

KM 16(1984)
pag 127-175

SAMENVATTINGEN LEZINGEN

NATIONALE ECONOMETRISTENDAG 1984

Bijdragen vanuit de Werkgemeenschap Toegepaste Besliskunde en Bedrijfs-econometrie aan de Nationale Econometristendag die op 17 april 1984 gehouden werd aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.

In overleg met de redactie van KM heeft de Commissie van de Werkgemeenschap Toegepaste Besliskunde en Bedrijfseconometrie de sprekers die inleidingen verzorgden tijdens de Nationale Econometristendag 1984 op het vakgebied van de Werkgemeenschap verzocht een korte samenvatting te schrijven van het gepresenteerde onderzoek. Het resultaat treft U hierbij aan. Deze samenvattingen hebben als doel de lezers van KM te informeren over verricht en lopend onderzoek. Voor uitgebreider rapportages wende men zich tot de auteurs.

Overigens zal met ingang van 1985 het door economen en econometristen gedane onderzoek gerapporteerd worden op de te beleggen jaarlijkse ECOZOEK-dag. Deze vindt in 1985 plaats aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam op 2 april.

G. van der Hoek
Secretaris WG TBBE
Econometrisch Instituut
Erasmus Universiteit Rotterdam
Postbus 1738
3000 DR Rotterdam

A Markov decision algorithm for optimal inspections and revisions in a maintenance system with partial information.

H.C. Tijms* and F.A. Van der Duyn Schouten*

Discussant: H.W. van den Meerendonk

Summary.

A special purpose policy iteration algorithm is developed for a maintenance model in which the actual degree of deterioration of the system can be revealed by inspection only.

1. Problem formulation.

We consider a gradually deteriorating equipment whose actual condition can be revealed by inspection only. An inspection can be succeeded by a revision depending on the observed degree of deterioration. When left alone the system's condition evolves according to a finite Markov chain. However, the changes of state are not observable with the possible exception of a breakdown. Examples of this model include production machines subject to stochastic breakdown, inventory systems and maintenance of communication systems. The cost structure of the model consists of inspection, revision and operating costs. Opportunities for inspection occur only at equidistant points in time. An inspection reveals the exact condition of the system at a cost $J > 0$ and takes a fixed integral number of T time units. The system can be observed in one of the conditions $1, \dots, N$, which describe increasing degrees of deterioration. Working condition 1 represents a new system and condition N a malfunction. When the exact condition is revealed by inspection there is an option of either doing a revision or leaving the system as it is. A revision in condition i takes a fixed integral number of T_i time units and involves a cost of $R_i \geq 0$, $1 \leq i \leq N$. When an inspection reveals condition N a revision is obligatory. After a revision the system can be regarded as new.

* Interfaculty of Actuarial Sciences and Econometrics, Free University,
Postbox 7161, 1007 MC Amsterdam; tel.: 020 - 548 5780

In the absence of inspections and revisions the working condition of the system changes in the following Markovian way. If at present the system has working condition i then one time unit later it will have working condition j with known probability r_{ij} , with

$$\sum_{j=i}^N r_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq N.$$

This means that the system cannot improve its condition on its own. The changes in the working condition are not observable with the possible exception of a transition to the final condition N . We assume that an entry into working condition N is discovered at its occurrence with given probability q ($0 \leq q \leq 1$), otherwise the malfunction is detected at the next inspection. In case a malfunction is detected at its occurrence the system is revised at a cost R_{N+1} and this particular revision takes T_{N+1} time units. The revision costs R_{N+1} and revision time T_{N+1} may differ from R_N and T_N , which are associated with a revision in working condition N when discovered at an inspection. In addition to the costs introduced above the system incurs an operating cost of a_i for each time unit it is operating with working condition i , $1 \leq i \leq N$.

Exploiting the structure of this general model we present a special purpose policy iteration algorithm to compute an average cost optimal schedule of inspections and revisions. This policy iteration algorithm operates on the class of so called control limit rules. A control limit rule is characterized by integers π , $t(1), \dots, t(N-1)$ and prescribes the following actions. Revision is done only when working condition $k \geq \pi$ is revealed and inspection only when $t(i)$ time units have passed since the system was lastly known to have working condition i . We will derive a policy iteration algorithm which operates within the class of control limit rules.

2. Analysis.

The maintenance model described in the previous section is analysed in the framework of a semi-Markov decision model. The decision epochs include the epochs at which opportunities for inspection occur while the system is operating and the epochs at which the exact working condition of the system is revealed by either an inspection or the immediate detection of a malfunction. We take as state space

$$S = \{i | i=1, \dots, N+1\} \cup \{(i, m) | i=1, \dots, N-1; m=1, \dots, M_i\}.$$

Here state i with $1 \leq i \leq N$ corresponds to the situation in which an inspection just revealed working condition i and state $N+1$ corresponds to the detection of a malfunction at its occurrence. Also state (i, m) corresponds to the situation in which m time units have passed since the system was lastly known to have working condition i . In order to have a finite state space it is for practical applications no restriction to assume the existence of sufficiently large integers M_i such that a revision is always done in state (i, M_i) , $1 \leq i \leq N-1$.

There are three possible decisions: no action (0), inspection (1) and revision (2).

For the derivation of the one-step transition probabilities, the one-step expected transition times and the one step expected costs of this particular semi-Markov decision model we refer to [1].

Having specified the basic elements of the semi-Markov decision model we invoke the algorithmic tools from Markov decision theory. For a semi-Markov decision model with state space S , action sets $A(s)$, one step transition probabilities $p_{st}(a)$, one step expected transition times $\tau_s(a)$ and one step expected costs $c_s(a)$ the average costs and the so-called relative values of a given decision rule R can be found by solving the following linear equations in the unknowns g and v_s , $s \in S$,

$$(1) \quad v_s = c_s(R_s) - g\tau_s(R_s) + \sum_{t \in S} p_{st}(R_s)v_t, \quad s \in S.$$

Here R_s denotes the action prescribed by rule R whenever the system is in state s .

The system of equations (1) has a unique solution when we normalize $v_s=0$ for an arbitrarily chosen state s . The number g gives the long-run average cost per unit time of rule R .

Fixing a control limit rule R characterized by the integers π , $t(1), \dots, t(N-1)$ it is shown in [1] that system (1) reduces to a considerably smaller system of linear equations in the unknowns g and $v_i(R)$, $1 \leq i < \pi$ only. Having solved this reduced system we obtain by single pass calculations $v_i(R)$, $\pi \leq i \leq N+1$ and $v_{(i, t(i))}(R)$. Finally the relative values $v_{(i, m)}(R)$, $1 \leq m < t(i)$ and $t(i) < m \leq M$ can be recursively computed, when required.

To describe the policy improvement procedure we define the usual test quantity

$$T_R(s,a) = c_s(a) - g(R)\tau_s(a) + \sum_{t \in S} p_{st}(a)v_t(R).$$

To improve the current rule R it suffices to determine for each state s an action $\bar{R}_s$ such that

$$T_R(s, \bar{R}_s) \leq v_s(R), \quad \text{for all } s \in S.$$

Then

$$g(\bar{R}) \leq g(R).$$

Using the test quantities $T_R(s,a)$ we construct an improved control limit rule $\bar{R}$ in the following way. First we investigate whether the control limit π can be decreased. If so we decrease π to the smallest integer $\bar{\pi}$ for which

$$T_R(i,2) < v_i(R) \quad \text{for all } \bar{\pi} \leq i < \pi.$$

If π cannot be decreased we investigated in a similar way whether it can be increased. This procedure yields a new control limit $\bar{\pi}$. Next a similar procedure is applied to the control limits $t(i)$, $1 \leq i \leq N-1$, yielding new control limits $\bar{t}(i)$. The algorithm stops as soon as we can no longer improve on R by this procedure.

So the algorithm generates a sequence of improving control-limit rules and it can be shown that it converges after finitely many iterations. In accordance with usual experience with policy iteration algorithms we empirically found that the number of iterations is remarkably small and is typically of the order of 3-10 iterations. Although the algorithm exhibits finite convergence we lack a theoretical proof that under reasonable conditions on the model parameters the resulting control limit rule is average optimal among all possible control rules. However, in all examples tested we have verified in a numerical way that the control limit obtained at the final iteration of the algorithm is indeed overall average cost optimal. This numerical verification was based on

the average cost optimality condition from Markov decision theory stating that a rule R^* with average costs $g(R^*)$ and relative values $v_s(R^*)$, $s \in S$ is average cost optimal among all possible rules if $v_s(R^*) \leq T_{R^*}(s, a)$ for all states s and actions a .

For numerical examples we refer to [1].

References

- [1] Tijms, H.C. and Van der Duyn Schouten, F.A. (1984), A Markov decision algorithm for optimal inspections and revisions in a maintenance system with partial information. EJOR, to appear.

Drs. A.W.A. Boot¹⁾

In vele dynamische modellen van de onderneming wordt aangenomen dat het investeren een continu proces in de tijd is. In werkelijkheid zal het investeringsproces bestaan uit een verzameling afzonderlijke tijdstippen waarop een sprong in de kapitaalgoederenvoorraad plaatsvindt. In deze bijdrage staat centraal de invloed van een dergelijke spronggedrag op de oplossing van een verder continu geformuleerd optimal-control-model.

1. Inleiding

In dit paper wordt uitgegaan van een homogeen productieproces met slechts één produktiefactor, nl. kapitaal. Ten aanzien van dit productieproces wordt verondersteld dat er sprake is van afnemende meer-opbrengsten en dat de produktiviteit van kapitaal onder invloed van slijtage continu afneemt. Van tijd tot tijd zal echter de produktiefactor kapitaal d.m.v. investeringen weer op peil worden gebracht. Het lijkt niet reëel te veronderstellen dat dit zal plaatsvinden door oneindig kleine investeringen. De meest voor de hand liggende reden hiervoor is het bestaan van 'economies of scale': een éénmalige grote investering is per eenheid investering 'goedkoper' dan een (oneindige) reeks kleine investeringen. Onder de veronderstelling van 'economies of scale' is het investeringsproces derhalve geen continu maar een discreet proces.

Achtereenvolgens wordt ingegaan op de afweging tussen 'economies of scale' en afnemende meer-opbrengsten, de invloed van 'economies of scale' binnen een sterk vereenvoudigd model van Manne (1961) en tot slot zal een optimal-control-model worden geformuleerd waarin zowel rekening is gehouden met 'economies of scale' als wel afnemende meer-opbrengsten. Bovendien zal aandacht worden besteed aan de economische interpretatie van de optimum condities.

