

PRIJSINDICES: EEN HISTORISCH OVERZICHT --- HUIB KNEEPKENS *

INHOUD

1 INLEIDING

2 ONGEWOGEN PRIJSINDICES

- 2.1 Dutot 1738
- 2.2 Carli 1764
- 2.3 Jevons 1863
- 2.4 Coggeshall 1886

3 PRIJSINDICES MET CONSTATE GEWICHTEN

- 3.1 Young 1812
- 3.2 Lowe 1822
- 3.3 Overige indices

4 PRIJSINDICES MET GEWICHTEN UIT BASIS- OF OBJECT-PERIODE

- 4.1 Laspeyres 1871
- 4.2 Paasche 1874
- 4.3 Overige indices

5 PRIJSINDICES MET GEMENGDE GEWICHTEN

- 5.1 Edgeworth 1887
- 5.2 Walsh 1901
- 5.3 Törnqvist 1936 en 1957
- 5.4 Overige indices

6 COMBINATIES VAN LASPEYRES- EN PAASCHE-INDICES

- 6.1 Sidgwick 1883
- 6.2 Fisher 1922
- 6.3 Overige indices

7 PRIJSINDICES MET GEWICHTEN UIT PERIODEN TUSSEN DE BASIS- EN DE OBJECT-PERIODE

- 7.1 Divisia 1925
- 7.2 Gini 1931
- 7.3 Duon 1950

8 BIJZONDERE FACTORANTITHESES

- 8.1 Drobisch 1871
- 8.2 Lehr 1885

9 IDEALE PRIJSINDICES

- 9.1 Stuvet 1956
- 9.2 Sato 1976
- 9.3 Vartia (1974 en) 1976

LITERATUUR

* FAC. DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN --- UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM
JODENBREESTRAAT 23 --- 1011 NH AMSTERDAM --- TEL. 020 - 525 4241

1. INLEIDING

Deze studie geeft een historisch overzicht van het ontstaan van de belangrijkste statistische prijsindices.

We onderscheiden verhoudingen van prijzenaggregaten en diverse gemiddelden van prijsverhoudingen. Leidraad bij de bespreking van de verschillende prijsindices is de toenemende complexiteit van de toegepaste gewichten.

Prijsindices P_{ot} beschrijven de verandering in prijs van een goederenpakket, die optreedt tussen een basisperiode o en een objectperiode t . De indices zijn functies van de prijzen p_o^i , p_t^i en hoeveelheden q_o^i , q_t^i van de in de perioden o en t aangeschafte goederen en diensten ($i = 1, \dots, n$).

Uit een prijsindex P_{ot} kan men een corresponderende hoeveelheidsindex Q_{ot} construeren door verwisseling van de componenten p_o^i en p_t^i in q_o^i en q_t^i en vice versa ("factorenverwisseling"). Zo'n hoeveelheidsindex beschrijft de volumeverandering in het pakket goederen tussen de perioden o en t .

De meeste prijsindices behoren tot de volgende vier categorieën of zijn combinaties van dergelijke indexcijfers:

A. Verhouding van prijzenaggregaten

$$P_{ot}^{AGG} = \frac{\sum_i p_t^i q_o^i}{\sum_i p_o^i q_o^i}$$

B. Rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen

$$P_{ot}^{RG} = \sum_i w^i (p_t^i / p_o^i) \quad (w^i > 0 \text{ en } \sum_i w^i = 1)$$

C. Meetkundig gemiddelde der prijsverhoudingen

$$P_{ot}^{MG} = \prod_i (p_t^i / p_o^i)^{w^i} \quad (w^i > 0 \text{ en } \sum_i w^i = 1)$$

D. Harmonisch gemiddelde der prijsverhoudingen

$$P_{ot}^{HG} = \left[\sum_i w^i (p_o^i / p_t^i) \right]^{-1} \quad (w^i > 0 \text{ en } \sum_i w^i = 1)$$

In deze studie geven we een systematisch overzicht van de meeste varianten.

De systematiek wordt bepaald door de toenemende complexiteit van de gewichten.

In de volgende hoofdstukken worden achtereenvolgens ongewogen prijsindices besproken, indices met constante gewichten, met gewichten uit basis- of objectperiode, met gemengde gewichten, combinaties van Laspeyres- en Paasche-indices, prijsindices met gewichten uit perioden tussen de basis- en de objectperiode, bijzondere factorantitheses en tot besluit nog enige ideale prijsindices.

2. ONGEWOGEN PRIJSINDICES

2.1 Dutot 1738

Charles de Ferrare Dutot (1738) schreef zijn boek "Reflexions politiques sur les finances et le commerce" als reactie op een werk van Jean Francois Melon (1734). Melon was voorstander van een economische politiek, waarbij de geldvoorraad fors zou worden verhoogd om de economie te stimuleren. De verhoogde productie die ervan het gevolg zou zijn, zou een afdoende remmende werking hebben op de stijgende prijzen, aldus Melon. Dutot geloofde hier niets van en liet zien dat ondanks een drastische geldschepping in het begin van de 18e eeuw de koopkracht van het geld ten tijde van Louis XV 22 maal zo laag was als in de tijd van Louis XII. Hij berekende dit door voor beide perioden in drie Franse provincies prijzen van 24 verschillende goederen en diensten¹⁾ waar te nemen en als volgt te relateren:

$$P_{ot}^D = \sum_i p_t^i / \sum_i p_o^i$$

In feite nam hij de verhouding van twee ongewogen prijsaggregaten waarvan het niet precies duidelijk is, wat ze voorstellen: de prijs van één dag werk wordt opgeteld bij de prijs van 1500 pond hooi, de prijs van een konijn, de tarwe-opbrengst van een bepaald stuk land, etc.¹⁾

Met enige goede wil kan men de prijzen echter opvatten als waarden (ze waren gemeten in geldeenheden) van de onderdelen van een gespecificeerd pakket goederen en diensten. In dat geval is $\sum_i p_o^i$ de totale waarde van het pakket in de basisperiode en is P_{ot}^D te interpreteren als een gewogen gemiddelde van de prijsverhoudingen met als gewichten de relatieve bestedingen uit de basisperiode²⁾.

2.2 Carli 1764

De Italiaan Gian Rinaldo Carli (1764) was geïnteresseerd in de waardevermindering van het geld sinds de ontdekking van (en de goudvondsten in) Amerika.

Hij had de beschikking over prijswaarnemingen van graan, wijn en olie uit de jaren 1500 en 1750 en schatte de waardevermindering van het geld tussen beide jaren met behulp van een ongewogen rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen. Voordeel van Carli's methode boven die van Dutot is, dat de waarde van het indexcijfer nu onafhankelijk is van de dimensies waarin de prijzen genoteerd zijn.

$$P_{ot}^C = \frac{1}{n} \sum_i (p_t^i / p_o^i)$$

1) Zie W.A. Chance (1966, p.110).

2) Zie H.Kneepkens (1983, p.370).

2.3 Jevons 1863

Bijna honderd jaar na de bijdrage van Carli pleit W.S. Jevons (1863) als eerste voor het gebruik van een ongewogen meetkundig gemiddelde der prijsverhoudingen als maat voor de waardeverandering van het geld.

$$P_{ot}^J = \Pi_i (p_t^i / p_o^i)^{1/n}$$

Hij formuleert in eerste instantie zijn argumenten niet zo expliciet, maar hij bedient zich van een voorbeeld:

The price of cocoa has nearly doubled since 1845-50. It has increased by 100 per cent. so that its variation is now expressed by the number 200. Cloves, on the contrary, have fallen 50 per cent., and are now at 50. The arithmetic mean of these ratios would be $\frac{1}{2}(200+50)$ or 125. The average rise of cocoa and cloves would then appear to be 25 per cent. But this is totally erroneous. The geometric mean of the ratios expressed by the numbers 200 and 50 is 100. On the average of cocoa and cloves there has been no alteration of price whatever. In other words, the price of one is doubled, of the other halved - one is multiplied by two, one divided by two - on the average, then, the prices of these articles remain as they were, instead of rising 25 per cent.

(W.S. Jevons (1863, repr. 1884, p.23-24))

Zijn keuze voor het ongewogen meetkundig gemiddelde der prijsverhoudingen wordt bekritiseerd door Laspeyres (1864), die zich onomwonden uitspreekt voor het gebruik van de Carli-index, het ongewogen rekenkundig gemiddelde.

Bleiben wir bei dem Beispiel von Jevons. Hier hat nach eingetretener Veränderung im Preis von Cacao und Nelken dieselbe Summe Geldes nicht mehr dieselbe Kaufkraft wie früher, sondern eine geringere, und zwar genau so, wie das arithmetische Mittel diess zeigt. Wenn eine bestimmte Menge Cacao (1 Ctr.) früher 100 Thlr. kostete und eine bestimmte Menge Nelken (1 Ctr.) auch 100 Thlr., der Preis des Cacao von 100 auf 200 steigt, der der Nelken von 100 auf 50 fällt, so haben 200 Thlr. nicht mehr dieselbe Kraft Cacao und Nelken zu kaufen. Für 200 Thlr. erhält der Käufer nur $\frac{1}{2}$ Ctr. Cacao=150 Thlr. und 1 Ctr. Nelken=50 Thlr., oder er erhält 1 Ctr. Cacao=200 und gar keine Nelken. Die Kaufkraft ist um $\frac{1}{2}$ geringer, d.h. der Käufer muss, um dasselbe Quantum zu erhalten, noch $\frac{1}{2}$ (50 Thlr.) zulegen oder die 250 Thlr. sind jetzt um $\frac{1}{2}$ (50 Thlr.) weniger werth als früher.

Gerade diess wird durch das arithmetische Mittel $\frac{200+50}{2}=125$ ausgedrückt; 125 Thlr. haben nur noch dieselbe Kaufkraft wie früher 100, oder 250 nur noch dieselbe wie früher 200.

(E. Laspeyres, (1864, p.96-97))

Hierop reageert Jevons (1865, repr. 1884, p.120) een jaar later met de woorden:

The reasons for adopting the geometric mean were explained in my pamphlet, and I still think those reasons are sufficient.

Daarna beaamt hij, dat er wel enige grond is voor het argument van Laspeyres ten gunste van de Carli-index, maar dat men met evenveel reden het harmonisch gemiddelde kan toepassen. Tenslotte somt Jevons drie redenen op, waarom hij het meetkundig gemiddelde blijft verkiezen boven de andere twee gemiddelden bij meting van de algemene prijsveranderingen:

- (1) it lies between the other two;
- (2) it presents facilities for the calculation and correction of results by the continual use of logarithms, without which the inquiry could hardly be undertaken;
- (3) it seems likely to give in the most accurate manner such general change in prices as is due to a change on the part of gold. For any change in gold will affect all prices in an equal ratio; and if other disturbing causes may be considered proportional to the ratio of change of price they produce in one or more commodities, then all the individual variations of prices will be correctly balanced off against each other in the geometric mean, and the true variations of the value of gold will be detected.

