretaties te geven aan (1) en (3). Als m=1 en $\phi_i=\mu_i$ (het marginale consumptie aandeel van goed i) dan komt het bij (3) behorende vraagstelsel (lokaal) overeen met het geval van 'preference independence' (Theil, 1975) en een één-level CES nutsfunctie, terwijl $\phi_i=w_i$ (het gemiddelde budgetaandeel) correspondeert met preference independence en homotheticiteit (dat wil zeggen alle inkomenselasticiteiten gelijk aan één). Als we voor het gemak even uit gaan van homotheticiteit, dan is een interessant geval behorende bij $S = -\sigma(\Lambda\Lambda' - \Psi)$ en m=2 de zgn. twee-level CES nutsfunctie (zie Keller, 1976). Een voorbeeld van zo'n nutsstructuur met bijbehorende Λ is:



$$\Lambda = \begin{bmatrix} w_1 & w_1\alpha \\ w_2 & w_2\alpha \\ w_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

met w_i het budgetaandeel van goed i (=1,2,3), $\alpha = (\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_2 w_1+\sigma_2 w_2)$ en $\sigma = \sigma_2$; Ψ volgt uit de adding-up. De genoemde Λ gesubstitueerd in $S = -\sigma(\Lambda\Lambda'-\Psi)$ levert precies de Slutsky matrix van deze nutsfuntie op (vergelijk daartoe S met Λ uit (4) met de 'Allen elasticities of substitution' op p. 184 van Keller, 1976). Merk op dat als $\sigma_1=\sigma_2$, de twee-level CES degenereert tot een één-level, zoals ook blijkt uit Λ: kolom 2 wordt nul (dan wordt rang Λ = 1). De tweede 'factor' $(w_1\alpha,\ w_2\alpha,\ 0)$ is geheel vergelijkbaar met de eerste $(w_1,\ w_2,\ w_2)$; de tweede beschrijft echter de afwijkende substitutie tussen goed 1 en goed 2 terwijl de eerste factor de algemene substitutie tussen alle drie de goederen beschrijft. Een meer algemene Slutsky-matrix vinden we door in de bovenstaande Λ de niet nul-elementen te vervangen door willekeurige parameters.

Gewapend met dit inzicht ligt een vervolg van Keller (1984) en De Boer en Harkema voor de hand:

1. Generaliseer de Slutsky-matrix (3) met m=1 naar (1) met $m > 1$ (met ϕ_i niet noodzakelijk gelijk aan w_i).
2. Generaliseer analoog de covariantie-matrix van De Boer en Harkema van m=1 naar $m > 1$.
3. Veronderstel met Theil dat S proportioneel is met Ω.
4. Schat S (en dus Ω).

Vanwege de onbepaalde rotaties in Ω en S is er natuurlijk bij het schatten nog behoefte aan wat extra restricties, evenals vanwege de gewenste semidefinietheid (positief of negatief) van Ω en S. Het is niet ondenkbaar dat hierbij standaardprogramma's voor factoranalyse goede diensten kunnen bewijzen. Een eenvoudige schattingsmethode is natuurlijk: schat het stelsel voor m=1 met herhaald OLS zoals aangegeven in Keller (1984). Schat de tweede factor (m=2) uit de residuen wederom met herhaald OLS, etc. Suggesties voor geavanceerde schattingsmethoden waarbij met alle restricties rekening wordt gehouden, zijn natuurlijk van harte welkom.

Referenties

Keller, W.J., 1976, A nested CES-type utility function and its demand and price-index functions. European Economic Review 7, pp. 175-186.

Keller, W.J., 1984, Some simple but flexible differential consumer demand systems. Economics Letters 16, pp. 77-82.

Theil, H., 1971, An economic theory of the second moments of disturbances of behavioral equations. The American Economic Review 61, pp. 190-194.

Theil, H., 1975, Theory and measurement of consumer demand, volume 1 (North Holland, Amsterdam).

Ontvangen: 15-5-85