1) Katholieke Hogeschool Tilburg, Postbus 90153, Kamer B 425, 5000 LE Tilburg, tel.: 013-662062

2. Economies of scale in afnemende meer-opbrengsten

Onder de meest stringente micro-economische vooronderstellingen en uitgaande van het bestaan van afnemende meer-opbrengsten op kapitaal wordt de optimale kapitaalgoederenvoorraad K^* voor een naar winstmaximalisatie strevende producent gevonden in het punt waar geldt dat het marginaal rendement op kapitaal gelijk is aan de tijdsvoorkeursvoet. Dit bekende resultaat uit de micro-economische theorie geldt alleen bij afwezigheid van 'economies of scale'. Rekeninghoudend met 'economies of scale' geldt in het optimum de gelijkheid tussen het marginaal rendement op de investeringsuitgaven en de tijdsvoorkeursvoet. Noodzakelijk voor het bestaan van zo'n optimum is dat ten alle tijde de afnemende meer-opbrengsten het 'economies of scale'-effect overheersen. De bovenstaande veronderstellingen en voorwaarden kunnen als volgt worden samengevat:

$$\frac{dO}{dK} > 0; \frac{dK}{dS} > 0; \frac{d^2O}{dK^2} < 0; \frac{d^2K}{dS^2} > 0; -\frac{d^2O}{dK^2} > \frac{d^2K}{dS^2} \left[\frac{dO/dK}{(dK/dS)^2} \right] \quad (1)$$

waarin:

$O(K)$ = de opbrengstenfunctie;

K = de produktiefaktor kapitaal = de kapitaalgoederenvoorraad;

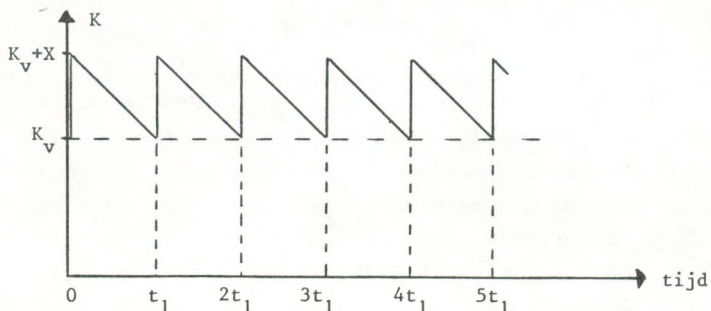
S = de investeringsuitgaven.

Het hierboven aangegeven optimum zal uitgaande van de continue slijtage van de kapitaalgoederenvoorraad slechts op bepaalde tijdsmomenten actueel zijn. De kapitaalgoederenvoorraad zal zich sprongsgewijs rond dit optimum begeven. Om te komen tot het definiëren van beslissingsregels die nodig zijn voor de bepaling van de investeringsgrootte en de investeringstijdstippen zal eerst een interpretatie worden gegeven van het model van Manne waarin wordt afgezien van afnemende meer-opbrengsten.

3. Het model van Manne

Manne (1961) gaat uit van een model waarin de ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad geheel is bepaald door een bekende lineaire stijging van de vraag waaraan ten alle tijde moet worden voldaan. Onder de vooronderstelling van 'economies of scale' betekent dit dat de productiecapaciteit sprongsgewijs vooruit zal lopen op de vraagstijging.

Wij zullen het groei-model van Manne herdefiniëren binnen onze probleemstelling door uit te gaan van een constante vraag en een constant slijtagniveau van de kapitaalgoederenvoorraad per tijdseenheid. Door het 'economies of scale'-effect zal de kapitaalgoederenvoorraad sprongsgewijs vooruitlopen op de te verwachten slijtage. Voor de eenvoud zal worden aangenomen dat het slijtagniveau per tijdseenheid één is. Het verloop van de kapitaalgoederenvoorraad is dan als volgt te schetsen:



Figuur 1: Het verloop van de kapitaalgoederenvoorraad in het geherdefinieerde model van Manne

waarin:

- K_v = vereiste kapitaalgoederenvoorraad;
- X = toevoeging aan de kapitaalgoederenvoorraad door een investeringsuitgave ter grootte van $S(X)$;
- $t_1, 2t_1, \dots$ = de investeringstijdstippen.

We dienen nu het niveau van de investeringen X te bepalen waarbij de totale investeringskosten minimaal zijn. Neem aan dat de investeringskosten worden bepaald door de volgende functie:

$$S(X) = gX^b, \text{ waarbij } g > 0; 0 < b < 1 \quad (2)$$

Uit (2) en figuur 1 volgt dat uitgaande van een oneindige tijdshorizon de totale investeringskosten gelijk zijn aan:

$$C(X) = \frac{1}{1 - \exp(-rt_1)} S(X) \quad (3)$$

waarin:

$C(X)$ = totale investeringskosten;

r = tijdsvoorkeursvoet.

Het optimum wordt gevonden in het punt waar de afgeleide van (3) naar X gelijk is aan nul. Dit geeft rekeninghoudend met de afhankelijkheid van t_1 van X :

$$\frac{dS(X)}{dX} = \left[\frac{dt_1}{dX} \cdot r \cdot \exp(-rt_1) S(X) \right] \frac{1}{1 - \exp(-rt_1)} \quad (4)$$

De conditie (4) laat zien dat in het optimum een gelijkheid geldt tussen de marginale investeringsuitgaven $dS(X)/dX$ en de 'tijdsvoorkeurswinst' op de toekomstige investeringsuitgaven. Immers het éénmalige vergroten van het investeringsniveau 'kost' $dS(X)/dX$ en schuift de toekomstige investeringen een periode dt_1/dX op hetgeen per cyclus $(dt_1/dX) \cdot r \cdot \exp(-rt_1) S(X)$ oplevert.

In het algemeen kan worden gesteld dat het bestaan van een optimum binnen het model van Manne mogelijk is vanwege het tegen elkaar inwerken van enerzijds voordelen, die ontstaan bij het vergroten van het investeringsniveau (lagere investeringskosten per eenheid), en anderzijds nadelen veroorzaakt door het eerder verrichten van investeringen ('tijdsvoorkeursverliezen').

Indien in het model van Manne de vooronderstelling van een constante vraag zonder neen-verkopen wordt losgelaten en uitgegaan wordt van een opbrengstfunctie die voldoet aan de condities zoals die onder (1) zijn geformuleerd dan ontstaat een situatie waarin het 'economies of scale'-effect niet alleen wordt tegengewerkt door de tijdsvoorkeursoet, maar ook door de afnemen de meer-opbrengsten. In dat geval geldt de situatie waarop reeds in paragraaf 2 is gewezen, namelijk een kapitaalgoederenvoorraad die zich sprongsgewijs begeeft rond een optimum waar een gelijkheid geldt tussen het marginaal rendement op investeringsuitgaven en de tijdsvoorkeursoet.¹⁾ Voor een uitwerking van deze situatie wordt verwezen naar Boot (1984).

Voorgaande modellen zijn door het hanteren van stringente veronderstellingen, zoals een constant slijtageniveau en een optimaal beginniveau van de kapitaalgoederenvoorraad, eenvoudig d.m.v. (partiële) afgeleiden op te los-

1) Verondersteld wordt een constant slijtageniveau per tijdseenheid. Indien gekozen was voor een bepaald afschrijvingspercentage dan zou dit percentage verschijnen in de optimum conditie.

sen. Het biedt grote voordelen indien het model kan worden gegoten in een optimal-control formulering. Binnen een dergelijke formulering wordt de kapitaalgoederenvoorraad opgevat als een toestandsvariabele die d.m.v. een (control)variabele, de investeringen, wordt 'gestuurd'. Uitgaande van de doelfunctie maximalisatie van alle toekomstige netto-ontvangsten zal het optimale ontwikkelingspatroon van de kapitaalgoederenvoorraad als oplossing uit het model volgen. Een van de grote problemen die ontstaan bij de optimal-control formulering is echter de continuïteit van de toestandsvariabelen die binnen een dergelijke formulering is vereist.

4. Economies of scale en afnemende meer-opbrengsten binnen een optimal-control formulering

Het in het voorgaande gedefinieerde investeringsprobleem zal worden weergegeven binnen een optimal-control formulering. Uitgaande van de doelstelling maximalisatie van alle toekomstige netto-ontvangsten kan het model als volgt worden geformuleerd:

$$\text{Max}_{X_i} \int_0^{\infty} e^{-rt} O(K) dt - \sum_i e^{-rt_i} S(X_i) \quad (5)$$

$$\text{o.v. } \dot{K} := \frac{dK}{dt} = -aK + \sum_i \delta(t-t_i) X_i \quad (6)$$

waarin:

- t_i = het investeringstijdstip i ;
- $\delta(t-t_i)$ = dirac-delta-functie;
- a = slijtage-percentages van kapitaal.

Het bovenstaande model bevat een discontinue toestandsvariabele (zie de bewegingsvergelijking (6)) en is derhalve niet op te lossen met behulp van het traditionele Maximumprincipe.

In de literatuur staan voor de oplossing van bovenstaand probleem twee mogelijkheden geformuleerd. Enerzijds is door Vind (1966) aangegeven dat een model met discontinuïteiten is te herformuleren tot een continu model, anderzijds zijn o.a. door de Noren Seierstad en Sydsaeter (1985) in hun nog te verschijnen boek optimaliteitscondities geformuleerd, die specifiek op de sprongtijdstippen moeten gelden. In deze bijdrage zullen wij ons concentreren op de

eerstgenoemde mogelijkheid.

De methode van Vind behelst het continu veronderstellen van het model in een of andere artificiële tijd. Aangenomen wordt dat de artificiële tijd buiten de sprongtijdstippen parallel loopt met de 'gewone' tijd en op de sprongtijdstippen doorloopt terwijl de gewone tijd dan uiteraard stilstaat. Het model is daarmee continu in de artificiële tijd. Noodzakelijk bij de herdefiniëring van het model in de artificiële tijd is het definiëren van een tweetal stuurvariabelen:

$$\begin{aligned} U(w) &= 1 \text{ buiten de investeringsstijdstippen} \\ &= 0 \text{ op de investeringsstijdstippen} \\ \bar{I}(w) &= \text{de investeringsnelheid in de artificiële tijd} \end{aligned} \quad (7)$$

waarin:

$$\begin{aligned} w &= \text{de artificiële tijd;} \\ \int_{w_a}^{w_b} \bar{I} dw &= X(t^*) = \text{investeringsopdracht op tijdstip } t^*, \text{ met } w_a \text{ en } w_b \text{ als resp.} \\ &\quad \text{begin- en eindpunt van het investeringspad.} \end{aligned}$$

De gewone tijd is met deze herdefiniëring een toestandsvariabele geworden die voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\dot{t} = \frac{dt}{dw} = U(w) \quad (8)$$

De vergelijkingen (5) en (6) zijn als volgt te definiëren binnen de artificiële tijd:

$$\text{Max}_U \int_0^\infty e^{-rt} [UO(K) - (1-U)S(w_a, w_b, \bar{I})] dw \quad (9)$$

$$\text{o.v. } \dot{K} = \frac{dK}{dw} = (1-U)\bar{I} - UaK \quad (10)$$

waarin:

$S(w_a, w_b, \bar{I})$ = de investeringsuitgavenfunctie, die een functie is van de lengte van het investeringspad (w_a, w_b) en de investeringsnelheid $\bar{I}$.