(W.S. Jevons (1865, repr. 1884, p. 121-122))

2.4 Coggeshall 1886

De argumenten van Jevons ten gunste van het meetkundig gemiddelde konden F. Coggeshall (1886) niet overtuigen. Hij schrijft na de herdruk van Jevons' artikelen:

The late Mr. Jevons repeatedly declared his preference for the geometric mean in economic investigations instead of the arithmetic mean, commonly used. He has also referred to the possibility of employing the harmonic mean. But he has nowhere left an explicit statement of his reasons for preferring one mean to the other.

(F. Coggeshall (1886, p. 83))

Daarna merkt hij op, dat in de natuurwetenschappen een gemiddelde doorgaans een fysieke grootheid is, waarbij het van nature duidelijk is of men moet werken met het rekenkundig of met het meetkundig gemiddelde. Bij de economische wetenschap is dit niet zo, omdat men daar meestal werkt met een kunstmatig gemiddelde:

The mean commonly employed by the economist is of a quite different character. It is not a real quantity at all, but is a quantity assumed as the representative of a number of others differing from it more or less. It is made to stand for these other real quantities for convenience in reasoning about them or in drawing general conclusions from them collectively. This is the Fictitious Mean or average, properly so called. Its fictitious character renders it possible to make choice among different values, and thus among different methods of finding it. This is generally overlooked by those who invariably use the arithmetic mean as if it were the only one which could be applicable. The only justification for any fictitious mean is to be found in its convenience as a representative of the true quantities. It is upon this criterion that Mr. Jevons based his choice. The fictitious mean necessarily errs from the correct value for each real quantity which it represents. Mr. Jevons seems to imply that the mean to be chosen is that which most fairly divided the error among the quantities.

(F. Coggeshall (1886, p. 84))

Voor algemeen gebruik is het rekenkundig indexcijfer acceptabel, aldus Coggeshall en ook zijn er situaties denkbaar waarin het indexcijfer van Jevons voldoet, maar het harmonische gemiddelde der prijsverhoudingen geniet de voorkeur, "indien we de fout eerlijk willen verdelen over even belangrijke hoeveelheden".

$$P_{ot}^{Co} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_o^i / p_t^i) \right]^{-1}$$

3. PRIJSINDICES MET CONSTATE GEWICHTEN3.1 Young 1812

De eerste gewogen prijsindex is bedacht door Arthur Young (1812). Hij zette zich sterk af tegen het gebruik van bestaande geldontwaardigingstabellen, omdat ze niet betrouwbaar zouden zijn. In het bijzonder moest de veel geciteerde tabel van Sir George Shuckburg Evelyn (1798) het ontgelden:

Tabel 3.1 : De gemiddelde prijsstijgingen in Engeland van 1050-1800 volgens G. Shuckburg Evelyn.

Date	Index	Date	Index	Date	Index
1050	26	1450	88	1740	287
1100	34	1500	94	1750	314
1150	43	1550	100	1760	342
1200	51	1600	144	1770	384
1250	60	1650	188	1780	427
1300	68	1675	210	1790	496
1350	77	1700	238	1795	531
1400	83	1720	257	1800	562

Bron: M.G. Kendall [1969, p.4]

Shuckburg Evelyn berekende de geldontwaardiging door de prijzen uit de 11e t/m de 18e eeuw van een bepaald pakket¹⁾ goederen en diensten met elkaar te confronteren door middel van de Carli-index. Als basisperiode koos hij 1550.

De voornaamste kritiek van Arthur Young betrof de keuze van het goederenpakket (b.v. geen kleding), de onnauwkeurige definities der goederen en de veranderlijkheid van deze goederen in de loop der eeuwen.

Op basis van een eigen pakket goederen en diensten bepaalde Young de gemiddelde prijsveranderingen voor de 17e en de 18e eeuw. Hij deed dit door middel van een gewogen Carli-index, waarbij hij als gewichten natuurlijke getallen hanteerde:

$$P_{ot}^Y = \frac{\sum_i^i (p_t^i / p_o^i)}{\sum_i^i w_i^i} \quad (w_i^i \in \mathbb{N} \text{ voor } i=1, \dots, n) \quad 2)$$

Youngs conclusie is, dat Sir George de prijsstijgingen zwaar overschatte:

Repeating wheat five times on account of its importance, barley and oats twice, provisions four times, labour five times and reckoning wool, coals and iron, each but once, and considering iron as the general representative of all manufactures, the rise per cent from the prices of one century to those of the other, will amount to no more than 22½ per cent; or only the tenth part of the rise stated by Sir George."

(A. Young (1812))³⁾

1) Zie M.G. Kendall (1969, p.5).

2) En niet zoals H.Rinne (1981, p.206) schrijft: $P_{ot}^Y = \frac{\sum_i^i w_i^i p_t^i}{\sum_i^i w_i^i p_o^i}$.
Zie ook Kneepkens (1983, p.369).

3) Citaat overgenomen van Kendall (1969, p.5).

3.2 Lowe 1822

Omdat sinds het begin van de 19e eeuw steeds meer statistische gegevens beschikbaar kwamen over het verbruik en de prijzen van diverse goederen in Engeland, stelde de Brit Joseph Lowe (1822) voor deze gegevens samen te vatten in z.g. "Tabular Standards": lijsten van goederen met bijbehorende prijzen en relatieve gewichten. Deze Tabular Standards zouden nauwkeuriger maatstaven opleveren voor het indexeren van lonen e.d. dan bijvoorbeeld alleen de graanprijzen, die in het verleden wel eens werden gehanteerd als algemene prijsindicator.

De prijzen van de verschillende goederen zouden in de loop van de tijd steeds opnieuw moeten worden waargenomen, terwijl de relatieve gewichten werden bepaald uit budgetonderzoekingen die door Lowe voor verschillende klassen der Engelse bevolking werden gepubliceerd (zie Kendall (1969, p.6).

Met behulp van deze budgetgegevens schatte Lowe de nationale consumptie van de huishoudingen, uitgesplitst naar verschillende goederencategorieën.

Veel auteurs (uitgezonderd Walsh (1901)) schrijven aan Lowe de volgende index toe:

$$P_{ot}^{Lo} = \frac{\sum_i q_i^t p_t^i}{\sum_i q_i^o p_o^i}$$

Kendall schrijft:

His index for one year, as compared with the previous year, is constructed by evaluating the expenditure on the same quantities at the new prices.

(M.G. Kendall (1969, p.7))

Kennelijk bepaalde Lowe de constante gewichten q^i uit zijn schattingen voor de nationale bestedingen aan de verschillende goederencategorieën¹⁾. Deze hoeveelheden hebben geen onderindices, omdat het niet duidelijk is, uit welk jaar de budgetgegevens stammen. Kendall sluit niet uit dat Lowe's gegevens betrekking hebben op het basisjaar, zodat Lowe (aldus Kendall) in feite de prijsindex van Laspeyres (1871) ontdekte.

3.3 Overige indices

Zonder toelichting worden door Fisher (1922) in zijn "categorisch systeem"²⁾ de harmonische (nr. 9011) en de meetkundige (nr. 9021) variant van het indexcijfer van Young (met constante gewichten w^i) vermeld.

1) C.M. Walsh (1901, p. 84 en 537) gelooft dat Lowe de bestedingen $p^i q^i$ zelf als gewichten hanteerde en dus een gewogen Carli-index maakte. Hij schrijft de methode van Lowe toe aan J.P. Scrope (1833).

2) In "The making of index numbers" ontwikkelt Irving Fisher een soort categorisch systeem van 134 indices, die alle op een bepaalde wijze worden genummerd. Uit de nummering blijkt het type gemiddelde en de methode van weging van het indexcijfer (zie Fisher (1922, p. 461-488 of Köves (1983, p. 303-307)). Naar de nummering van Fisher zal soms in deze studie worden verwezen.

4. PRIJSINDICES MET GEWICHTEN UIT BASIS- OF OBJECT-PERIODE

4.1 Laspeyres 1871

Verschillende auteurs, I. Fisher (1922, p.459), R.G.D. Allen (1975, p.25), H. Rijken van Olst en P.E. Venekamp (1975, p.24) en H. Kneepkens (1979, p.2) verwijzen ten onrechte naar een artikel van Laspeyres uit 1864 als bron van het naar Ernst Louis Etienne Laspeyres genoemde indexcijfer. In dit artikel berekende Laspeyres (1864) voor 48 op de beurs van Hamburg verhandelde goederen (enkelvoudige) prijsindexcijfers voor diverse perioden ten opzichte van twee basisperioden. Als samengestelde prijsindex nam hij het indexcijfer van Carli. In hetzelfde artikel kritiseerde Laspeyres het prijsindexcijfer van Jevons (zie H. 2). Over weging echter repte hij met geen woord.

In 1871 verschenen van de hand van M.W. Drobisch [1871 A, B] twee artikelen over de berekening van de geldontwaarding, waarin hij vooral stelling nam tegen het gebruik van ongewogen gemiddelden. Hij schreef:

Wie unbrauchbar das arithmetische Mittel zur Bestimmung der mittleren Preisänderungen der Lebensbedürfnisse ist, wird folgendes Beispiel zeigen. Gesetz der Preis des Brodes sey im Verhältniss von 5 : 6 gestiegen, der des Salzes aber im Verhältniss von 4 : 3, also in stärkerem Maasse, gesunken, so ist das arithmetische Mittel aus $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{4}$ gleich $\frac{39}{40}$. Es würde aber gewiss ein grosser Irrthum seyn, wenn man daraus schliessen wollte, dass die Verminderung des Salzpreises die Erhöhung des Brodpreises so übertragen habe, dass dadurch in einem Haushalt der Aufwand für beide Lebensbedürfnisse zusammengekommen sich um $\frac{1}{40}$ ermässigte; denn die Geldsumme zum Ankauf der nöthigen Brodes ist ungleich grösser als die, welche der Salzbedarf erfordert. Angenommen, das Verhältniss der letzteren Geldsumme zu der ersteren sey 1 : 15, so giebt dagegen die vorstehende Formel (16), (de Laspeyres-index; H.K.), wenn man in ihr $p_1 = \frac{3}{4}$, $p_2 = \frac{6}{5}$, $q_2 = 15$ und $n = 2$ setzt, $H = \frac{75}{64}$, und zeigt also, dass trotz des Sinkens des Salzpreises durch das, obwohl schwächere, Steigen des Brodpreises eine Vermehrung des Aufwandes für beide Bedürfnisse zusammengekommen um fast $\frac{1}{6}$ herbeigeführt worden ist.

