KM 18(1985)
pag 99-102

SINGULIERE COVARIANTIEMATRICES EN SUR-MODELLEN: ENIGE OPMERKINGEN OVER DE SPECIFICATIE VAN DE BOER EN HARKEMA

Tom Wansbeek

Econometrisch Instituut
Rijksuniversiteit Groningen

Een veelvoorkomend toepassingsgebied van "Seemingly Unrelated Regressions" (SUR) betreft de situatie waar de afhankelijke variabelen optellen tot één over de met elkaar samenhangende deelverzamelingen van waarnemingen. Voorbeelden zijn modellen die het marktaandeel van een aantal concurrerende producten beschrijven, of de verdeling van de bestedingen van een consument over de verschillende bestedingscategorieën. Een implicatie van de optelrestrictie is dat de "contemporaine" covariantiematrix Ω (stel $p \times p$) singulier is: $\Omega\iota_p = 0$, met ι_p een p-vector van enen. in **KM** 16 stellen De Boer en Harkema voor om Ω te specificeren als

$$\Omega = D - (\iota_p' d)^{-1} dd', \tag{1}$$

met $D \equiv \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_p)$ en $d = D\iota_p$, en $d_1,\ldots,d_p$ een p-tal onbekende parameters. Het is duidelijk dat de aldus gespecificeerde Ω voldoet aan $\Omega\iota_p = 0$ en tegelijkertijd zuinig is: er zijn p parameters en geen $\frac{1}{2}p(p+1)$ zoals wanneer Ω wordt vrijgelaten. Dit kan bij weinig waarnemingen grote voordelen hebben.

In deze notitie maak ik een paar kanttekeningen bij deze specificatie die mijns inziens de behandeling van De Boer en Harkema wat vereenvoudigen. In het bijzonder is het mogelijk het stelsel eenvoudig te schatten zonder (overigens redundante) vergelijkingen weg te gooien. Zonder veel verlies van algemeenheid neem ik aan dat de d_i onderling verschillend zijn en geordend zijn als $d_1 < \ldots < d_p$.

(i) Eén eigenwaarde van Ω is uiteraard gelijk aan 0. De overige eigenwaarden zijn de wortels van de vergelijking

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{d_i}{d_i - \lambda} = 0. \tag{2}$$

Het bewijs staat in de appendix. Uit (2) volgt dat tussen iedere twee opeenvolgende d_i van hetzelfde teken een eigenwaarde ligt. Omdat Ω een covariantiematrix is en dus positief semidefiniet is, volgt hieruit dat moet gelden: $0 < d_2 < \ldots < d_p$.

(ii) Een interessante eigenschap van Ω is

$$\Omega^+ = E_p D^{-1} E_p . \tag{3}$$

met $E_p \equiv I_p - \iota_p \iota_p'/p$. Dit valt eenvoudig te bewijzen door de vier bekende eigenschappen na te gaan waaraan de gegeneraliseerde inverse per definitie voldoet. In de appendix wordt (3) gebruikt om aan te tonen dat, als $d_1 < 0$, de positief-semidefinietheid van Ω impliceert dat d_1 absoluut groter is dan $d_2 + \ldots + d_p$. Dit is een dusdanig vreemde situatie dat het zinnig is om $d_1 > 0$ van het begin af aan tot onderdeel van de specificatie te maken.

(iii) Dit feit samen met (3) suggereert een eenvoudige, asymptotische efficiënte schattingsmethode. De covariantiematrix van het hele stelsel, bij n waarnemingen, is $I_n \otimes \Omega$ en de gegeneraliseerde inverse daarvan is uiteraard $I_n \otimes \Omega^+$. We schatten nu als volgt: vermenigvuldig het stelsel met $I_n \otimes E_p$ (dus sommeren tot nul in plaats van tot één), doe OLS per vergelijking, schat de d_i met de s^2 van het i^e deelmodel ($\hat{d}_i \geq 0$ gegarandeerd, maar zorg voor een correctie van het aantal vrijheidsgraden), deel iedere vergelijking door de betrokken $\hat{d}_i^{1/2}$, en doe nog een OLS op het hele stelsel.

(iv) In Ω zijn de buitendiagonaaltermen ongelijk aan nul; de covarianties tussen storingen van verschillende vergelijkingen is niet nul. Vooral (3) maakt duidelijk dat dit komt door de optelbaarheid en niet zozeer door "echte" covariantie. Dit suggereert de volgende vraag: vind een Ω die bestaat uit een diagonaal plus een matrix van lage rang, zodanig dat aan de optelbaarheidseis wordt voldaan, én zodanig dat het geheel nog iets van de eenvoud van de specificatie van De Boer en Harkema behoudt. Voorzover ik weet is dit een open probleem.

Appendix

De eigenwaarden van Ω volgen uit de vergelijking

$$|\Omega-\lambda I| = |D-\lambda I-(\iota_p' d)^{-1} dd'| =$$

$$= |D-\lambda I|\,(1-(\iota_p' d)^{-1} d'(D-\lambda I)^{-1} d) = 0 \tag{4}$$

oftewel

$$0 = 1 - (\iota_p' d)^{-1} d'(D-\lambda I)^{-1} d =$$

$$= (\iota_p' d)^{-1}\{\iota_p'(D-\lambda I)(D-\lambda I)^{-1} d - d'(D-\lambda I)^{-1} d\} =$$

$$= (\iota_p' d)^{-1}\{-\lambda \iota_p'(D-\lambda I)^{-1} d\}. \tag{5}$$

Dus $\lambda = 0$ of λ volgt uit (2).

Stel nu $d_1 < 0$ en $0 < d_2 < \ldots < d_p$. Noem D_2 de diagonale $(p-1)\times(p-1)$-matrix met $d_2,\ldots,d_p$ als diagonaal-elementen, en stel

$$\alpha \equiv -p^{-\frac{1}{2}}\iota_{p-1} \tag{6}$$

$$Q \equiv E_{p-1} + \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{p-1}\iota_{p-1}\iota_{p-1}' \tag{7}$$

$$H \equiv \binom{\alpha'}{Q}. \tag{8}$$

Dan is $E_p = HH'$ en zijn de eigenwaarden $\neq 0$ van $\Omega^+ = HH'D^{-1}HH'$ gelijk aan die van $H'D^{-1}H$. Voldoende is om daarvan te eisen:

$$0 < |H'D^{-1}H| = |QD_2^{-1}Q + d_1^{-1}\alpha\alpha'| =$$

$$= |QD_2^{-1}Q|\,(1+d_1^{-1}\alpha'(QD_2^{-1}Q)^{-1}\alpha) \tag{9}$$

dus

$$0 < 1 + d_1^{-1}\alpha' Q^{-1} D_2 Q^{-1}\alpha. \tag{10}$$

Uit (7) volgt meteen (want E_{p-1} en $(p-1)^{-1}\iota_{p-1}\iota_{p-1}'$ idempotent):

$$Q^{-1} = E_{p-1} + \frac{p^{\frac{1}{2}}}{p-1}\iota_{p-1}\iota_{p-1}' \tag{11}$$

zodat $Q^{-1}\alpha = -\iota_{p-1}$ en (10) wordt:

$$1 + d_1^{-1}\iota_{p-1}' D_2 \iota_{p-1} > 0 \tag{12}$$

oftewel

$$d_1 + \iota'_{p-1} D_2 \iota_{p-1} < 0 \tag{13}$$

oftewel

$$\Sigma_{i=1}^{p} d_i < 0. \tag{14}$$

Dit is de in de tekst genoemde eis op d_1.

Ontvangen: 25-2-85