Op het bovenstaande geherdefinieerde model zijn alle standaard optimal-control technieken van toepassing. Op basis van de door Van Loon (1983) ontworpen iteratieve methode is het mogelijk een optimaal bewegingspatroon van de kapitaal-goederenvoorraad af te leiden. Dit patroon bestaat uit een aaneenschakeling van investerings- en niet-investeringspaden.

5. Besluit

In deze bijdrage is een aanzet gegeven tot de verwerking van een discrete investeringsproces binnen een continu optimal-control model. Er is ingegaan op de meest plausibele oorzaak van dit discrete investeringsproces, het bestaan van 'economies of scale'. Voorts is uiteengezet dat bij gebruikmaking van de standaard optimal-control technieken discontinue toestandsvariabelen niet zijn toegestaan.

Teneinde een dergelijk discontinue optimal-control-model toch te kunnen oplossen kan gebruik worden gemaakt van het in deze bijdrage uiteengezette idee van Vind. Tevens hebben wij geduïd op een alternatieve oplossingsmethode waarbij additionele optimum condities voor de sprongtijdstippen worden geformuleerd. De methode van Vind is indirecter maar wiskundig eenvoudiger.

Literatuur

- A.W.A. Boot, (1984), "Optimum condities voor een discontinue investeringsprobleem", Reeks ter Discussie, Tilburg.
- P. van Loon, (1983), "A dynamic theory of the firm: production, finance and investment", (Springer, Berlijn).
- A.S. Manne, (1961), "Capacity expansion and probabilistic growth", *Econometrica* 29, pp. 632-649.
- A. Seierstad en K. Sydsaeter, (1985), "Jumps in the state variables", overdruk uit te verschijnen boek, ontvangen 22 mei 1984.
- K. Vind, (1967), "Control systems with jumps in the state variable", *Econometrica* 35, pp. 273-277.

EEN DYNAMISCH MODEL VOOR DE BEPALING VAN HET OPTIMALE PRIJS- EN RECLAMEBELEID¹⁾

W.J. Oomens²⁾

Deze bijdrage behandelt een dynamisch optimal-control-model voor de bepaling van het optimale prijs- en reclamebeleid in het geval dat de vraagfunctie geen concurrentievariabelen bevat. Behalve een prijs- en goodwillvariabele zijn de reclamebestedingen niet-lineair in de vraagvergelijking opgenomen. Dit heeft tot gevolg dat een groeipad van optimale reclamebestedingen naar het evenwichtspunt toe beschreven kan worden.

1. Inleiding

In de statische situatie geldt het Dorfman-Steiner theorema [1]. In het dynamische geval wordt veel gebruik gemaakt van vertragingsverdelingen³⁾ en van het Nerlove-Arrow-model [2]. Daar in het laatstgenoemde model de reclame-uitgaven niet expliciet in de vraagvergelijking zijn opgenomen heeft het model een bang-bang oplossing: in de aanloopperiode tot de evenwichtssituatie heeft het optimale reclamebudget ofwel de waarde 0 ofwel een zodanige waarde dat ineens de optimale situatie wordt bereikt. Het onderstaande optimal-control-model neemt de reclamebestedingen expliciet niet-lineair mee, zodat een groeipad van de reclameuitgaven naar het evenwichtspunt resulteert.

2. Een niet-lineaire uitbreiding van het Nerlove-Arrow-model

Nerlove en Arrow beschouwen de reclame-uitgaven als investeringen waardoor een voorraad goodwill $A(t)$, een soort reclamekapitaal, wordt opgebouwd. De prijs van een eenheid goodwill is één geldseenheid zodat een gulden van de huidige reclame-uitgaven $r(t)$ de goodwill met één eenheid verhoogt. Zij nemen verder aan dat de goodwill met een constante snelheid δ afneemt, zodat

1) Gepresenteerd tijdens de Nationale Econometristendag, Amsterdam, 17-4-1984.

2) Katholieke Hogeschool Tilburg, Subfaculteit der Econometrie, Kamer B 422, telefoon 013-662057, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg.

3) Zie o.a. [3].

$$(1) \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt} = r - \delta A, \quad A(0) = A_0$$

Economisch gezien betekent (1) dat de netto investering in goodwill het verschil is tussen bruto investering $r(t)$ en afschrijving $(\delta A(t))$. In tegenstelling tot Nerlove en Arrow die de vraag $q(t)$ alleen als een functie van de goodwill $A(t)$ en de prijs $p(t)$ zien, nemen wij ook de reclamevariabele expliciet niet-lineair in de vraagvergelijking op

$$(2) \quad q = q(p, r, A)$$

$$\text{met} \quad \frac{\partial q}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial q}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial A^2} < 0, \quad \frac{\partial q}{\partial r} > 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} < 0.$$

De winstfunctie wordt dan

$$(3) \quad \pi = pq(p, r, A) - cq(p, r, A) - r.$$

waarin π = winst

c = kosten per eenheid.

Het doel van de monopolist is het maximaliseren van de contante waarde van de netto opbrengstenstroom gediscoteerd met een vaste intrestvoet ρ , d.w.z.

$$(4) \quad \max_{r>0, p>0} [V_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \pi \, dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (p \cdot q(p, r, A) - c \cdot q(p, r, A) - r) dt],$$

onder voorwaarde (1).

De functies π en A zijn continu differentieerbare functies; $p(t)$ en $r(t)$ zijn stuksgewijs continue functies.

Daar de prijs p weliswaar in de doelfunctionaal (4) verschijnt maar niet in de differentiaalvergelijking (1) kan de maximalisering van V_0 naar r en p in twee stappen gebeuren. De eerste stap bestaat uit het maximaliseren van de winstfunctie π naar de prijs p voor een constante waarde van de goodwill A :

$$(5) \quad \frac{\partial \pi(p, r)}{\partial p} = q + (p - c) \frac{\partial q}{\partial p} = 0.$$

Hieruit volgt

$$(6) \quad p^* = \frac{c\eta_p}{\eta_p - 1}$$

waarbij de prijselasticiteit $\eta_p = -\frac{\partial q}{\partial p} \frac{p}{q} > 1$. In de tweede stap substitueert men de optimale prijs in de winstfunctie (3). De doelfunctie wordt nu

$$(7) \quad \max_{r>0} [V_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (p^* q(p^*, r, A) - cq(p^*, r, A) - r) dt].$$

We definiëren de Hamiltoniaan:

$$(8) \quad H = p^* q(p^*, r, A) - cq(p^*, r, A) - r + \psi(r - \delta A)$$

waarbij

$$(9) \quad \psi(t) = \frac{\partial V^*(t)}{\partial A} e^{\rho t}$$

de schaduwprijs is, d.w.z. de waarde van de marginale eenheid van de goodwill op tijdstip t , ervan uitgaande dat de optimale control tot aan het einde van de rit wordt uitgevoerd. De Hamiltoniaan meet de directe winst plus de tegen de schaduwprijs gewaardeerde waardeveranderingen van de goodwill. Van de noodzakelijke voorwaarden voor een maximum van (7) geven we alleen de voorwaarden weer, welke voor de afleiding noodzakelijk zijn, nl.:

$$(10) \quad \frac{d(e^{-\rho t} \cdot \psi)}{dt} = - \frac{\partial (e^{-\rho t} H)}{\partial A}$$

$$(11) \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0.$$

Voorwaarde (11) leidt tot

$$(12) \quad \frac{\partial H}{\partial r} = p^* \frac{\partial q}{\partial r} - c \frac{\partial q}{\partial r} - 1 + \psi = 0$$

of

$$(13) \quad 1 = (p^* - c) \frac{\partial q}{\partial r} + \psi.$$

Op het optimale pad moet de laatste gulden die besteed wordt aan reclame gelijk zijn aan het directe effect van de reclame-uitgaven op de bruto-opbrengst $(p^* - c) \frac{\partial q}{\partial r}$ en een indirect effect dat de reclame-uitgaven via de goodwill op de toekomstige winsten hebben (zie (9)). Vergelijking (13) laat zich gemakkelijk herformuleren in termen van elasticiteiten. Uit (6) volgt dat

$$(p^* - c) = \frac{p^*}{\eta_p}$$

en deze relatie gesubstitueerd in (13) levert op

$$(14) \quad \frac{r^*}{p^* q} = \frac{\eta_r}{\eta_p (1 - \psi)^*}$$

Teneinde het optimale reclamebeleid van de onderneming nader vast te stellen werken we de tweede voorwaarde i.c. (10) uit:

$$(15) \quad \psi(\rho + \delta) = (p^* - c) \frac{\partial q}{\partial A} + \dot{\psi}.$$

Uit de voorwaarden (13) en (15) elimineren we ψ en $\dot{\psi}$. Vergelijking (15) geeft

$$(16) \quad \psi = -[(p^* - c) \frac{\partial q}{\partial r} - 1]$$

en

$$(17) \quad \dot{\psi} = -(p^* - c) \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Dit gesubstitueerd in (15) levert op:

$$(18) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{[1 - (p^* - c) \frac{\partial q}{\partial r}](\rho + \delta) - (p^* - c) \frac{\partial q}{\partial A}}{-(p^* - c) \frac{\partial^2 q}{\partial r^2}}$$

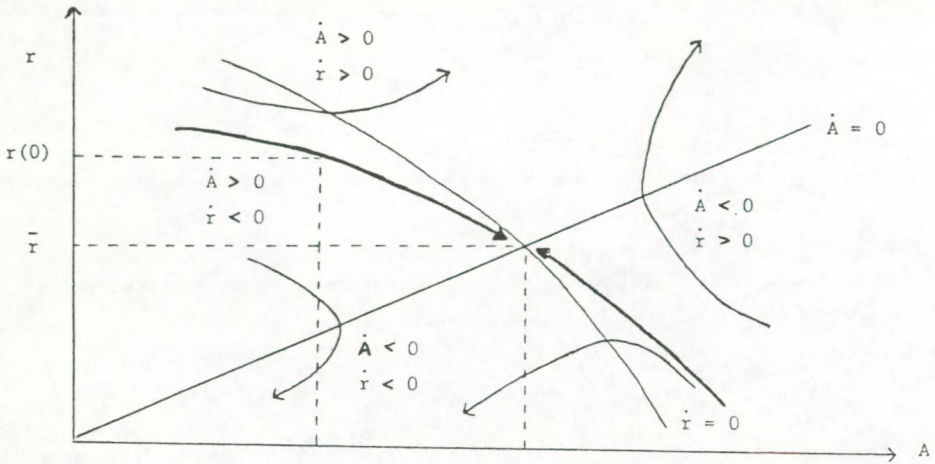
Vergelijking (18) tezamen met

$$(19) \quad \dot{A} = r - \delta A$$

levert een systeem van autonome differentiaalvergelijkingen op dat met behulp van een fasendiagram nader te analyseren is.⁴⁾

Het optimale pad wordt aangegeven door de zware lijnen die tot $(\bar{A}, \bar{r})$ naderen [5]. Het unieke pad naar $(\bar{A}, \bar{r})$ is het optimale pad omdat alle andere paden uiteindelijk leiden tot ofwel oneindig grote (A, r) ofwel een goodwill van nul. In geval $A(0) < \bar{A}$ is het optimaal de reclame-inspanningen in de beginperioden zo hoog mogelijk op te voeren en daarna de reclame-uitgaven geleidelijk te verminderen naarmate de goodwill A het evenwichtsniveau $\bar{A}$ nadert. Voor het geval dat $A(0) > \bar{A}$ geldt precies het omgekeerde.