(M.W. Drobisch [1871 A, p.32-33])

In dit voorbeeld past Drobisch de methode van Laspeyres toe. Enige pagina's verder zegt hij dat men in het eenvoudigste geval (nl. als $q_o^i = q_t^i$ ($i=1, \dots, n$)) de geldontwaarding dient te meten volgens:

$$P_{ot} = \frac{\sum_i q_o^i p_t^i}{\sum_i q_o^i p_o^i} \quad \text{of volgens} \quad P_{ot} = \frac{\sum_i q_t^i p_t^i}{\sum_i q_t^i p_o^i}$$

Meestal echter is er geen sprake van een gelijkblijvende consumptie, zodat de twee methoden tot verschillende uitkomsten leiden. Drobisch (1871A, p.39 en 1871B, p.148-149) formuleert dan een generalisatie van beide formules, die verder besproken zal worden in hoofdstuk acht.

$$P_{ot}^{Dr} = \left(\frac{\sum_i p_t^i q_t^i}{\sum_i p_o^i q_o^i} \right) \cdot \left(\frac{\sum_i q_o^i}{\sum_i q_t^i} \right)$$

Kort na publicatie van Drobisch' [1871 A] artikel verschijnt een reactie van E. Laspeyres [1871], waarin de volgende vragen centraal staan:

- I. Kommt nicht das arithmetische Mittel aus allen Preisteigerungen dem von Drobisch geforderten Mittel so nahe, dass man praktisch bei der einfacheren Berechnung aus dem arithmetischen Mittel ohne Fehler bleiben kann?
- II. Ist die von Drobisch geforderte Berechnung, wenn man sich einmal auf den rein theoretischen Standpunkt stellt, schon die richtige, oder lässt sich nicht vielmehr eine, noch richtigere finden? Lässt sich eine noch richtigere finden, so tritt Frage I in neuer Gestalt an uns heran, ob diesem richtigeren Mittel der Preissteigerung für den praktischen Gebrauch das arithmetische Mittel nicht nahe genug kommt? (E. Laspeyres (1871, p.299-300)).

Na enig rekenwerk concludeert Laspeyres ten aanzien van de eerste vraag, dat het ongewogen rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen flink kan afwijken van de index van Drobisch. Als deze index al correct zou zijn, zou het rekenkundig gemiddelde een slechte benadering zijn, aldus Laspeyres. Nadat hij een aantal argumenten van Drobisch over weging van de prijzen met instemming citeert, benadrukt Laspeyres dat men bij de berekening van de geldontwaarding van één vast pakket goederen moet uitgaan. Op deze wijze volgt dan vanzelf de juiste formule voor de prijsindex:

Setzen wir jedes 1851-55 in einem Lande verbrauchte Waarenquantum = μ und die Summe aller Waarenquantum = $\mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_n$ setzen wir weiter den Preis per Centner von $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$ im Zeitraum 1851-55 = $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ und im Zeitraum 1856-60 = $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ so wäre die durchschnittliche Preissteigerung = $(\mu_1 \times v_1) + (\mu_2 \times v_2) + \dots (\mu_n \times v_n) : (\mu_1 \times w_1) + (\mu_2 \times w_2) + \dots (\mu_n \times w_n) = 100 : X$ oder die Preissteigerung =

$$\frac{(\mu_1 \times w_1) + (\mu_2 \times w_2) + \dots (\mu_n \times w_n) \times 100}{(\mu_1 \times v_1) + (\mu_2 \times v_2) + \dots (\mu_n \times v_n)}. \quad (\text{E.Laspeyres [1871, p.306]})$$

In onze notatie luidt deze formule: $P_{ot}^L = \sum_i q_o^i p_t^i / \sum_i q_o^i p_o^i$

Ze is precies gelijk aan de eerste formule die Drobisch voorstelde. De algemene formule van Drobisch wordt door Laspeyres echter resoluut van de hand gewezen:

Die Formel von Drobisch genügt nicht, sie kann ad absurdum führen, denn nach derselben kann sich eine durchschnittliche Preissteigerung oder Preissenkung ergeben, während alle einzelnen Waaren im Preise gleich geblieben sind.

(E. Laspeyres (1871, p.308))

De praktische toepasbaarheid van zijn "eigen" formule wordt door Laspeyres in twijfel getrokken, omdat gegevens over de q_o^i (voor heel Duitsland) niet of moeilijk te krijgen zijn. De in zijn berekeningen (met Hamburgse data) gevonden verschillen met het ongewogen gemiddelde zijn echter zo gering (aldus Laspeyres), dat toepassing van de formule van Carli gerechtvaardigd blijft.

4.2 Paasche 1874

Na verschijning van een publicatie over de gemiddelde prijzen van meer dan 300 soorten goederen die werden verhandeld in Hamburg tussen 1847 en 1872, besloot H. Paasche (1874) in navolging van Laspeyres (1864) het onderzoek naar de algemene prijsontwikkelingen weer op te nemen. Evenals Drobisch verwierp hij het gebruik van een ongewogen gemiddelde en pleitte hij voor weging met de geconsumeerde hoeveelheden. Paasche wees de algemene methode van Drobisch af, waarvan hij ten onrechte veronderstelde, dat deze neerkomt op het berekenen van de waarde-index¹⁾. Zonder zich te bekommeren om het alternatief dat Laspeyres drie jaar eerder aangaf en zonder verwijzing naar de tweede formule van Drobisch, bepleitte Paasche zijn "eigen" methode met de woorden:

Will man also unter Berücksichtigung des Consums die Preisveränderung constataren, so wird man nicht die Quantitäten beider Zeitabschnitte in Anrechnung bringen dürfen, sondern nur die des einen und sagen: die jetzt verbrauchte Menge verschiedener Waaren würde nach früheren Preisverhältnissen so und so viel gekostet haben, nach jetzigen so und so viel, die Differenz kann allein durch den Preisunterschied bedingt sein, als muss die Verhältnisszahl, welche den Unterschied ausdrückt, der sich für die Summe vieler Waaren in diesen beiden Geldmengen zeigt, die durchschnittliche Preisveränderung jener Producte ergeben. Diese Berechnungsweise wird sich unverändert auch auf ein ganzes Land anwenden lassen, wenn auch zwischen dem ersten und zweiten Zeitpunkt sich die Zahl der Bevölkerung und ihre Bedürfnisse geändert haben.

(H. Paasche (1874, p.172-173))

In formulevorm luidt zijn index:
$$P_{ot}^P = \frac{\sum_i q_t^i p_t^i}{\sum_i q_o^i p_o^i}$$

4.3 Overige indices

De prijsindex van Laspeyres is te schrijven als een gewogen rekenkundig gemiddelde van de prijsverhoudingen met als gewichten de relatieve bestedingen aan goed i in de basisperiode. R.H. Palgrave (1886) was de eerste auteur, die een rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen toepaste, gewogen met de relatieve bestedingen in de objectperiode. In onze notatie luidt zijn prijsindex:

$$P_{ot}^{Pal} = \sum_i \left(\frac{v_t^i}{\sum_i v_t^i} \right) \frac{p_t^i}{p_o^i} \quad (\text{met } v_t^i = p_t^i q_t^i)$$

Naast de hiervoor besproken rekenkundige varianten vindt men de met de relatieve bestedingen (in basis- resp. object-jaar) gewogen harmonische en meetkundige gemiddelden der prijsverhoudingen bij Irving Fisher (1922). In zijn indexcijfer-systeem verschijnen ze onder de nummers 13, 19, 23 en 29. Het met de bestedingen uit de objectperiode gewogen harmonische gemiddelde der prijsverhoudingen is gelijk aan de prijsindex van Paasche.

1) Ruim honderd jaar later maakt H. Rinne (1981, p.207) dezelfde vergissing. Zie ook H. Kneepkens (1983, p.369).

5. PRIJSINDICES MET GEMENGDE GEWICHTEN5.1 Edgeworth 1887

In de jaren 1887 t/m 1889 verschenen drie omvangrijke memoranda van F.Y. Edgeworth met als onderwerp "the best methods of ascertaining and measuring variations in the value of the Monetary Standard". Ze werden herdrukt in Edgeworth (1925, p.195-343) onder de titel "Measurement of change in value of money".

Edgeworth onderscheidt in zijn memoranda een aantal meetproblemen, die alle tot het hoofdonderwerp gerekend moeten worden. Hij vat ze zelf als volgt samen:

To one taking a general view of the subject there stand out four main types, four modes of measurement distinct in idea and definition, though occasionally coincident in practice. The first sort of measure is based upon the change in the prices of finished products, the object being to find, or rather show how to find at any future time, a ratio or Unit such that the creditor in the future receiving as many Units as he at present receives pounds may derive as much advantage in the way of consumption then as now. The second sort of measure is based upon all the articles which trade deals with, the object being to find a Unit such that the debtor in the future, paying as many Units as at present pounds, may not be more hampered in his business then than now. There is thirdly the measure of that appreciation which it is the object of bimetallism and similar projects to correct? The fourth sort of measure is required not so much for any particular practical object as for the more general purposes of Monetary science, to interpret the past and forecast the future.

(F.Y. Edgeworth (1925, p.199-200))

Ieder van deze methodes wordt verder uitgewerkt. Edgeworth schrijft over de eerste:

(1) The general principle of the first method may be embodied in slightly different rules, of which the following two may claim to be the best. (a) In order to ascertain the change in the value of money between two epochs, find the national expenditure per head upon finished products or articles of consumption (including unproductive services) at each epoch. The ratio of the new to the old expenditure is the required measure of depreciation, or Unit. Otherwise (B) thus (the general principle being interpreted somewhat differently): Find the quantities of each article consumed at the two epochs, and take the mean of each couple. Multiply each of these mean items by the old price of the corresponding article and add together these amounts. Proceed similarly with the new prices. The ratio of the latter sum to the former is the required Unit. There are other formulae, in all more than half a dozen. But there is not much to choose, among them. And the exercise of a choice may exceed the powers and province of the writer.

(F.Y. Edgeworth (1925, p.200))

De onder (B) geschetste methode is wat men sindsdien de prijsindex van (Marshall en) Edgeworth noemt. In formulevorm luidt deze:

$$P_{ot}^E = \frac{\sum_i \frac{1}{2}(q_o^i + q_t^i) p_t^i}{\sum_i \frac{1}{2}(q_o^i + q_t^i) p_o^i}$$

Edgeworth maakt duidelijk, dat de keuze tussen (A) en (B) berust op het al dan niet aanwezig zijn van verschillen in de hoeveelheden q_o^i en q_t^i ($i=1, \dots, n$).

Als deze hoeveelheden gelijk zijn maakt het niets uit of men de methodes van

(1) Laspeyres, (2) Paasche, (3) Sidgwick (het rekenkundig gemiddelde van de indices van Laspeyres en Paasche, zie par. 6.1) of (4) Edgeworth toepast.

Indien er wel (kleine) verschillen tussen de q_0^i en q_t^i bestaan zullen de Laspeyres- en Paasche-indices niet meer samenvallen en kan men beter gebruik maken van een gemiddeld indexcijfer, dat "de fout minimaliseert". In de praktijk zou de op de vorige pagina besproken index hieraan het beste voldoen, aldus Edgeworth:

The first four methods are all equally good if our fundamental hypothesis is strictly true. Where, as in fact, the hypothesis is only hypothetically true, the third and fourth methods, being of the nature of means, are apt to minimise error.

On the whole, the fourth method may appear the best; abstracting the difficulty of obtaining the proper numerical data, which is beyond the scope of this paper.

(F.Y. Edgeworth (1925, p.215))

5.2 Walsh 1901

In 1901 publiceerde Correa Moylan Walsh zijn boek "The measurement of general exchange value". In dit boek is sprake van de ruilwaarde van een goed A ten opzichte van een goed B : een tijd- en plaatsgebonden kwantitatieve maat, die aangeeft hoeveel men van B kan krijgen in ruil voor een zekere hoeveelheid van A. Men kan, aldus Walsh, de specifieke ruilwaarde van goed A t.o.v. ieder (ander) goed bepalen, maar er bestaat ook nog een "general exchange value" van goed A ten opzichte van alle (andere) goederen tegelijk. Deze "general exchange value" voor goed A is gelijk aan ieder van de specifieke ruilwaarden t.o.v. de individuele goederen (zie Walsh (1901, p.15-18)).

Nu is het onmogelijk om alle specifieke ruilwaarden van de goederen onderling direkt te meten. Gelukkig hebben we de beschikking over geld, wat dient als "common denomination" voor alle andere dingen. Met behulp van de prijzen¹⁾ kan men de specifieke ruilwaarden en de general exchange values (in het bijzonder die van het geld zelf) bepalen:

By means of prices, money acts as a perfectly satisfactory measure of the exchange-values of other things in the same place at the same time. Now money alone is brought into direct relationship with every other exchangeable thing, the relations between these other being intermediated through their relations to money. Hereby our attention is confined to the particular exchange-values of all other things in money, as indicated by their prices, or, which is the same thing inverted, to the particular exchange-values of money in all other things singly. Consequently it is primarily only the general exchange-value of money in all other things collectively that we are concerned with measuring; for after measuring it and finding its constancy or variation at different times, or in different places, we can measure the constancy or variation of any other thing in general exchange-value by its known constancy or variation in relation to money.

(C.M. Walsh (1901, p.20))

1) Prijzen worden bij Walsh niet gemeten in geldeenheden per volumemaatstaf, maar in geldeenheden. Walsh (1901, p.29) schrijft in een voetnoot:

Price is not the exchange-value of the thing in money, but, being the sum of money itself, it expresses or measures the exchange-value of the thing in money.

Dit betekent, dat Walsh de prijzen (waarden) van wel omschreven hoeveelheden goederen meet. De volumina q_i waarover in het volgende gesproken gaat worden, zijn in de optiek van Walsh dan ook (dimensieloze) aantallen.

Prijzen zijn de uitdrukking van de ruilwaarden der goederen in geld. Prijsveranderingen zijn de inversen van de veranderingen in de ruilwaarden van het geld ten opzichte van de geprijsde goederen. In de veranderingen van de general exchange value zijn we uiteindelijk geïnteresseerd, niet in de laatste plaats omdat ruilwaarden en (gemiddelde) prijzen relatieve begrippen zijn, afhankelijk van de keuze der "mass units". Zo is de gemiddelde prijs p_t^i van een goederencategorie¹⁾ op tijdstip t :

$$p_t^i = \frac{\sum_c q_t^c p_t^c}{\sum_c q_t^c}$$

Hierbij wordt gesommeerd over alle goederen c in klasse i . De grootte q_t^i van klasse i op tijdstip t wordt gegeven door het totaal aantal objecten erin: $q_t^i = \sum_c q_t^c$. De bestedingen $v_t^i = p_t^i q_t^i = \sum_c p_t^c q_t^c$ bepalen het "gewicht" van de klasse i .

Indien tussen de tijdstippen o en t de grootten q^i der klassen niet veranderen, kan men als gemiddelde prijsverandering het beste het indexcijfer van Lowe (-van Scrope- volgens Walsh) hanteren. Als tussen o en t de bestedingen v^i aan de verschillende klassen niet veranderen, maar wel de "hoeveelheden" q^i , dan moet men in het indexcijfer van Lowe voor de q^i het meetkundig gemiddelde der q_o^i en q_t^i substitueren (en niet het rekenkundig gemiddelde²⁾, zoals Edgeworth deed).

$$P_{ot}^{WI} = \frac{\sum_i \sqrt{q_o^i q_t^i} p_t^i}{\sum_i \sqrt{q_o^i q_t^i} p_o^i}$$

In feite kan men deze formule in beide (reeds genoemde) gevallen toepassen.

Voor het meest algemene geval, waarbij zowel de hoeveelheden q^i als de bestedingen v^i veranderen, bepleit Walsh een "universele methode" die de (beide) voorgaande methode(s) omvat. Zie Walsh (1901, p.381-383). Het is (in de terminologie van Fisher) de "factor-antithesis" van het eerste (WI) indexcijfer van Walsh:

$$P_{ot}^{WII} = \frac{\sum_i p_t^i q_t^i}{\sum_i p_o^i q_o^i} \cdot \frac{\sum_i q_o^i \sqrt{p_o^i p_t^i}}{\sum_i q_t^i \sqrt{p_o^i p_t^i}}$$

5.3 Törnqvist 1936 en 1957

Kijken we nu naar de rekenkundige, de meetkundige en de harmonische gemiddelden der prijsverhoudingen met gemengde gewichten, dan zien we dat Fisher (1922, p.482-483) als gewichten bij deze indices (nrs. 1003, 1123 en 1013) alleen maar het meetkundig gemiddelde der relatieve bestedingen propageert. De rekenkundige manier van middelen der (relatieve) bestedingen komt in de indexcijferliteratuur weinig voor.

1) Walsh aggregeert door gelijksoortige goederen bijeen te brengen in categorieën ("classes"), die dan verder als aparte eenheden worden behandeld.

2) Zie Walsh (1901, p.307-310).

Fisher (1922, p.485) noemt ook nog de variant (nr.3153) waarbij de q_o^i en q_t^i harmonisch worden gemiddeld. Deze variant werd later door R.C. Geary (1958, p.98) aanbevolen in het kader van koopkrachtvergelijkingen tussen twee landen.

Voorzover bekend bleef het tot nu toe onopgemerkt, dat men hierbij twee varianten¹⁾ kan onderscheiden:

$$\begin{array}{cc} \text{Variant I} & \text{Variant II} \\ W_I^i = \frac{1}{2} \left(\frac{v_o^i}{\sum_i v_o^i} + \frac{v_t^i}{\sum_i v_t^i} \right) & W_{II}^i = \frac{v_o^i + v_t^i}{\sum_i (v_o^i + v_t^i)} \end{array}$$

In variant I worden de relatieve bestedingen gemiddeld en in variant II de absolute bestedingen (waarna de W_{II}^i worden genormeerd, zó dat $\sum_i W_{II}^i = 1$).

Variant I wordt in combinatie met het meetkundig gemiddelde der prijsverhoudingen allerwege²⁾ toegeschreven aan L. Törnqvist (1936 en 1957). In logaritmen genoteerd luidt de formule:

$$\ln P_{ot}^T = \sum_i \frac{1}{2} \left(\frac{v_o^i}{\sum_i v_o^i} + \frac{v_t^i}{\sum_i v_t^i} \right) \ln \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} \right)$$

Bekijken we het veel geciteerde (1936) artikel, dan lezen we:

The Bank of Finland's present consumption price index is calculated as a weighted logarithmic (= geometric) average, vulgar logarithms being used. The weights are variable in principle and the chain method is employed in the calculation. As soon as it is established that the weighting system employed no longer constitutes a good approximation for the per mille rates of the consumers' total expenditure that fall to the share of the respective class of goods, an adjustment of the weights is undertaken and the adjusted weighting system is applied in calculating the changes from week to week. Mathematically the calculations are made according to the following formula:

$$\log P_{t_0}^t = \log P_{t_0}^{t'} + \epsilon c (\log p_t - \log p_{t'}) : \epsilon c$$

(L. Törnqvist (1936, p.28))

Hierin zegt Törnqvist echter niet expliciet, hoe hij zijn gewichten c berekent en aanpast als veranderingen in de uitgaven aan de verschillende goederencategorieën daartoe aanleiding geven. In 1957 verschijnt van zijn hand een artikel over een indexcijfer van de posttarieven, waarin hij verwijst naar de in 1936 geïntroduceerde index. Hier gaat hij nader in op de keuze van de gewichten:

The weights of the group indexes having varied considerably during the research period, a reason was provided for utilizing a calculation system in which these variations can be taken into consideration. In this case, it has been found convenient to make use of the Divisia-Törnqvist logarithmic index numbers. These index numbers are defined by the following equation:

$$\log I_o^{v+1} - \log I_o^v = \sum \frac{C_{v, v+1} (\log p_{v+1} - \log p_v)}{\epsilon C_{v, v+1}}$$

in which I_o^v och I_o^{v+1} indicate the old and the new value of the tariff index number, whilst p_v is the value of the special index number before and p^{v+1} its value after the tariff rise. The weight $C_{v, v+1}$ indicates the importance

1) Bij het meetkundig middelen der bestedingen vallen beide varianten samen.

2) Kloeck (1966, p.9) verwijst naar Törnqvist (1957). Hasenkamp (1978), Deaton and Muellbauer (1980, p.174) en Diewert (1981, p.187) verwijzen naar Törnqvist (1936), maar allemaal naar de verkeerde pagina's 1 t/m 8. Overigens komt de index van Törnqvist "toevallig" ook voor bij Fisher (1922, p.473), nl. als "crossing" van de formules 23 en 29 (zie par. 4.3).

of the special index in question at the time of the tariff rise. In practice, one has had to be contented, with defining $C_{v,v+1}$ as the arithmetic mean of the revenue shares during the year of the rise and the closely preceding year.

(L. Törnqvist (1957, p.23))

Afhankelijk van wat Törnqvist met "revenue shares" bedoelde (relatief of absoluut?) paste hij variant I dan wel II toe. In het eerste geval had hij echter niet hoeven delen door $\Sigma C_{v,v+1}$, omdat dit dan gelijk is aan één.

Het is daarom niet onwaarschijnlijk, dat hij in feite variant II toepaste.¹⁾

5.4 Overige indices

Voor de hand liggende generalisaties van de in de vorige paragrafen besproken indices met gemengde gewichten, zijn indexcijfers waarin men de gewichten uit de basis- en object-periode convex combineert (rekenkundig of meetkundig).

Bij de indices van Edgeworth en van Walsh levert dit de volgende gewichten op:

$$(I) \quad g^i = \lambda q_o^i + (1-\lambda) q_t^i \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$(II) \quad g^i = (q_o^i)^\mu (q_t^i)^{1-\mu} \quad (0 \leq \mu \leq 1)$$

Beide generalisaties worden genoemd in Winkler (1954, p.29). Ze werden zonder referentie aan Winkler ook besproken in Kneepkens (1979, p.8-9).