4) Een uitwerking hiervan is te vinden in [4].



Figuur 1: Fasendiagram

3. Conclusie

De optimale prijs is evenredig met de kosten per eenheid en is lager naarmate de prijselasticiteit hoger is. Zijn de kosten per eenheid en de prijselasticiteit constant dan is ook de optimale prijs gedurende de aanlooperperiode tot het evenwichtspunt constant. Afhankelijk van de beginsituatie stijgen of dalen de optimale reclame-uitgaven geleidelijk in deze aanlooperperiode. Is het optimum eenmaal bereikt dan zijn de reclamebestedingen en ook de verkopen constant.

Literatuur

- [1] Dorfman, R. en P.O. Steiner, 1954, Optimal advertising and optimal quality, Am. Econ. Rev., 44, 826-836.
- [2] Nerlove, M. en K.J. Arrow, 1962, Optimal advertising policy under dynamic conditions, Economica, 29, 129-142.
- [3] Oomens, W.J., 1980, Vertragingsverdelingen in de marketing, Jaarboek van de Nederlandse Vereniging van Marktonderzoekers, 155-165.
- [4] Oomens, W.J., 1984, Het optimale prijs- en reclamebeleid van een monopolist, Reeks Ter Discussie, no. 84. Katholieke Hogeschool Tilburg, Subfaculteit der Econometrie.
- [5] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, 1962, The mathematical theory of optimal processes (Wiley, New York).

VERMOGENSVERSCHAFFERSCLIENTELES IN EEN DYNAMISCH ONDERNEMINGSMODEL¹⁾

G.J.C.Th. van Schijndel

In deze bijdrage wordt m.b.v. een eenvoudig optimal control model nagegaan hoe vermogensverschaffers onder invloed van de belasting reageren op de in de tijd aan veranderingen onderhevige politiek van een onderneming.

1. Inleiding

Binnen de theorie van de ondernemingsfinanciering vervult de invloed van de belasting een grote rol in de discussie omtrent de marktwaaarde van een onderneming. Invoering van zowel vennootschaps- als persoonlijke belasting leidt tot het zogenaamde 'financial leverage clientèles'-effect: ondernemingen met weinig vreemd vermogen trekken vermogensverschaffers aan uit de hogere inkomensklassen, terwijl ondernemingen met veel vreemd vermogen hun vermogensverschaffers vinden in de lagere inkomensklassen.

In deze bijdrage wordt nagegaan in hoeverre deze conclusie uit de statische theorie kan worden doorgetrokken c.q. aanvulling behoeft indien de ontwikkeling van de onderneming fasengewijs in de tijd verloopt als gevolg van een wisselende politiek t.a.v. financiering, investering en winstbestemming. Met behulp van een eenvoudig 'optimal control'-model wordt het gedrag van vermogensverschaffers tijdens iedere fase van de ontwikkeling van de onderneming onderzocht. Hierbij spelen de rentabiliteit van nieuwe investeringen door de onderneming en de belastingvoet op persoonlijk inkomen een belangrijke rol.

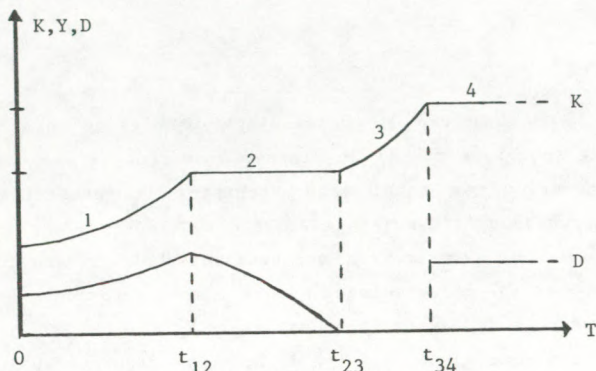
2. Uitgangssituatie

De uitgangssituatie wordt gegeven door de optimale ontwikkeling van een onderneming als gevolg van de doelstelling van het autonoom opererende management om de marktwaaarde van de onderneming te maximaliseren. Een derge-

1) Dit paper is een beknopte weergave van de tijdens de Nationale Econometristendag 1984 gehouden voordracht. Voor een uitgebreide analyse verwijzen we naar het rapport "Vermogenscliëntèles in statische en dynamische ondernemingsmodellen" dat op aanvraag verkrijgbaar is bij de auteur.
Katholieke Hogeschool Tilburg, Subfaculteit der Econometrie, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg, tel: 013-662062.

lijke ontwikkeling kan worden bepaald m.b.v. een optimaal dynamisch besturingsmodel. De onderneming doorloopt daarbij een aantal verschillende ontwikkelingsfasen, elk gekarakteriseerd door een bepaalde politiek ten aanzien van winstbestemming, financiering en investering, om uiteindelijk een evenwichtige eindfase te bereiken [zie o.a. Lesourne (1973), Ludwig (1978), Van Loon (1983) en Van Loon & Verheyen (1984)].

In het vervolg van dit paper gaan we uit van de in figuur 1 weergegeven ontwikkeling.



Figuur 1: optimale ontwikkeling

Bovendien veronderstellen we dat geldt:

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad V(T) &= (1-\tau_c)(O(K)-rY)/r \\
 &= V(T)(1-\tau_c)\left[\frac{dO}{dK} + h\left(\frac{dO}{dK} - r\right)\right] && \text{als } 0 < T < t_{12} \\
 (2) \quad \dot{V}(T) &= V(T)(1-\tau_c)\frac{dO}{dK} && \text{als } t_{12} < T < t_{34} \\
 &= 0 && \text{als } t_{34} < T < \infty \\
 (3) \quad D(T) &= (1-\tau_c)(O(K)-rY) && \text{als } 0 < T < t_{34} \\
 &= 0 && \text{als } t_{34} < T < \infty
 \end{aligned}$$

waarin

$D(T)$ = dividenduitkeringen op T

$K(T)$ = kapitaalgoederenvoorraad op T

$O(K)$ = opbrengst voor aftrek van interest en belasting, waarbij concaviteit is verondersteld t.o.v. K , $dO/dK > 0$ en $d^2O/dK^2 \leq 0$

T = tijd

- $X(T)$ = omvang eigen vermogen
 $Y(T)$ = omvang vreemd vermogen
 $V(T)$ = waarde van de onderneming
 r = marktrente
 h = maximale leenquote, daar $Y < hX$
 τ_c = vennootschapsbelastingvoet.

Uitgaande van bovenstaande ontwikkeling zullen we nu nagaan hoe vermogensverschaffers onder invloed van de belasting middels aan- en verkoop van aandelen reageren op dit wisselende beleid van de onderneming.

3. Het dynamisch beleggingsmodel

De betreffende vermogensverschaffer wil de contante opbrengstwaarde van zijn belegging na afdracht van belasting maximaliseren, waarbij hij de marktrente na belasting als disconteringsvoet hanteert. Als we veronderstellen dat de belasting over vermogenswinst direct moet worden afgedragen, kunnen we de doelfunctie als volgt weergeven:

$$(4) \quad \max_A \int_{T=0}^{\infty} \{F(T)[(1-\tau_d)D(T) - \tau_g \dot{V}(T)] - A(T)V(T)\} e^{-iT} dT$$

waarin

- $F(T)$ = fractie aandelen in bezit
 $A(T)$ = aan/verkoopintentie
 i = tijdsvoorkeurvoet, waarvoor geldt $i = (1-\tau_r)r$
 τ_d = belastingvoet op dividend
 τ_g = belastingvoet op vermogensaanwas
 τ_r = belastingvoet op overig inkomen.

De fractie aandelen in bezit verandert onder invloed van de aan- en/of verkoopintentie van de vermogensverschaffer. Een eenvoudige wijze om deze invloed weer te geven is de volgende:

$$(5) \quad \dot{F}(T) := \frac{dF}{dT} = A(T)$$

$$(6) \quad -1 < A(T) < 1$$

Voorts mag F nooit negatief worden of een waarde groter dan één aannemen. Ten slotte veronderstellen we dat de vermogensverschaffer onbeperkt geld kan lenen tegen de geldende marktrente, zodat een budgetrestrictie overbodig is.

Het gepresenteerde dynamische beleggingsmodel kan worden opgelost m.b.v. het maximumprincipe van Pontryagin. De uitgebreide Hamiltoniaan of Lagrange functie wordt gegeven door

$$(7) \quad L = \{F(T)[(1-\tau_d)D(T) - \tau_g \dot{V}(T)] - A(T)V(T)\}e^{-iT} + \psi A(T) + \lambda_1[A(T)+1] + \lambda_2[1-A(T)]$$

waarin

$\psi = \psi(T)$ de toegevoegde variabele

$\lambda_j = \lambda_j(T)$ dynamische Lagrangemultiplicatoren.

Met behulp van deze Lagrangefunctie kunnen de noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor optimaliteit worden bepaald. Op basis hiervan kunnen we drie toegelaten combinaties van actieve en niet-actieve randvoorwaarden onderscheiden, waarbij iedere combinatie een optimale aan/verkooppolitiek karakteriseert.

politiek	λ_1	λ_2	A	
A	+	0	-1	max. verkoop
B	0	+	1	max. aankoop
C	0	0	onbepaald	indifferent

Tabel 1: karakteristieken toegelaten paden.

Iedere politiek heeft een bepaald ontwikkelingspad tot gevolg. Deze paden kunnen m.b.v. de iteratieve procedure van Van Loon (1983) worden gekoppeld tot optimale ontwikkelingspatronen, die de activiteiten van de vermogensverschaffers weergeven gedurende de totale planperiode. Bij de bepaling van deze patronen speelt de plaats van de vermogensverschaffer, bepaald door de hoogte van zijn belastingvoet op overig inkomen τ_r , ten opzichte van de zgn. politiek-neutrale belegger een belangrijke rol. De politiek neutrale belegger wordt op ieder tijdstip T vastgelegd door de belastingvoet $\tau_r^*(T)$, die voldoet aan de marktevenwichtsvergelijking

$$(8) \quad (1-\tau_g)\dot{V}(T) + (1-\tau_d)D(T) = (1-\tau_r^*(T))rV(T)$$

Afhankelijk van de hoogte van de belastingvoet τ_r kunnen we nu drie verschillende ontwikkelingspatronen onderscheiden:

patroon	conditie	ontwikkeling
1	$0 < \tau_r < \tau_r^*(0)$	politiek A $\rightarrow$ politiek C
2	$\tau_r^*(0) < \tau_r < \tau_r^*(t_{34})$	politiek B $\rightarrow$ politiek A $\rightarrow$ politiek C
3	$\tau_r^*(t_{34}) < \tau_r < \tau_r^{\max}$	politiek B $\rightarrow$ politiek C

Aangetoond kan worden dat politiek C onder alle omstandigheden als eindpolitiek kan functioneren en dat bovendien tijdens het dividendpad van de onderneming een andere politiek dan C niet toelaatbaar is. Met andere woorden: tijdens het dividendpad stelt iedere vermogensverschaffer zich indifferent op.

De politiek vóór het dividendpad is afhankelijk van de hoogte van de belastingvoet τ_r . Een lage waarde heeft een verkoopintentie tot gevolg, een zeer hoge waarde een aankoopintentie. In het 'middengebied' worden beide politieken na elkaar ten uitvoer gebracht. Het omslagpunt ligt op het moment dat de contante waarde van alle toekomstige winstmogelijkheden gelijk is aan de contante waarde van alle toekomstige belastingafdrachten.

In de situatie dat de onderneming de winst aanwendt ter financiering van nieuwe investeringen zal een hogere belastingvoet leiden tot het langer aanhouden van een aankoopintentie gezien de acceptatie van lagere marginale rendementen.

4. Slotbeschouwing

Uit de statische theorie is de invloed van de belasting op de beleggingskeuze bekend: elk bedrijf kent zijn eigen vermogenverschaffers. Binnen de dynamische theorie is de invloed van persoonlijke belastingen op de politiek en de ontwikkeling van de onderneming onderzocht [zie van Schijndel (1983)]. In dit paper is een eerste aanzet gegeven om de reacties van vermogensverschaffers op een gegeven wisselende ontwikkeling van een onderneming aan te geven. Met behulp van een eenvoudig optimal control model is de voorkeur van vermogensverschaffers met verschillende belastingvoeten tijdens de ontwikkelingsfasen van een onderneming bestudeerd. Niets is vermeld over het aantal aandelen dat de vermogensverschaffer bezit dan wel aan- of verkoopt. Teneinde

aan deze problemen aandacht te kunnen schenken dient een budgetvergelijking te worden geïntroduceerd, die beperkingen oplegt aan het aantal te kopen aandelen [zie Van Schijndel (1984)].

Ook is het interessant om de voorkeuren van verschillende vermogensverschaffers met elkaar te confronteren om de vraag te kunnen beantwoorden wie de aandelen van de betreffende onderneming in iedere fase daadwerkelijk bezit.

Tenslotte kunnen we ook nog meerdere ondernemingen in de beschouwingen betrekken om zodoende tot een evenwichtstheorie te komen.

Literatuur

- Lesourne J., (1973), *Modèles de Croissance des Entreprises* (Dunod, Parijs).
- Loon P.J.J.M. van, (1983), *A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment* (Springer, Berlijn).
- Loon P.J.J.M. van & P.A. Verheyen, (1984), Groeifasen bij bedrijven, te verschijnen in *Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde*.
- Ludwig Th., (1978), *Optimale Expansionspfade der Unternehmung* (Gabler, Wiesbaden).
- Schijndel G.J.C.Th. van, (1983), Fiscale invloeden op de ontwikkeling van de onderneming, in Herst, Van der Meulen & Ruizendaal (eds): *Financiering en Belegging*, stand van zaken anno 1983, 315-333.
- Schijndel G.J.C.Th. van, (1984), Dynamic tax induced return clientèles, te verschijnen in Feichtinger (ed): *Economic Applications of Control Theory* (North Holland, Amsterdam).

DE ONTWIKKELING VAN DE OMVANG VAN DE NEDERLANDSE MELKVEESTAPEL¹⁾J.H.J. Roemen²⁾

In deze notitie wordt een op biologische en economische overwegingen stoelend "Markov"-model gepresenteerd dat gebruikt kan worden voor de beschrijving van de ontwikkeling van de omvang van de Nederlandse melkveestapel.

1. Inleiding

Een actueel thema in E.E.G. verband vormt momenteel de ontwikkeling van de melkproduktie in de diverse lidstaten. Eén van de determinanten van deze ontwikkeling is die van de omvang van de nationale melkveestapels. Voor Nederland beschikken we over op steekproeven berustende, maandelijks gegevens betreffende de omvang van de rundveestapel en de samenstelling naar categorieën als melkgevend, droogstaand enz. alsmede over stroomgegevens betreffende het verricht aantal slachtingen en de in- en export van rundvee, maar niet over waarnemingen of schattingen t.a.v. de instroom van vaarzen in de melkveestapel en de uitstroom van niet langer voldoende produktief geachte koeien. Bekend is zodoende wel de per saldo ontwikkeling van de nationale rundveestapel, doch niet de wijze waarop deze als resultaat van in- en uitstroom tot stand is gekomen.

In deze notitie wordt nu een model gegeven waarmee met gebruikmaking van de beschikbare stroom- en tijdstipgegevens de doorstroming binnen de melkveestapel geschat kan worden. Op basis van deze schattingen kan vervolgens de betekenis van het EEG-beleid voor de melksector onderzocht worden.

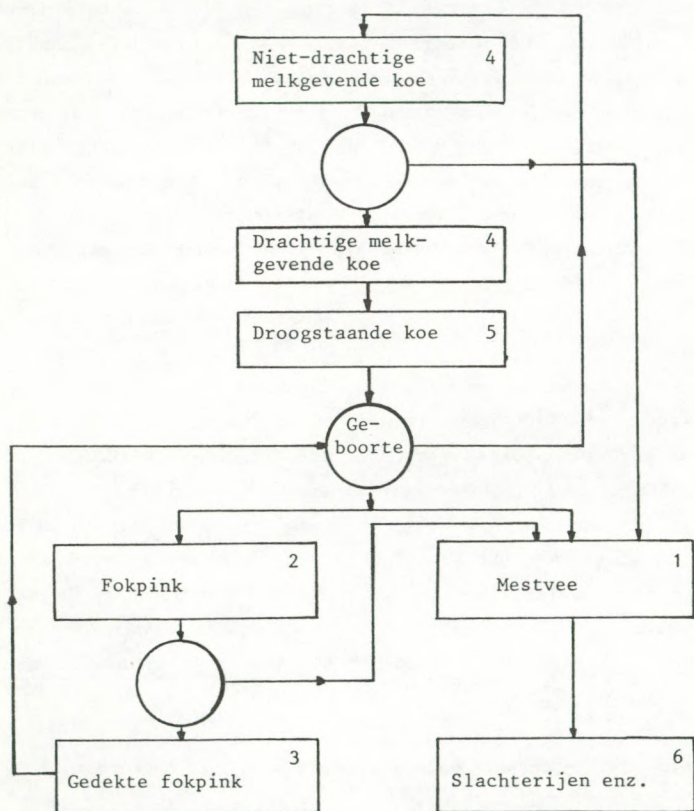
Gekozen is daarbij voor een "Markov"-model, een type model dat in de economie vaker gehanteerd wordt voor de bestudering van fenomenen waaraan een verdelingsmechanisme ten grondslag kan worden gelegd. Als toestanden in dit model onderscheiden we de elkaar in de tijd opvolgende stadia waarin een stuk rundvee kan verkeren. Een gestyleerd voorbeeld van een dergelijke opdeling in sta-

1) Gepresenteerd tijdens de Nationale Econometristendag, Amsterdam, 17-4-1984; discussiant: F.A. van der Duyn Schouten.

2) Katholieke Hogeschool Tilburg, Subfaculteit der Econometrie, Kamer B 424, telefoon 013-662054, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg.

dia levert het schema van figuur 1. De cirkels daarin staan voor de momenten waarop door de rundveehouder een keuze gemaakt moet worden uit de bestemmingen die aan een rund gegeven kunnen worden. De bovenste en onderste cirkel staan voor de keuze voor handhaven van een melkkoe resp. fokpink in de fokrichting dan wel afstoten naar de mesterijsector, terwijl met de middelste cirkel wordt aangegeven, dat een kalf voor de mesterij- of fokkerijsector kan worden bestemd. Omwille van de overzichtelijkheid van de figuur is de fokstierencategorie niet weergegeven, evenmin als de importen of de uitstroom door ziekte en dergelijke.

Figuur 1. Enkele biologische relaties binnen de rundveehouderij.



2. Het model

De beweging over de zes in figuur 1 onderscheiden stadia van een zich binnen het systeem bevindend of tot het systeem toetredend rund wordt bepaald door beslissingen van de rundveehouder. Aangenomen mag worden, dat in de beslissingen t.a.v. de duur van de handhaving in een categorie, de inzet in en de afvoer uit een categorie, overwegingen m.b.t. de (verwachte) profitabiliteit een doorslaggevende rol spelen. Deze (verwachte) rentabiliteit is voortdurend aan verandering onderhevig, zij het dat de mate alsmede het tempo van verandering afhangt van de wijze waarop in de EEG de zuivel- en rundvleesmarkt geordend zijn. We veronderstellen nu, dat de beweging van een zich binnen het systeem bevindend of tot het systeem toetredend stuk rundvee over de verzameling van toestanden als resultaat van de inwerking van biologische en economische factoren kan worden weergegeven d.m.v. een semi-Markovketen, een proces, dat behalve door een matrix van overgangskansen door de verdelingsfuncties voor de verblijfstijden in de diverse stadia wordt gekenmerkt. Omdat de inwerkende economische factoren voortdurend veranderen, zullen ook de parameters van dit proces veranderen.