De wegingsschema's uit de vorige paragraaf kunnen op soortgelijke wijze worden gegeneraliseerd:

<u>Rekenkundig</u>	Variant I	$(0 \leq \lambda \leq 1)$	Variant II
	$W_I^i = \lambda \frac{v_o^i}{\sum_i v_o^i} + (1-\lambda) \frac{v_t^i}{\sum_i v_t^i}$		$W_{II}^i = \frac{\lambda v_o^i + (1-\lambda) v_t^i}{\sum_i (\lambda v_o^i + (1-\lambda) v_t^i)}$

<u>Meetkundig</u>		$(0 \leq \mu \leq 1)$	
-------------------	--	-----------------------	--

$$W_M^i = \frac{(v_o^i)^\mu (v_t^i)^{1-\mu}}{\sum_i (v_o^i)^\mu (v_t^i)^{1-\mu}}$$

Ze kunnen worden toegepast in combinatie met meetkundige, rekenkundige en harmonische gemiddelden der prijsverhoudingen. W_I en W_{II} leveren dan gegeneraliseerde Törnqvist(-achtige) prijsindices op.

1) Ook Marshall (1887, p.372) propageerde deze variant (gecombineerd met het rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen) toen hij schreef:

This simplest plan is to select a number of representative wholesale articles and to add together their prices at different times. The next step in advance is to estimate the importance of each commodity by the mean of the amount spent on it at the different periods under investigation. This importance or weight is then multiplied into the change in price of the commodity. For instance, if the value of the pepper consumed in an average year in England is £500,000, and that of the tea is £11,000,000, then a rise in the price of tea by 1 per cent counts for as much as a rise in the price of pepper by 22 per cent. If the weight of pepper is taken as equal to 1, that of tea must be 22.

6. COMBINATIES VAN LASPEYRES- EN PAASCHE-INDICES6.1 Sidgwick 1883

De waarden van de prijsindexcijfers van Laspeyres en van Paasche kunnen in de praktijk flink verschillen, zeker als de afstand tussen de basisperiode en de objectperiode wat groter is. Henry Sidgwick (1883) was zich van dit probleem bewust, maar kon geen criteria bedenken om op verantwoorde wijze tussen de twee indices te kunnen kiezen:

Now I do not see any ground for adopting either of these procedures rather than the other; hence, so far as their conclusions diverge, we must say that the question whether gold has risen or fallen in value does not properly admit of a single exact answer. However perfectly the facts might be known, there must always be a margin of inexactness in our determination of the amount of change, corresponding to the difference between the results of the two procedures.

(H. Sidgwick (1883, p.68))

In een voetnoot merkt hij dan op, dat men het keuzeprobleem kan ontwijken, door het rekenkundig gemiddelde van de twee indices te nemen. Dit gaat wel ten koste van de interpreterbaarheid, aldus Sidgwick (1883, p.68)

$$P_{ot}^S = \frac{1}{2}(P_{ot}^L + P_{ot}^P)$$

Deze mogelijkheid werd overigens al eerder door Drobisch (1871 C) genoemd, maar met nog meer terughoudendheid dan bij Sidgwick (de x en y in het citaat zijn de indices van Laspeyres en Paasche):

Man könnte nun zwar davon das arithmetische Mittel nehmen, welches giebt $\frac{1}{2}(x+y) = 124,48$, aber muss denn der richtige Werth gerade in der Mitte zwischen x und y liegen?

(M.W. Drobisch (1871 C, p.425))

6.2 Fisher 1922

Het meetkundig gemiddelde van de prijsindices van Laspeyres en Paasche werd voor het eerst genoemd in een voetnoot bij C.M. Walsh (1901, p.429). Deze variant kreeg echter pas ruime bekendheid na de verschijning in 1922 van Irving Fishers standaardwerk "The Making of Index Numbers". Hierin vergelijkt Fisher 134 indices met elkaar, waaronder de modus, de mediaan en de drie (in H.1 besproken) gemiddelden der prijsverhoudingen, "aggregative indexnumbers" en de factorantitheses¹⁾ van al deze indices. Daarbij maakt hij onderscheid tussen diverse wegingsmethoden. Uit verschillende paren indexcijfers construeert Fisher weer nieuwe door gemiddelden (doorgaans meetkundig) van deze indices te nemen ("crossing indexes") of via het mengen van de gewichten ("crossing weights").

Op zoek naar de beste index verwerpt Fisher de ongewogen indices en hun derivaten en de indexcijfers waarin de modus of de mediaan worden toegepast. Hij schrijft:

1) Uitgaande van een prijsindex P_{ot} en de daarmee (via factorenverwisseling) corresponderende hoeveelheidsindex Q_{ot} kan men een nieuwe prijsindex P_{ot}^* construeren, die Fisher de "factorantithesis" van P_{ot} noemt:

$$P_{ot}^* = V_{ot} / Q_{ot} \quad \text{Hierin is } V_{ot} \text{ de waarde-index: } V_{ot} = \frac{\sum p_{tq}^i}{\sum p_{oq}^i}$$

Thus far in our search for the most accurate index number, we have eliminated (1) the "S" group, i.e. all simples and their progeny, and (2) the "M" group, - all medians and modes and their progeny. We have found these index numbers "freakish" or "haphazard," the first group because constructed from badly (that is, evenly) weighted material, and the second because so largely insensitive to changes in the individual prices and quantities.

(I. Fisher (1922, p.218))

Op basis van een numerieke evaluatie (alle indexcijfers worden voor vijf opeenvolgende jaren berekend m.b.v. gegevens over prijzen en volumina van 36 goederen in de jaren 1913-1918) verwerpt Fisher (1922, p.219) voorts alle indices waarbij volgens hem teveel sprake is van "bias".

Hierna blijven er 47 indices over, die echter niet alle voldoen aan de door Fisher noodzakelijk geachte Time Reversal Test en Factor Reversal Test. Via de Factor Reversal Test eist Fisher (1922, p.72 e.v.) van een "goed" prijsindexcijfer P_{ot} , dat het vermenigvuldigd met zijn tegenhanger Q_{ot} (ontstaan uit P_{ot} door factorenverwisseling) de waarde-index V_{ot} oplevert: $P_{ot} Q_{ot} = V_{ot}$. De Time Reversal Test eist dat de waarde van een prijsindexcijfer P_{ot} verandert in zijn reciproke, als men (in de formule) de plaatsen van de basisperiode o en van de objectperiode t verwisselt: $P_{to} P_{ot} = 1$.

Na toepassing van deze twee tests resteren er nog 13 indices, niet noodzakelijk alle 13 beter dan de op basis van de tests uitgesloten 34 indices, maar wel de groep waarin zich het beste indexcijfer bevindt, aldus Fisher:

In other words, out of the 47 best formulae we are selecting, not necessarily the best 13, but the 13 which we know must include the best one of all. In still other words, while we have no reason to think that each of these 13 is superior to all the 34 excluded, we do have good reason to believe that each of these 34 is inferior to some one of the 13.

(I. Fisher (1922, p.220))

Hierna presenteert Fisher nog twee keuze-argumenten waardoor het aantal kandidaat-beste-indices wordt gereduceerd tot vier. "Crossed formulae" worden door hem hoger gewaardeerd dan "cross weight formulae" en de daarvan afgeleide indices. Verder is volgens Fisher het (meetkundig) gemiddelde van twee veelbelovende indices zo mogelijk nog accurater dan de beide indexcijfers zelf. Hij schrijft:

We can prefer the crossed formulae to the cross weight formulae and their derivatives [.....]

This exclusion is based on the consideration that the cross weight formulae fail to insure a middle course between the original formulae whose weights are crossed. They seem slightly erratic as compared with the rest. Again, on the principle that two equally promising estimates or measures may probably be improved in accuracy by taking their average, 307 and 309 may next be excluded in favor of their cross, 5307; and, likewise, 323 and 325, in favor of their cross, 5323.

This leaves the four formulae, 353, 2353, 5307, 5323.

(I. Fisher (1922, p.220-221))

De nummers in dit citaat zijn uit het "coderingssysteem" van Fisher (zie noot 2 bij par. 3.3).

Nummer 2353 is de wortel van de prijsindex van Edgeworth en de factorantithesis hiervan. De nummers 5307 en 5323 zijn "crossings" van "crossings" van "crossings":

$$F_{ot}^{5307} = \sqrt[8]{F_{ot}^7 \cdot F_{ot}^8 \cdot F_{ot}^9 \cdot F_{ot}^{10} \cdot F_{ot}^{13} \cdot F_{ot}^{14} \cdot F_{ot}^{15} \cdot F_{ot}^{16}} \quad \text{en} \quad F_{ot}^{5323} = \sqrt[8]{\prod_{j=23}^{30} F_{ot}^j}$$

Hierin zijn de nrs. 13 en 15 harmonische, en 7 en 9 rekenkundige gemiddelden der prijsverhoudingen, resp. gewogen met $p_{oq_o}^i / p_{oq_o}^i$, $p_{oq_t}^i / p_{oq_t}^i$, $p_{tq_o}^i / p_{tq_o}^i$ en $p_{tq_t}^i / p_{tq_t}^i$. De nrs. 14, 16, 8 en 10 zijn (in dezelfde volgorde) de factorantitheses van de hiervoor genoemde indices.

In 5323 zijn 23, 25, 27 en 29 meetkundige gemiddelden der prijsverhoudingen, resp. gewogen met de in de vorige alinea genoemde gewichten. De nrs. 24, 26, 28 en 30 zijn hiervan weer de factorantitheses.

Fisher verwerpt nu de index 2353, omdat hierin een (additieve) variant van "weight crossing" wordt toegepast. Uit de overgebleven drie indices kiest hij tenslotte 353 als het "ideale" indexcijfer. Het is de wortel uit de indices van Laspeyres en Paasche:

$$P_{ot}^F = \sqrt{P_{ot}^L P_{ot}^P}$$

De keuze van Fisher op grond van "accuracy" komt nogal gekunsteld over. Na verwerping van 2353 schrijft hij:

This leaves the three formulae, 353, derived from aggregates; 5307, derived from arithmetics and harmonics; and 5323, derived from geometrics. From these I am inclined next to eliminate 5307 on the ground that it descends from ancestors (7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16) far wider apart than does 353 or 5323. There seems more chance of error in using figures wide apart than in using those close together. If we must prefer one of the two remaining formulae (353 and 5323) to the other I would drop 5323 for the same reason. Thus Formula 353, derived from aggregates, remains to take the first prize for accuracy. But I should not quarrel with those who would divide the prize with 2353, 5307, or 5323, especially the last.

(I. Fisher (1922,p.220))

Fisher benadrukt de superioriteit van zijn formule daarna nog eens, door te wijzen op de algebraïsche eenvoud ervan.

6.3 Overige indices

De methode die Winkler (1954) toepaste bij het (convex) combineren van wegings-schema's voor prijsindices (zie par. 5.4) kan men ook toepassen op de indices zelf. Beperken we ons hier tot combinaties van Laspeyres- en Paasche-indices, dan ontstaan er op deze wijze gegeneraliseerde prijsindexcijfers van Sidgwick en van Fisher: rekenkundige en meetkundige convexe combinaties van de indices van Laspeyres en van Paasche.

$$p_{ot}^{gS} = \alpha P_{ot}^L + (1-\alpha) P_{ot}^P \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

$$p_{ot}^{gF} = (P_{ot}^L)^\beta (P_{ot}^P)^{1-\beta} \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

7. PRIJSINDICES MET GEWICHTEN UIT PERIODEN TUSSEN DE BASIS- EN DE OBJECT-PERIODE

Een probleem bij de constructie van prijsindexcijfers zijn de veranderingen in het consumptiepatroon die optreden in de loop van de tijd. Hieraan kan men wat tegemoet komen, door gebruik te maken van de prijzen en hoeveelheden uit alle perioden tussen de basisperiode en de objectperiode.

We bespreken nu enige van dergelijke indices.

7.1 Divisia 1925

Francois Divisia (1925-26) beschouwde de prijzen $p^i(t)$ en volumina $q^i(t)$ als differentieerbare functies van de tijd t . Neem aan dat men de bestedingen splitst in een prijs- en een volume-component: $\sum_i p^i(t) q^i(t) = P(t) Q(t)$.

Veranderingen in het prijsniveau $P(t)$ en in het volumeniveau $Q(t)$ worden dan beschreven door de differentiaalvergelijking (met continue-tijdsafhankelijke gewichten $w^i(t) = p^i(t) q^i(t) / \sum_i p^i(t) q^i(t)$):

$$\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{Q'(t)}{Q(t)} = \sum_i w^i(t) \frac{\frac{d}{dt} p^i(t)}{p^i(t)} + \sum_i w^i(t) \frac{\frac{d}{dt} q^i(t)}{q^i(t)}$$

Volgens Divisia (1925, p.1000) ligt het voor de hand om de bovenstaande vergelijking in mootjes te hakken en het eerste (resp. tweede) deel van beide leden aan elkaar gelijk te stellen. Hierdoor ontstaan twee aparte vergelijkingen voor het prijsniveau en voor het volumeniveau, waaruit de prijsindex en de hoeveelhedenindex van Divisia worden afgeleid:

$$P_{ot}^{Di} = \frac{P(t)}{P(o)} = \exp \int_0^t \sum_i w^i(t) \frac{d}{dt} (\ln p^i(t)) dt$$

$$Q_{ot}^{Di} = \frac{Q(t)}{Q(o)} = \exp \int_0^t \sum_i w^i(t) \frac{d}{dt} (\ln q^i(t)) dt$$

7.2 Gini 1931

Corrado Gini (1931, p.10) was niet tevreden met het gemak, waarmee men in de praktijk kiest voor een Laspeyres-index, een Paasche-index of een compromis à la Fisher. Indien voor elke periode $k=0,1,\dots,t$ de hoeveelheden q_k^i bekend zijn, kan men beter een (meetkundig) gemiddelde van Lowe-achtige indices nemen, aldus Gini¹⁾.

$$P_{ot}^{GI} = \sqrt[t+1]{\frac{\sum_i p_t^i q_k^i}{\prod_{k=0}^t \frac{\sum_i p_o^i q_k^i}{\sum_i p_o^i q_o^i}}}$$

1) Een andere variant van Gini(1931) is de volgende, waarbij de indexcijferformule voor P_{ok} (en P_{kt}) nog vrij te kiezen is:

$$P_{ot}^{GII} = \sqrt[t+1]{\prod_{k=0}^t \frac{P_{ok} P_{kt}}{P_{ok} P_{kt}}}$$

7.3 Duon 1950

Gaston Duon (1950, p.140) noemt het keuzedilemma tussen de indexcijfers van Laspeyres en Paasche een kunstmatig probleem en stelt voor, de prijzen p_t^i en p_o^i te wegen met de som van alle hoeveelheden q_k^i tussen de basis- en object-periode.¹⁾

Les prix sont alors réellement pondérés par des quantités et l'indice compare, entre les deux époques où on a observé les prix p_o^i et p_t^i , les dépenses afférentes aux quantités produites ou consommées dans cet intervalle de temps selon deux évaluations, l'une aux prix initiaux et l'autre aux prix finaux. Le choix des poids est alors parfaitement objectif et on n'a plus à se déterminer en faveur d'une formule de Paasche, de Laspeyres ou de toute autre expression plus compliquée. On évite un problème artificiellement créé par une interprétation très restrictive de la notion de pondération et par le désir d'une symétrie entre p et q qui se révèle purement formelle.

(G.J. Duon(1950,p.140)

$$P_{ot}^{Du I} = \frac{\sum_i \left(\sum_{k=o}^t q_k^i \right) p_t^i}{\sum_i \left(\sum_{k=o}^t q_k^i \right) p_o^i}$$

Na evaluatie van deze prijsindex met behulp van Fisher's tests schrijft Duon: *Cette nouvelle conception est historique puisqu'elle laisse place aux habitudes de production ou de consommation de toutes les époques convertes par l'indice en assurant une synthèse des phases successives. Toutefois, elle ignore le chemin réellement suivi par le marché et laisse ainsi l'influence prépondérante aux systèmes de prix de chaque extrémité de la période : elle mesure bien, en l'isolant, la nouvelle situation des prix par rapport à l'ancienne.*

(G.J. Duon [1950, p.141])

Hierna merkt hij op, dat men $P_{ot}^{Du I}$ kan opvatten als een rekenkundig gemiddelde der prijsverhoudingen met als gewichten: $w_i = \frac{t}{k=o} \left(p_o^i q_k^i / \sum_i p_o^i q_k^i \right)$

Neemt men in plaats hiervan de totale relatieve bestedingen aan goed i (tussen o en t), dan ontstaat een gemakkelijker te interpreteren alternatief, aldus Duon:

$$P_{ot}^{Du II} = \frac{\sum_i \sum_{k=o}^t \left(\frac{v_k^i}{v_k^i} \right) \frac{p_t^i}{p_o^i}}{\sum_i \sum_{k=o}^t \frac{v_k^i}{v_k^i}}$$

Eerder noemden we het wenselijk (Kneepkens(1979,p.11-15)) om als gewicht in het prijsindexcijfer van Duon (variant I) een voortschrijdend gemiddelde der q_k^i te nemen. Desgewenst kan men de q_k^i wegen, bijvoorbeeld door exponentieel te effen, waarbij de meest recente hoeveelheden het grootste gewicht krijgen.

Het idee van "decreasing influence of previous periods" in deze context komt van P.E. Venekamp (1976,p.99). In formulevorm luiden beide varianten (T vast):

$$P_{ot}^{KI} = \frac{\sum_i \left(\sum_{k=o}^T q_{t-k}^i \right) p_t^i}{\sum_i \left(\sum_{k=o}^T q_{t-k}^i \right) p_o^i} \quad \text{en} \quad P_{ot}^{KII} = \frac{\sum_i \left(\sum_{k=o}^T \lambda^k q_{t-k}^i \right) p_t^i}{\sum_i \left(\sum_{k=o}^T \lambda^k q_{t-k}^i \right) p_o^i} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

1) Ook W.M. Persons (1928, p.48-49) vermeldt deze methode.

8. BIJZONDERE FACTORANTITHESES

In par. 6.2 (noot 1) zagen we, dat men uitgaande van een prijsindex P_{ot} en de daarmee corresponderende hoeveelheidsindex Q_{ot} een nieuwe prijsindex $P_{ot}^* = V_{ot}/Q_{ot}$ kan construeren, de "factorantithesis" van P_{ot} . We bespreken hier enkele interessante factorantitheses, die in het verleden werden gepropageerd.

8.1 Drobisch 1871

De prijsindex van Drobisch (1871 A, B) werd al in par. 4.1 genoemd bij de behandeling van Laspeyres. Het is de factorantithesis van de prijsindex van Dutot:

$$P_{ot}^{Dr} = V_{ot} / (\sum_i q_t^i / \sum_i q_o^i)$$

Het argument van Drobisch was, dat in de perioden o en t de gemiddelde prijs van het pakket goederen resp. gelijk is aan $P_o = \sum_i p_o^i q_o^i / \sum_i q_o^i$ en $P_t = \sum_i p_t^i q_t^i / \sum_i q_t^i$!)

Het quotiënt van beide prijsgemiddelden is de prijsindex van Drobisch.

8.2 Lehr 1885

Julius Lehr (1885) bedacht een variant, waarin hij gebruik maakte van consumptie-eenheden. Zo'n "Genusseinheit" q_*^i is die hoeveelheid van goed i welke over de beide perioden o en t gemiddeld één geldeenheid kostte. Lehr ging hierbij uit van de feitelijk aangeschafte hoeveelheden $(q_o^i + q_t^i)$ en deelde dit door het totale bedrag dat er in beide perioden aan besteed werd: $q_*^i = (q_o^i + q_t^i) / (p_o^i q_o^i + p_t^i q_t^i)$.

Van deze consumptie-eenheden²⁾ worden er in de basis- en object-periode respectievelijk q_o^i / q_*^i en q_t^i / q_*^i aangeschaft. De benodigde bedragen hiervoor zijn $p_o^i q_o^i$ en $p_t^i q_t^i$. Als men nu per periode de aantallen Genusseinheiten sommeert (over alle i) en de totale bestedingen hierdoor deelt, dan krijgt men (aldus Lehr) de gemiddelde prijs per consumptie-eenheid (geaggregeerd over het totale pakket goederen):

$$P_o = \sum_i p_o^i q_o^i / \sum_i (q_o^i / q_*^i) \quad \text{en} \quad P_t = \sum_i p_t^i q_t^i / \sum_i (q_t^i / q_*^i)$$

Het quotiënt van deze "prijsgemiddelden" is de prijsindex van Lehr (1885, p.39).

De prijsindex waarvan dit de factorantithesis is, zijn we slechts op één plaats tegengekomen: in Fisher's indexcijfersysteem onder nr. 4153.

Tot besluit van dit hoofdstukje noemen we nog twee alternatieven voor de prijsindex van Lehr, die door Walsh (1901, p. 551-552) worden aanbevolen: het zijn de factorantithesis van de Walsh-I variant (de "universele methode" van Walsh; zie par. 5.2) en de factorantithesis van de prijsindex van Edgeworth.

- 1) Drobisch vermeldt nadrukkelijk, dat alle q^i gelijksoortig (b.v. allemaal kilo's) moeten zijn, omdat je ze anders niet kan optellen.
- 2) Deze paragraaf is het eenvoudigst te volgen, indien men zich bij de q^i en de q_*^i dimensieloze aantallen of fracties voorstelt.

9. IDEALE PRIJSINDICES

In dit laatste hoofdstuk bespreken we "ideale" indices. Ze zijn zó geconstrueerd dat ze voldoen aan Fishers Factor Reversal Test en aan de Time Reversal Test (zie par. 6.2). We behandelen de indices van Stuvél, van Sato en van Vartia.