Op basis van het schema van figuur 1 kan de ontwikkeling in de tijd van de onderscheiden categorieën exclusief de slachttoestand en de importen worden weergegeven met het volgende stelsel:

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_1(t) &= \underline{f}_{11}(t) + \underline{f}_{21}(t) + \underline{f}_{41}(t) + \underline{g}_{31}(t) + \underline{g}_{51}(t) \\
 \underline{f}_2(t) &= \underline{f}_{22}(t) + \underline{g}_{32}(t) + \underline{g}_{52}(t) \\
 \underline{f}_3(t) &= \underline{f}_{23}(t) + \underline{f}_{33}(t) \\
 \underline{f}_4(t) &= \underline{f}_{34}(t) + \underline{f}_{44}(t) + \underline{f}_{54}(t) \\
 \underline{f}_5(t) &= \underline{f}_{45}(t) + \underline{f}_{55}(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daarbij staat $\underline{f}_j(t)$ voor het aantal stuks rundvee dat zich op tijdstip t in klasse j bevindt, $\underline{f}_{ij}(t)$ voor het aantal dieren dat op tijdstip $t-1$ in categorie i en op tijdstip t in categorie j vertoeft, $\underline{g}_{31}(t)$ voor de in periode t uit de categorie 3 gekozen kalveren die bestemd werden voor categorie 1 en $\underline{g}_{51}(t)$, $\underline{g}_{32}(t)$ en $\underline{g}_{52}(t)$ een overeenkomstige inhoud bezitten. Daarbij geldt

dat $\underline{f}_{34}(t) = \underline{g}_{31}(t) + \underline{g}_{32}(t)$ en $\underline{f}_{54}(t) = \underline{g}_{51}(t) + \underline{g}_{52}(t)$. Aangenomen is daarbij, dat per overgang vanuit de categorie gedekte fokpinken of droogstaande koeien naar de toestand melkgevend één kalf beschikbaar komt en dat de lengte van de droogstandtijd tenminste één periode beslaat.

We gaan er nu vanuit, dat de kansverdeling van $\underline{f}_j(t)$, volgens onze basisveronderstelling een superpositie van semi-Markovketens, adequaat benaderd kan worden met een superpositie van enkelvoudige Markovketens waarvan de overgangskansen afhangen van die van de enkelvoudige keten en de verwachtingswaarde van de verblijfstijd in de resp. toestanden.

Op basis van deze benadering volgt nu voor de verwachting van de klassebezetting op een tijdstip $t+1$ exclusief de toetreding door geboorte:

$$E\{\underline{F}(t+1) - \underline{G}(t+1)\} \approx M(t)'E\{\underline{F}(t)\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

waarbij $\underline{F}(t+1)' = [\underline{f}_1(t+1), \underline{f}_2(t+1), \underline{f}_3(t+1), \underline{f}_4(t+1), \underline{f}_5(t+1), \underline{f}_6(t+1)]$

$$\underline{G}(t+1)' = [\underline{g}_{31}(t+1) + \underline{g}_{51}(t+1), \underline{g}_{32}(t+1) + \underline{g}_{52}(t+1), 0, 0, 0, 0]$$

$$M(t)' = \begin{array}{cccccc} m_{11}(t) & m_{21}(t) & 0 & m_{41}(t) & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{23}(t) & m_{33}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{34}(t) & m_{44}(t) & m_{54}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{45}(t) & m_{55}(t) & 0 \\ 1-m_{11}(t) & m_{26}(t) & m_{36}(t) & m_{46}(t) & 0 & 1 \end{array} \quad (2.3)$$

Voor de elementen van $M(t)$ geldt dat ze rijgewijs sommeren tot 1 en niet-negatief zijn.

(2.2) betreft enkel de voortzetting van het verblijf in een verzameling van klassen, doch niet de uitbreiding en/of instandhouding van de nationale rundveestapel als resultaat van de instroom van geboren kalveren. De relatie (2.2) geeft de verwachte herverdeling van een qua omvang gegeven populatie, maar genereert de omvang van de populatie niet.

Het aantal door geboorte voor opnemings in de nationale rundveestapel beschikbaar komende kalveren is gelijk aan het aantal overgangen vanuit de toestanden gedekte fokpink en droogstaande koe naar de categorie melkgevend. Met $R(t)$ de matrix waarvan de elementen de fracties tot de klassen 1 en 2 toetredende kal-

veren in periode $t+1$ specificeren, krijgen we nu voor de verwachte aantallen runderen in de onderscheiden klassen:

$$E\{\underline{F}(t+1)\} \approx \{M(t) + R(t)\}' E\{\underline{F}(t)\} \quad (2.4)$$

Op basis van (2.4) kan voor de beschrijving van de ontwikkeling in de tijd van een nationale rundveestapel, en daarmee van een melkveestapel, het volgende model worden afgeleid (excl. importen):

$$\underline{F}(t+1) = \{M(t) + R(t)\}' \underline{F}(t) + \underline{K}(t+1) \quad (2.5)$$

waarbij de vector $\underline{K}(t+1)$ niet alleen de procesvariabiliteit, opvangt maar ook als restterm fungeert.

In de terminologie van de regressie-analyse geeft (2.5) een multivariaat multipel regressiemodel met stochastische regressoren waarbij de regressiecoëfficiënten aan een aantal logische voorwaarden moeten voldoen.

3. De toepassing

Het model (2.5) is toegepast op Nederlandse gegevens m.b.t. de jaren 1972-1976. Het schattingsprobleem werd geformuleerd als een kwadratisch programmeringsvraagstuk onder een aantal lineaire restricties. In het voorwaardensysteem wordt niet alleen met logisch aan het model te stellen eisen als bijv. de niet-negativiteit van de coëfficiënten rekening gehouden, maar is ook enige kennis m.b.t. de verblijfstijd in enkele stadia opgenomen. Zo geldt bijv. dat de draagtijd van een rund 9 maanden bedraagt, zodat het verwacht aantal instromende vaarzen in een periode t ten hoogste gelijk kan zijn aan het verwacht aantal overgangen van toestand 2 naar toestand 3 in de periode $t-9$.

I.v.m. rekentijd en geheugenbeslag werd het programmeringsprobleem opgesplitst in een aantal elkaar ten dele overlappende stukken. De oplossing werd verkregen met het Lemke-Rep algoritme.

Voor de beoordeling van de kwaliteit van het model is niet alleen gelet op de gebruikelijke criteria, maar ook op de interpreteerbaarheid en plausibiliteit in biologische termen. Onderzocht wordt nog, hoe gevoelig de niet-onbevredigende resultaten zijn voor het gehanteerde criterium.

4. Ter afsluiting

In par. 2 zijn we ervan uitgegaan, dat een superpositie van semi-Markovketens adequaat benaderd kan worden met een superpositie van enkelvoudige Markovketens. Op de vraag hoe adequaat deze benadering is, kunnen we (nog) geen antwoord geven, omdat ons de kansverdeling van deze grootheid (nog) niet bekend is.

Literatuur

J. Roemen, In- en uitstroom van melkvee in de Nederlandse rundveesector geschat m.b.v. een "Markov"-model, Reeks Ter Discussie, KHT, 1984.

TECHNISCHE DIENSTEN: INTERN OF EXTERN?¹⁾B.R. Meijboom²⁾

Binnen een integraal bedrijfsmodel wordt de keuze tussen het intern vervaardigen dan wel extern aanschaffen van technische diensten behandeld. Interne productie roept vaste kosten op; voorts leveren interne technische diensten aan elkaar. Zowel het geval van een constante als dat van een variërende netto behoefte komt aan de orde.

1. Inleiding

Een belangrijk deel van de literatuur over kostenallocatieproblemen is gewijd aan situaties waarin bepaalde diensten van een bedrijf, behalve aan de produktieafdelingen, eveneens aan elkaar diensten verlenen. Veelal wordt verondersteld dat de wederzijdse leveringen structuur voldoet aan de Leontief input-output axioma's.

De aanverwante problematiek, waaronder het berekenen van in totaal te produceren hoeveelheden, kostprijzen etc., wordt in de Engelstalige literatuur het "reciprocal service cost problem" genoemd. In [3] wordt de literatuur op dit gebied historisch, en mede daardoor verhelderend, behandeld. Bovendien breiden de auteurs het gangbare concept uit door vermijdbare, vaste kosten mee te nemen in de analyse.

Wij zullen deze laatste versie van het model gebruiken als uitgangspunt voor enige bespiegelingen aangaande het zogenaamde "make-or-buy" probleem. Na de introductie van de benodigde begrippen in de hiernavolgende paragraaf, volgen de formulering en analyse van het probleem vanuit twee in zekere zin tegengestelde invalshoeken (par. 3 en 4).

1) Gepresenteerd tijdens de Nationale Econometristendag, Amsterdam, 17-4-1984; discussiant: A. Volgenant.

2) Katholieke Hogeschool Tilburg, Subfaculteit Econometrie, Kamer B418, telefoon 013-662733, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg.

2. Enkele begrippen

Het "make-or-buy" probleem heeft betrekking op de beslissing of een bedrijf bepaalde voor het productieproces onontbeerlijke diensten of producten intern voortbrengt dan wel extern (i.e. buiten het bedrijf) aanschaf. Deze inputs zullen we voortaan technische diensten (TD_i , $i = 1, \dots, n$) noemen.

Veelal brengt interne vervaardiging van een TD_i niet alleen variabele kosten $a_i T_i$ ($a_i \geq 0$, T_i productie-omvang), maar ook vaste kosten b_i ($b_i > 0$) met zich mee, terwijl deze TD extern voor een constante prijs per eenheid $\tilde{a}_i$ ($\tilde{a}_i > a_i$) verkrijgbaar is. Het is eenvoudig na te gaan dat voor $0 \leq T_i < (\tilde{a}_i - a_i)/b_i$ externe aanschaf te prefereren is boven interne productie, terwijl het omgekeerde geldt voor $T_i > (\tilde{a}_i - a_i)/b_i$. De waarde $(\tilde{a}_i - a_i)/b_i$ noemen we het omslagvolume (Engels: breakeven volume).

Wanneer intern vervaardigde TD's bovendien onderling diensten verlenen (d.w.z. leveringen tussen $TD_1, \dots, TD_n$), is een dergelijke eenvoudige berekening niet geldig.