9.1 Stuvél 1956

In een studie naar de effecten van wijzigingen in handelsvoorwaarden op de betalingsbalans introduceerde Stuvél (1956) een nieuw stel prijs- en volume-indices:

$$P_{ot}^{ST} = \frac{L_{P_{ot}} - L_{Q_{ot}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_{P_{ot}} - L_{Q_{ot}}}{2}\right)^2 + V_{ot}}$$

$$Q_{ot}^{ST} = \frac{L_{Q_{ot}} - L_{P_{ot}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_{Q_{ot}} - L_{P_{ot}}}{2}\right)^2 + V_{ot}}$$

Hierin is V_{ot} de waarde-index en zijn P_{ot}^L en Q_{ot}^L de Laspeyres-indices.

Stuvels indices voldoen zowel aan de Factor Reversal Test als aan de Time Reversal Test. Ze bezitten "practically all the properties of the quantity and price relatives for single commodities, aldus Stuvél (1957, p.123).

Stuvél leidde zijn indices als volgt af. Doorgaans maakt men een multiplicatieve analyse van de waarde-ontwikkeling van een goed i , waarbij men een prijscomponent en een volumecomponent onderscheidt: $v_t^i/v_o^i = (p_t^i/p_o^i) \cdot (q_t^i/q_o^i)$.

Er zijn echter situaties, aldus Stuvél (1957, p.124), waarin geen waardeverhoudingen worden geanalyseerd, maar waardeverschillen, die op additieve wijze worden gesplitst in een hoeveelheids- en een prijs-component. Hiervoor zijn twee gangbare manieren, waarbij men of gebruik maakt van het basisjaarvolume, gemeten in lopende prijzen, $q_o^i p_t^i = v_o^i \cdot p_t^i / p_o^i$, of omgekeerd van $q_t^i p_o^i = v_o^i \cdot q_t^i / q_o^i$:

$$v_t^i - v_o^i = v_t^i - v_o^i \frac{p_t^i}{p_o^i} + v_o^i \frac{p_t^i}{p_o^i} - v_o^i = v_o^i \frac{p_t^i}{p_o^i} \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} - 1\right) + v_o^i \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - 1\right)$$

$$v_t^i - v_o^i = v_t^i - v_o^i \frac{q_t^i}{q_o^i} + v_o^i \frac{q_t^i}{q_o^i} - v_o^i = v_o^i \frac{q_t^i}{q_o^i} \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - 1\right) + v_o^i \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} - 1\right)$$

Van deze beide decomposities neemt Stuvél het ongewogen rekenkundig gemiddelde:

$$v_t^i - v_o^i = \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} + 1\right) \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} - 1\right) + \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} + 1\right) \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - 1\right)$$

Deze relatie geldt voor ieder goed i en Stuvél stelt vóór om de prijs- en volume-indices zó te construeren, dat de gelijkheid geldt voor het totale goederenaggregaat. Hiertoe sommeert de gelijkheid over alle i :

$$\sum_i v_t^i - \sum_i v_o^i = \sum_i \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} + 1 \right) \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} - 1 \right) + \sum_i \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} + 1 \right) \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - 1 \right)$$

De indexcijfers P_{ot}^{ST} en Q_{ot}^{ST} moeten nu zó worden gekozen, dat de twee delen van het rechterlid van deze vergelijking gelijk zijn aan: ¹⁾

$$(I) \quad \sum_i \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} + 1 \right) \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} - 1 \right) = \left(\sum_i v_o^i \right) \frac{P_{ot}^{ST} + 1}{2} (Q_{ot}^{ST} - 1)$$

$$(II) \quad \sum_i \frac{1}{2} v_o^i \left(\frac{q_t^i}{q_o^i} + 1 \right) \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - 1 \right) = \left(\sum_i v_o^i \right) \frac{Q_{ot}^{ST} + 1}{2} (P_{ot}^{ST} - 1)$$

Door (I) bij (II) op te tellen bewijst men dat P_{ot}^{ST} en Q_{ot}^{ST} voldoen aan de Factor Reversal Test $V_{ot} = P_{ot}^{ST} Q_{ot}^{ST}$.

Door (II) van (I) af te trekken krijgt men:

$$(P_{ot}^{ST} - Q_{ot}^{ST}) \left(\sum_i v_o^i \right) = \sum_i v_o^i \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} - \frac{q_t^i}{q_o^i} \right)$$

Hieruit volgt onmiddellijk de gelijkheid $P_{ot}^{ST} - Q_{ot}^{ST} = P_{ot}^L - Q_{ot}^L$.

De in het begin van deze paragraaf beschreven indexcijfers van Stuvcl zijn de unieke (zinvolle) oplossing van deze laatste gelijkheid en de Factor Reversal Test.

9.2 Sato 1976

Beschouwen we nu de (meetkundige) "log-change index numbers" voor prijzen en volu-

$$\text{mina:} \quad \ln P_{ot} = \sum_i w^i \ln(p_t^i/p_o^i) = \sum_i w^i D(p_t^i)$$

$$\ln Q_{ot} = \sum_i w^i \ln(q_t^i/q_o^i) = \sum_i w^i D(q_t^i)$$

Hierin is D de zg. "log change operator" $D(x_t) = \ln(x_t) - \ln(x_o)$.

De log-change indices voldoen aan de Factor Reversal Test, als $\sum_i w^i D(v_t^i/\sum_i v_t^i) = 0$.

1) K.S. Banerjee (1961) komt via toepassing van de theorie der factoriële experimenten (op een 2x2 experiment) op vier van dergelijke vergelijkingen:

$$(P_{ot}+1)(Q_{ot}+1) = (+\Sigma p_o q_o + \Sigma p_t q_o + \Sigma p_o q_t + \Sigma p_t q_t) / \Sigma p_o q_o$$

$$(P_{ot}-1)(Q_{ot}+1) = (-\Sigma p_o q_o + \Sigma p_t q_o - \Sigma p_o q_t + \Sigma p_t q_t) / \Sigma p_o q_o$$

$$(P_{ot}+1)(Q_{ot}-1) = (-\Sigma p_o q_o - \Sigma p_t q_o + \Sigma p_o q_t + \Sigma p_t q_t) / \Sigma p_o q_o$$

$$(P_{ot}-1)(Q_{ot}-1) = (+\Sigma p_o q_o - \Sigma p_t q_o - \Sigma p_o q_t + \Sigma p_t q_t) / \Sigma p_o q_o$$

Hiermee zijn zes paren vergelijkingen in P_{ot} en Q_{ot} te maken, hoewel niet alle zinvol, aldus Banerjee (1961, p.594). De middelste twee vergelijkingen zijn die welke Stuvcl afleidde. Zie ook Banerjee (1977) voor een uitvoerige bespreking van zijn methode (hiervoor is in het kader van dit artikel geen ruimte).

Immers, zoals H. Theil (1973, p.498) laat zien, geldt:

$$\ln P_{ot} + \ln Q_{ot} = \sum_i w_i^i (Dp_t^i + Dq_t^i) = D(\sum_i v_t^i) + w_t^i D(v_t^i / \sum_i v_t^i).$$

De laatste term is meestal niet gelijk aan nul, maar kan bij de diverse keuzen voor de gewichten w^i worden afgeschat via de Taylor ontwikkeling van de logarithmen. Zowel Theil (1973) als Sato (1974) construeerden diversewegingsschema's w^i waarvoor de laatste term van bovenstaande gelijkheid nagenoeg nul is. Sato stelde voor, als gewichten functies van de bugetaandelen $w_o^i = v_o^i / \sum_i v_o^i$ en $w_t^i = v_t^i / \sum_i v_t^i$ te nemen:

$$w^i = f(w_o^i, w_t^i) / \sum_i f(w_o^i, w_t^i)$$

Hierin is f een niet-negatieve reële monotone functie op $\{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ met

$$f(x,y) = f(y,x) \text{ en } f(x,x) = x \quad (\text{en soms met } f(0,y) = f(x,0) = 0).$$

Met zulke gewichten voldoen de log-change indexcijfers aan de Time Reversal Test. Voorbeelden van dergelijke functies zijn:

$$f(x,y) = (x+y)/2 \quad (\text{Törnqvist}) \text{ en } f(x,y) = (xy \frac{x+y}{2})^{1/3} \quad (\text{Theil})$$

In 1976 komt Kazuo Sato terug op zijn eerdere artikel en op dat van Theil (1973) en relateert de daarin gepresenteerde benaderingen voor een log-change indexcijfer, dat exact voldoet aan de Factor Reversal Test. Doordat de aandacht gericht was op het vinden van steeds scherpere benaderingen, bleef de exacte ideale index nog even onontdekt. Als nieuwe wegingsfunctie stelt Sato (1976) het "logaritmisch gemiddelde" van x en y voor: $L(x,y) = (y-x)/(\ln y - \ln x)$ (als $x \neq y$) en $L(x,x) = x$ ¹⁾. Deze functie bezit alle gewenste eigenschappen, die hierboven voor f werden genoemd en er is tevens voldaan aan: $L(x,0) = L(0,y) = 0$.

Deze laatste eigenschap maakt, dat bij toepassing van het logaritmisch gemiddelde op de relatieve bestedingen w_o^i en w_t^i , het gewicht van een goed i nul is, indien het niet in beide perioden wordt verhandeld (of geconsumeerd).

Voorts is het eenvoudig te verifiëren, dat met deze wegingsfunctie inderdaad voldaan is aan de Factor Reversal Test, omdat de "logarithmic discrepancy" nul is:

$$\ln P_{ot} Q_{ot} / V_{ot} = \sum_i (w_t^i - w_o^i) / \sum_i L(w_t^i, w_o^i) = 0.$$

In onze notatie luidt het Sato(-Vartia-)indexcijfer:

$$\ln P_{ot}^{Sa} = \sum_i L(w_o^i, w_t^i) \cdot \ln(p_t^i / p_o^i) / \sum_i L(w_o^i, w_t^i)$$

1) Onafhankelijk van Sato paste Vartia (1974,1976) deze functie toe bij de constructie van twee nieuwe "ideal log-change index number formulas", waarvan er één gelijk is aan de Sato (1976)-index. Vartia schrijft, dat het logaritmisch gemiddelde $L(x,y)$ voldoet aan de vergelijking: $\log(x/y) = (y-x)/L(x,y)$

, expressing that the log-change is literally a relative change with respect to the logarithmic average. Using the mean value theorem we get $\min(x,y) \leq L(x,y) \leq \max(x,y)$ for any positive x and y . Furthermore $L(ax,ay) = aL(x,y)$, so that $L(x,y)$ may be considered as an average.