Definitie:

De netto behoefte aan TD's is de gezamenlijke behoefte aan $TD_1, \dots, TD_n$ vanuit andere delen van het bedrijf aan de sector technische diensten (Notatie: $T_1, \dots$, resp. T_n).

Men kan slechts spreken over het omslagvolume van zeg TD_1 als de netto behoefte aan de overige TD's, i.e. $T_2, \dots, T_n$, constant is.

3. Eerste invalshoek: constante netto behoefte

Als illustratie van de meest gevolgde aanpak in de literatuur behandelen we een voorbeeld ontleend aan [3, p. 597]. Zie tabel 1:

VAN \ NAAR		TD1	TD2	TD3
Technische Dienst	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{20}$
	2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{10}$
	3	0	$\frac{1}{24}$	0
Intern:	a	80	40	24
	b	6000	7000	2000
Extern:	$\tilde{a}$	165	195	65
Netto behoefte:		65	80	95

Tabel 1: Voorbeeld met drie TD's die in geval van interne produktie, onderling diensten verlenen.

Beschouw de kolom van TD2. Behalve f 7000 aan vaste kosten, kost interne produktie per eenheid f 40, plus $\frac{1}{6}$ eenheid TD1 en $\frac{1}{24}$ eenheid TD3. Externe aanschaf kost enkel f 195 per eenheid. De vaste kosten zijn vermijdbaar door TD2 extern te kopen (Analoge uitspraken gelden voor TD1 en TD3).

Noemen we nu een uitspraak die vaststelt welke TD's intern gemaakt en welke TD's extern gekocht worden een intern-extern alternatief, dan zijn er in bovenstaand voorbeeld $2^3 = 8$ intern-extern alternatieven.

Probleem 1:

Gegeven de netto behoefte aan TD's, welk intern-extern alternatief leidt tot minimale kosten?

Zonder vermijdbare vaste kosten is dit probleem als Lineair Programmeringsprobleem te formuleren en op te lossen (zie [1]). De optimale duale variabelen hebben bovendien een nuttige economische interpretatie. Het huidige geval, d.w.z. met vermijdbare vaste kosten noopt tot een aanpak via gemengd geheel-tallige LP-technieken (zie [3]). Bij een groot aantal technische diensten kan dit tot rekenkundige complicaties leiden. Voorts genereert men geen economisch bruikbare duale variabelen.

4. Tweede invalshoek: variërende netto behoefte

Stel dat $T' = (T_1, T_2, T_3)$ de netto behoefte vector voorstelt.

Probleem 2:

Gegeven een der intern-extern alternatieven, voor welke $T \geq 0$ is dit alternatief kostenminimaliserend?

Voortbordurend op de gemengd geheeltallige LP-aanpak van de vorige paragraaf, zouden we nu op het terrein van de parametrische programmering belanden. Theoretisch [2] is dit gebied weinig ontwikkeld; we kiezen daarom voor een andere benadering, die we inleiden op basis van tabel 1.

Beschouw het intern-extern alternatief: TD1 en TD2 intern, TD3 extern (afgekort iie). De doorleveringsstructuur ziet er als volgt uit:

NAAR	TD1	TD2	TD3	
VAN				
TD1	0	$\frac{1}{6}$	0	
TD2	$\frac{1}{3}$	0	0	+ matrix A_{iie}
TD3	0	$\frac{1}{24}$	0	

TD3 wordt extern gekocht, vandaar de drie nullen in de derde kolom.

De resp. variabele kosten per eenheid zijn: 80, 40, 65.

De resp. vaste kosten zijn: 6000, 7000, 0.

Gecumuleerde variabele kosten per eenheid: $(80, 40, 65)(I - A_{iie})^{-1} =$

$(99.8, 59.3, 65)$. Totale vaste kosten: $6000 + 7000 + 0 = 13000$. De gecumuleerde kostenfunctie $C(T_1, T_2, T_3)$ voor het alternatief iie is derhalve

$$C(T_1, T_2, T_3) = 99.8T_1 + 59.3T_2 + 65T_3 + 13000$$

Men kan voor elk van de 8 intern-extern alternatieven een dergelijke (lineaire!) kostenfunctie afleiden. Noteer ze als $C^1(T_1, T_2, T_3), \dots, C^8(T_1, T_2, T_3)$. Probleem 2 kan nu als volgt geformuleerd worden:

Zij $C^j(T_1, T_2, T_3)$ de kostenfunctie van het j -de intern-extern alternatief. Welke T_1, T_2, T_3 voldoen aan

$$C^j(T_1, T_2, T_3) \leq C^k(T_1, T_2, T_3), \quad k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, 8$$

$$T_1, T_2, T_3 \geq 0$$

5. Besluit; integraal bedrijfsmodel voor beslissen bij meerdere niveaus

Deze bijdrage betreft "make-or-buy" beslissingen, welke samen met multiple technologieën voor produkten als generalisatie van het Leontief input-output model zijn gebruikt [5]. De samenhang tussen technologie en "make-or-buy" keuzen verklaart onze interesse voor variaties in de netto behoefte aan TD's. Ten derde kan men allocatie van vaste kosten (t.g.v. algemene diensten als directie, public relations) meenemen in de analyse [6]. Zo resulteert een voldoende algemeen kader, integraal bedrijfsmodel te noemen, waarin we het beslissen bij meerdere niveaus, met name delegatie d.m.v. prijzen en budgetten, willen analyseren. Mogelijkerwijs spelen inzichten gebaseerd op decompositie [4] hierbij een voorname rol.

Literatuur

- [1] Baker, K.R., Taylor, R.E. A linear programming framework for cost allocation and external acquisition when reciprocal services exist, *The Accounting Review* (Oktober 1979) pp. 784-790.
- [2] Geoffrion, A.M., Nauss, R., Parametric and postoptimality analysis in integer programming, *Management Science* 23 no. 5 (Januari 1977), pp. 453-466.
- [3] Manes, R.P., Park, S.H., Jensen, R., Relevant costs of intermediate goods and services, *The Accounting Review* (Juli 1982), pp. 594-606.
- [4] Meijboom, B.R., Decomposition-based planning procedures, KHT Reeks "Ter Discussie" no. 83.26 (September 1983).
- [5] Meijboom, B.R., An input-output like corporate model including multiple technologies and "make-or-buy" decisions, KHT Reeks "Ter Discussie" no. 84.08 (April 1984).
- [6] Meijboom, B.R., Joint and common cost allocation in a multi-level organization, paper gepresenteerd tijdens TIMS XXVI, Kopenhagen (Juni 1984).

ONZEKERHEID EN DYNAMISCHE STABILITEIT
BIJ EEN PRODUKTIESYSTEEM MET ROLLENDE PLANNINGMETHODIEK

K. Boskma
C. A. Th. Takkenberg
Economische Faculteit
Rijks Universiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen

Discussiant: P. van Loon

1. INLEIDING

Bij het opstellen van plannen waarin een relatief lang tijdvak moet worden overzien speelt onzekerheid in het algemeen een belangrijke rol. Tijdens de uitvoering van de reeks activiteiten die uit een plan voortvloeien is het veelal niet mogelijk bij het optreden van veranderingen in de omstandigheden of van de verwachtingen de reeds in gang gezette activiteiten te stoppen of zouden wijzigingen hiervan grote moeilijkheden of hoge kosten met zich meebrengen. Besproken wordt of reeds bij het opstellen van plannen kan worden geanticipeerd op de eventuele mogelijkheid van aanpassingen van het plan.

In dit artikel wordt ingegaan op het rekening houden met onzekerheid bij de middellange termijn planning van produktieniveaus ("master planning") zoals die in een onderneming werden geconstateerd. Het betreft hier een situatie van seriefabricage op voorraad. In dit geval blijken heuristische procedures te worden toegepast waaruit een "afwachtende houding" blijkt t.a.v. het wijzigen van produktieniveaus. Wijzigingen in de produktieniveaus worden volgens deze regels niet kort na het tijdstip van planning in de bij die planningronde behorende plannen opgenomen. In tegendeel: er bestaat een voorkeur voor het zo lang mogelijk handhaven van bestaande produktieniveaus. Er wordt dus niet -zoals bijvoorbeeld van Hees en Monhemius (1970) aanbevelen- "snel en gedempt" gereageerd op verstoringen maar er wordt bewust gewacht of de trend in de ontwikkelingen bestendig is voordat met een "sprong" het bestaande produktieniveau wordt gewijzigd (met het gevaar dat "laat en abrupt" wordt gereageerd). Hierdoor wordt voorkomen dat premature beslissingen worden genomen die later mogelijk teruggedraaid moeten worden. Het gevolg van het laatste zou zijn dat de gerealiseerde plannen achteraf gezien een relatief groot aantal wisselingen van produktieniveaus vertonen. De houding t.a.v. onzekerheid leidt in dit geval dus tevens tot een relatief klein aantal veranderingen van de plannen bij een rollende planningmethodiek. Men zou op grond van dit kenmerk kunnen spreken van "stabiele" plannen. Omdat bij een rollende planningmethodiek (herplanning na iedere subperiode) steeds wordt uitgegaan van de nieuwe verwachtingen en de nieuwe toestand (o.a. de feitelijk gerealiseerde produktie en afzet in de verstreken subperiode) komt de dynamiek van de omgeving en het produktiesysteem in de nieuwe plannen naar voren. In het kader van een rollende planningmethodiek hanteren we daarom het begrip "dynamische stabiliteit": de mate van rust in de gerealiseerde produktieniveaus (de rust is lager naarmate het aantal omslagpunten per tijdvak hoger is). De dynamische stabiliteit wordt dus altijd ex

post gemeten. Het aantal veranderingen van de produktieniveaus in een bepaald plan voordat dit wordt uitgevoerd zou een maat kunnen zijn voor de "statische stabiliteit" of wel de "stabiliteit ex ante".

Het begrip "dynamische stabiliteit" zoals hier gedefinieerd kan o.i. een belangrijke maatstaf zijn voor het beoordelen van planningprocedures bij een rollende planningmethodiek.

In dit artikel worden de resultaten besproken van een simulatiestudie van een rollende planningmethodiek van een reeds genoemde produktie-eenheid. Uitgaande van de gevonden heuristische procedures wordt een normatief model ontwikkeld. Hierbij is gekozen voor een lineair meer perioden model dat met behulp van lineaire programmering kan worden opgelost. Met behulp van dit meer periodenmodel wordt het verschijnsel van de dynamische stabiliteit onderzocht en wordt aangetoond dat een bevredigende dynamische stabiliteit kan worden verkregen door toepassing van drempelwaarden in het model, die moeten worden overschreden bij een sprong naar een ander produktieniveau.