(Y.O. Vartia(1976,p.122))

9.3 Vartia (1974 en) 1976

Zoals op de vorige pagina (noot 1) werd opgemerkt leidde de fin Yrjö Vartia (1974, 1976)¹⁾ twee log-change indexcijfers af, die voldoen aan zowel de Factor Reversal Test als aan de Time Reversal Test. In beide gevallen bestaan de gewichten w^i uit (genormeerde) logaritmische gemiddelden der bestedingen:

$$w_I^i = L(v_o^i, v_t^i) / L(\sum_i v_o^i, \sum_i v_t^i) \quad \text{en} \quad w_{II}^i = L(w_o^i, w_t^i) / \sum_i L(w_o^i, w_t^i)$$

In deze varianten zijn zoals voorheen v_k^i (resp. w_k^i) de absolute (respectievelijk relatieve) bestedingen aan goed i in periode k ($k=0, t$). Variant II levert de hier-voor besproken Sato-Vartia index op. Beide varianten reageren *qualitatively correctly to extreme price and volume changes* (Vartia (1976, p.125)), maar de Vartia I index geniet de voorkeur, omdat hij consistent is m.b.t. aggregatie, aldus Vartia. In onze notatie luidt de Vartia I-variant:

$$\ln P_{ot} = \sum_i \frac{\frac{v_t^i - v_o^i}{\ln v_t^i - \ln v_o^i}}{\frac{\sum_i v_t^i - \sum_i v_o^i}{\ln \sum_i v_t^i - \ln \sum_i v_o^i}} \ln \left(\frac{p_t^i}{p_o^i} \right) \quad 2)$$

The only known index sharing these properties of Vartia Index I is an exceptional but ingenious kind of index "stumbled on" by Stuel (1957).

(Y.O. Vartia [1976, p.125])³⁾

Tot besluit moeten we bij deze variant echter opmerken, dat in het algemeen niet geldt, dat $\sum_i w_I^i = 1$.

Volgens Vartia [1976, p.123] is dit niet zo ernstig, omdat de afwijking van één in de praktijk meestal gering zal zijn. Voorts is het zo, aldus Vartia, dat evenmin de gewichten van de indexcijfers van Laspeyres, Paasche en van Fisher tot één sommeren, indien men deze indexcijfers in de logaritmische vorm schrijft.

1) Van Vartia (1974) is in 1976 een engelse editie verschenen.

2) Hierbij gelden de zelfde restricties als genoemd bij de introductie van het logaritmisch gemiddelde: de teller (noemer) van w^i wordt $(\sum) v^i$ als $(\sum) v^i = (\sum) v_o^i$.

3) De Vartia-I index werd overigens al bijna 40 jaar eerder aanbevolen door J.K. Montgomery (1937). Zie hiervoor B.M. Balk (1983).

DANKWOORD

Op deze plaats wil ik enige collega's en een anonieme referee bedanken voor hun waardevolle opmerkingen, gemaakt naar aanleiding van eerdere versies van dit artikel.

LITERATUUR

- Allen, R.G.D. (1975) Index numbers in theory and practice, 1975, Chicago, Aldine Publishing Company.
- Balk, B.M. (1983) Line-integral price and quantity indices, Research-rapport No. E7-SD-234, 1983, Centraal Bureau voor de Statistiek, Voorburg.
- Banerjee, K.S. (1961) A unified statistical approach to the index number problem, Econometrica, vol. 29, 1961, p. 591-601.
- Banerjee, K.S. (1977) On the Factorial Approach Providing the True Index of Cost of Living, 1977, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.
- Carli, G.R. (1764) Del Valore e della Proporzion di Metalli Monetati etc., in: Custodi, Serittori Italiana de Economica Politica, Parte Moderna, XIII, p. 297-366).
- Chance, W.A. (1966) A note on the origins of index numbers, The Review of Economics and Statistics, vol. XLVIII, 1966, p. 108-110.
- Coggeshall, F. (1886) The arithmetic, geometric and harmonic means, Quarterly Journal of Economics, vol. I, 1886/1887, p. 83-86.
- Deaton, A. and J. Muellbauer (1980) Economics and consumer behavior, 1980, Cambridge University Press.
- Diewert, W.E. (1981) The economic theory of index numbers: a survey, Hoofdstuk 7 van: A. Deaton (ed.), Essays in the theory and measurement of consumer behavior in honour of Sir Richard Stone, 1981, Cambridge.
- Divisia, F. (1925-26) L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, Revue d'économie politique, vol. 39, 1925, p. 842-861, p. 980-1008, p. 1121-1151 en vol. 40, 1926, p. 49-81.
- Drobisch, M.W. (1871A) Über Mittelgrößen und die Anwendbarkeit derselben auf die Berechnung des Steigens und Sinkens des Goldwerthes, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. X XIII, 1871, p. 25-48 (Math.-Physische Classe).
- Drobisch, M.W. (1871B) Ueber die Berechnung der Veränderungen der Waarenpreise und des Geldwerthes, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 16, 1871, p. 134-156.
- Drobisch, M.W. (1871C) Ueber einige Einwürfe gegen die in diesen Jahrbüchern veröffentlichte neue Methode, die Veränderungen der Waarenpreise und des Geldwerthes zu berechnen, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 16, 1871, p. 416-427.
- Duon, G.J. (1950) Trois indices économiques, Journal de la société de Statistique de Paris, 91, 1950, p. 136-157.
- Dutot, C.F. (1738) Réflexions Politiques sur les Finances et le Commerce, 1738, La Haye, V. et N. Prevost.

- Edgeworth, F.Y. (1887-1889) Three memoranda on index number theory (for the British Association for the Advancement of Science), Reprinted in F.Y. Edgeworth (1925), p.195-343.
- Edgeworth, F.Y. (1925) Papers relating to political economy, vol. I, 1925, London, MacMillan and Co.
- Eichhorn, W., R. Henn, O. Opitz, R.W. Shephard (editors), (1978) Theory and Applications of Economic Indices, 1978, Würzburg, Physica-Verl.
- Fisher, I. (1922) The Making of Index Numbers. A Study of their Varieties, Tests and Reliability, 1922, Boston, 3rd revised version (1927), reprinted by A.M. Kelley, New York, 1967.
- Geary, R.C. (1958) A note on the comparison of exchange rates and purchasing power between countries, Journal of the Royal Statistical Society (A), vol. 121, 1958, p.97-99.
- Gini, C. (1931) On the circular test of index numbers, Metron IX, 1931, p.1-24.
- Hasenkamp, G. (1978) Economic and Atomistic Index Numbers: Contrasts and Similarities, p.207-243 van: W. Eichhorn e.a. (eds.), (1978).
- Jevons, W.S. (1863) A serious fall in the value of gold ascertained, and its social effects set forth, 1863, repr. in: W.S. Jevons (1884), p.13-118.
- Jevons, W.S. (1865) The variation of prices, and the value of the currency since 1782, 1865, repr. in: W.S. Jevons (1884), p.119-150.
- Jevons, W.S. (1884) Investigations in Currency and Finance (ed. by H.S. Foxwell), 1884, London, MacMillan and Co.
- Kendall, M.G. (1969) Studies in the history of probability and statistics, XXI. The early history of index numbers, Review of the International Statistical Institute, vol. 37, 1969, p.1-12.
- Kloek, T. (1966) Indexcijfers, enige methodologische aspecten, 1966, dissertatie, Den Haag, Pasmans.
- Kneepkens, H.H. (1979) Alternatieven voor klassieke prijsindexcijfers, 1979, Amsterdam (Fac. Econ. Wetenschappen, U V A), Researchmemorandum 7914.
- Kneepkens, H.H. (1983) Eine neue Deutung von alten ungewogenen Indexzahlen, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd.198, 1983, p.369-373.
- Köves, P. (1983) Index Theory and Economic Reality, 1983, Budapest.
- Laspeyres, E. (1864) Hamburger Waarenpreise 1851-1863 und die californisch-australischen Goldentdeckungen seit 1848, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 3, 1864, p.88-118 en p.209-236.
- Laspeyres, E. (1871) Die Berechnung einer mittleren Waarenpreissteigerung, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd.16, 1871, p.296-314.
- Lehr, J. (1885) Beiträge zur Statistik der Preise, insbesondere des Geldes und des Holzes, 1885, Frankfurt a. M.

- Lowe, J.(1822) The present state of England in regard to agriculture, trade and finance, 1822, London.
- Marshall, A.(1887) Remedies for fluctuations of general prices, Contemporary Review, March 1887.
- Melon, J.F.(1734) Essai politique sur le commerce, 1734, Rouen.
- Montgomery, J.K.(1937) The mathematical problem of the price index, 1937, London, P.S. King and Son, Ltd.
- Paasche, H.(1874) Ueber die Preisentwicklung der letzten Jahre nach den Hamburger Börsennotierungen, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 23, 1874, p.168-178.
- Palgrave, R.H.Inglis(1886) Currency and standard of value in England, France and India, and the rates of exchange between these countries, (Memorandum for the Royal Commission on Depression of Trade and Industry, 3rd Report, Appendix B, p.312-390).
- Persons, W.M.(1928) The construction of index numbers, 1928, Boston, New York, etc., Houghton Mifflin Company.
- Rinne, H.(1981) Ernst Louis Etienne Laspeyres 1834-1913, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd 196/3, 1981, p.194-215.
- Rijken van Olst, H. en P.E. Venekamp(1975) Economische Statistiek, 1975, Assen, Van Gorcum en Comp.
- Sato, K.(1974) Ideal Index Numbers that Almost Satisfie the Factor Reversal Test, The Review of Economics and Statistics, vol.LVI, 1974, p.549-552.
- Sato, K.(1976) The ideal log-change index number, The Review of Economics and Statistics, vol.LVIII, 1976, p.223-228.
- Scrope, J.P.(1833) Principles of political economy, applied to the present state of Britain, 1833, London.
- Shuckburg Evelyn, G.(1798) An account of some endeavours to ascertain a standard of weight and measure, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. LXXXVIII, p.133-182.
- Sidgwick, H.(1883) The principles of political economy, 1883, London.
- Stuvel, G.(1956) A new approach to the measurement of terms-of-trade effects, The Review of Economics and Statistics, 1956.
- Stuvel, G.(1957) A new index number formula, Econometrica, vol.25, 1957, p.123-131.
- Theil, H.(1973) A new index number formula, The Review of Economics and Statistics, vol.LV, 1973, p.498-502.
- Törnqvist, L.(1936) The bank of Finland's consumption price index, Bank of Finland Monthly Bulletin 10, 1936, p.27-34.

- Törnqvist, L. (1957) Tariffs and economic development of the post and telegraph office during the years 1931-1955, Helsinki, 1957, (Appendix of the Annual Report of the Administration of posts and telegraphs for the year 1955).
- Vartia, Y.O. (1974) Relative changes and economic indices (A Licenciante Thesis, in Finnish), 1974, University of Helsinki, Department of Statistics.
- Vartia, Y.O. (1976) Ideal log-change index numbers, Scandinavian Journal of Statistics, vol. 3, 1976, p.121-126.
- Venekamp, P.E. (1976) Index number mutations, p.95-101 van: J.J. Cramer, A. Heertje, P.E. Venekamp (eds.), Essays in Honour of Pieter de Wolff, 1976, Samson/North Holland.
- Walsh, C.M. (1901) The measurement of general exchange value, 1901, New York, MacMillan.
- Winkler, W. (1954) Older and newer ways of solving the index numbers problem, Bulletin de l'institut international de statistique, 1954, Tome XXXIV, 2^{me} livraison, p.15-41.
- Young, A. (1812) An inquiry into the progressive value of money in England etc., 1812, London.

Ontvangen: 10-9-1984