2. MIDDELLANGE TERMIJN (MLT) PLANNING VAN DE PRODUKTIE

Een kernprobleem van de MLT-planning betreft de afstemming van de produktiesnelheid en de vraagsnelheid. Hiervoor is het noodzakelijk de afzet over een periode van doorgaans één à twee jaren te voorspellen. Tijdens uitvoering van het plan blijken elke subperiode zowel de voorspellingen van de afzet als de geplande produktie achteraf niet precies te zijn gerealiseerd. Deze afwijkingen, die als storing kunnen worden beschouwd, bezitten een meestal onbekende verdeling en wellicht ook een "bias" door bijvoorbeeld een optimisme t.a.v. de verwachtingen van de toekomstige afzet.

In de literatuur wordt de MLT-planning meestal benaderd met behulp van deterministische modellen, zie Boskma (1979).

In het kader van een rollende planning is het belangrijk dat premature beslissingen tot wijzigingen van de produktieniveaus worden voorkomen.

3. DOELSTELLINGEN VAN DE MLT-PLANNING

In een studie van Takkenberg (1983) werden in een onderneming doelstellingen aangetroffen m.b.t. o.a. continuïteit van produktieniveaus, statische stabiliteit, onzekerheidshantering en dynamische stabiliteit.

De continuïteit betrof de eis dat de ingezette produktiecapaciteit de volledige aantallen beschikbare uren benut moest worden. De verwachte verliezen bij het weer "op tempo komen" na een werkonderbreking spelen hierbij een rol.

De statische stabiliteit betrof de gewenste "rust" in de produktieafdeling. Een relatief groot aantal wijzigingen van het produktieniveau per tijdseenheid zou aanleiding kunnen geven tot problemen van sociaal-psychologische aard.

De onzekerheidsvermijding -niet prematuur reageren van de produktieafdeling- werd bereikt door een afwachtende houding aan te nemen t.a.v. de voorgenomen wijzigingen van het produktieniveau. In principe werd de beslissing t.a.v. een gewenste wijziging van de produktieniveaus zo ver als mogelijk (maar wel voor het eind

van het jaar) naar achter in het jaar geschoven. De produktieniveaus op het moment van planning werden dus zo lang mogelijk gehandhaafd. Deze strategie leidt tevens tot een goede dynamische stabiliteit: achteraf gezien blijkt er in de uitgevoerde plannen een relatief klein aantal niveauwijzigingen aanwezig te zijn.

Voor de modellering van de aangetroffen beslissingssituatie werd een aanpak middels doelprogrammering geschikt geacht. Met een doelprogrammeringsmodel kan een oplossing worden verkregen waarin simultaan aan aspiratieniveaus m.b.t. servicegraad, continuïteit, statische alsmede dynamische stabiliteit wordt voldaan.

4. SIMULATIESTUDIE

Er is een simulatiestudie uitgevoerd waarin het genoemde doelprogrammeringsmodel (zonder de additionele vergelijkingen voor dynamische stabiliteit) in een rollende planningprocedure werd beproefd. Een tijdvak van twee jaren werd nagespeeld door 24 maal achter elkaar de oplossing van het model te bepalen en het produktieplan steeds exact voor de eerste drie subperiodes te laten uitvoeren. De storingsbron in dit experiment is dus uitsluitend gelegen in de onvolkomenheid van de voorspellingen van de afzet: de voorspellingen worden frekwent herzien en komen slechts zelden precies uit.

De resultaten van de simulatie zijn v.w.b. het aantal niveauwijzigingen over het tweejaars tijdvak vergeleken met het werkelijk aantal niveauwijzigingen en het aantal wijzigingen van de ex post optimale oplossing. Bij deze ex post optimale oplossing wordt een "perfect foresight" m.b.t. de voorspelde afzet en een exacte realisatie van het produktieplan verondersteld. Het simulatie-experiment met de rollende planning leverde een dynamische stabiliteit van 6 niveauwijzigingen per produktgroep per jaar op. De werkelijk gerealiseerde dynamische stabiliteit bleek 1,875 wijzigingen per jaar, De ex post optimale oplossing leverde eveneens een statische stabiliteit van 1,875 wijzigingen per jaar. De gemiddelde statische stabiliteit van de 24 plannen bleek ongeveer 2,125 wijzigingen per produktgroep per jaar. De oorzaak van het relatief grote aantal van 6 wijzigingen per produktgroep per jaar is te wijten aan de responsie van het model: "snel en gedempt". Hierdoor komen er relatief veel kleine wijzigingen voor. De planners in de bestudeerde onderneming hebben gesteld dat dit als zeer onwenselijk zou worden beschouwd.

5. INVOERING VAN DREMPELS

Het doelprogrammeringsmodel is naar aanleiding van de resultaten van de simulatie uitgebreid met enkele vergelijkingen waardoor een meer afwachtende modelresponsie werd verkregen. Voor een complete formulering van het model wordt verwezen naar Takkenberg (1983). Hier worden alleen de voor de dynamische stabiliteit relevante vergelijkingen gepresenteerd. Er kan worden verwacht dat het verbieden van kleine wijzigingen van het produktieniveau zou kunnen leiden tot een responsie die kan worden gekenschetst als "laat en abrupt". Bij afweging van de boetes in het model zal het model echter zo laat of vroeg reageren dat de gewenste servicegraad niet in gevaar komt.

Een doelprogrammeringsmodel omvat de specificatie van de navolgende categorieën vergelijkingen:

-een beschrijving van het concrete systeem in de vorm van differentievergelijkingen alsmede de technische beperkingen. In het beschreven geval worden de stromen en voorraden m.b.t. goederen, personeel en produktiebanden gespecificeerd;

-doelstellingsvergelijkingen waarin eisen of wensen m.b.t. bepaalde doelstellingen tot uiting komen;

-een doelstellingsfunctie waarmee het beste alternatief kan worden opgespoord.

Wat de beschrijving van het concrete systeem betreft beperken wij ons hier tot de vergelijkingen m.b.t. de produktiebanden.

(1)

$$\text{BANDEN}[I,T-1] + \text{UITBR}[I,T] - \text{INKR}[I,T] = \text{BANDEN}[I,T]$$

Hierin is I de index voor de produktgroepen en T de index voor de subperioden. In de geschetste situatie loopt I van 1 tot en met 4 en loopt T van 1 tot en met 24.

In de doelstellingsfunctie worden de uitbreidingen UITBR en inkrimpingen INKR op een zodanige wijze beboet dat -gegeven de boetes op voorraad houden en de onderschrijding van voorraadnormen- een bevredigende statische stabiliteit wordt bereikt. Het aspiratieniveau blijkt hierbij te liggen op ongeveer twee wijzigingen per produktgroep per jaar. Aanvankelijk werd met het model tot dusver beschreven gewerkt en werd de reeds genoemde matige dynamische stabiliteit van 6 wijzigingen per produktgroep per jaar verkregen.

Voor de verbetering van de stabiliteit hebben wij drie groepen vergelijkingen aan het model toegevoegd.

De eerste groep heeft betrekking op een beperking van het aantal toegestane wijzigingen over een toekomstig tijdvak en betreft dus alleen de statische stabiliteit. Over dit tijdvak mag slechts maximaal één uitbreiding of één inkrimping voorkomen. Deze vergelijkingen kunnen als "special ordered sets" worden opgegeven en kunnen daardoor in het gebruikte "branch and bound" algoritme efficiënt worden behandeld.

(2)

$$\text{SIGMA}(T, \text{PLANMAAND} + \text{FROZEN} + 1 \dots \text{PLANMAAND} + \text{TIJDVAK} : \\ \text{UITBR}[I,T] + \text{INKR}[I,T]) \text{ SOS1}$$

Hierin is PLANMAAND het nummer van de betreffende planmaand en is FROZEN het aantal subperioden waarover het plan niet kan worden gewijzigd. De tweede en derde groep vergelijkingen (relaties (3) en (4)) zorgen er samen met de eerste voor dat over een bepaald toekomstig tijdvak TIJDVAK geen enkele wijziging mogelijk is of als er toch gewijzigd moet worden een op te geven drempel DREMPEL wordt overschreden. Hierdoor kan de dynamische stabiliteit worden beïnvloed.

(3)

```
SIGMA(T, PLANMAAND + FROZEN + 1 .. PLANMAAND + TIJDVAK:
  UITBR[I,T] + INKR[I,T]) <= (1-BIN[I])
```

(4)

```
SIGMA(T, PLANMAAND + FROZEN + 1 .. PLANMAAND = TIJDVAK:
  UITBR[I,T] + INKR[I,T] = DREMPEL[I] * (1-BIN[I])
```

Door BIN[I] wordt een binaire variabele aangegeven die gekoppeld is met de produktgroep I.

6. VERDER ONDERZOEK

In Takkenberg (1983) wordt het ontwerp en implementatie van een decision support system centraal gesteld. Het constateren van de doelstelling van dynamische stabiliteit en de gekozen oplossing om aan deze wens tegemoet te komen is een bijproduct van deze studie. Daarom is indertijd een voortzetting van experimenten met drempels niet ter hand genomen.

Uit een literatuurstudie is ons gebleken dat dynamische stabiliteit zoals hiervoor gedefinieerd in de theorie over planning niet is uitgewerkt. Er kan wellicht een relatie worden gelegd met het begrip "robuustheid" zoals gedefinieerd door Rosenhead c.s. (1973). Ook het werk van Theil (1964) over het gebruik van lineaire decisieregels bij herziening van plannen geeft aanknopingspunten en het werk van Buitenhuis (1964) en van Hees en Monhemius (1970) hoofdstuk 29 heeft enige verwantschap. Daarnaast lijkt een aansluiting met de speltheorie mogelijk. In de nabije toekomst zullen door een onderzoeksteam van de RUG experimenten worden uitgevoerd waarin de invloed van systeemparemeters zoals de hoogte van drempels en de lengte van het bevroren tijdvak en het tijdvak TIJDVAK op de dynamische stabiliteit en de doelstellingsfunctie zullen worden vastgesteld.

LITERATUUR

Boskma, K. (1979), Modellen voor middellange termijn planning van produktie en afzet, Dissertatie RUG.

Buitenhuis, C. (1964), Het FIP-planningsysteem, Interne Philips-publicatie.

Hees, R.N. van, Monhemius, W. (1970), Produktiebesturing en voorraadbeheer, Theoretische achtergronden, Kluwer/NIVE.

Rosenhead, j., Elton, M., Gupta, S.K. (1972), Robustness and optimality as criteria for strategic decisions, Operational Research Quaterly Vol 23 Nr. 3.

Theil, H. (1964), Optimal Decision Rules for Government and Industry, Amsterdam.

Takkenberg, C.A.Th. (1983), Planning en methode van Onderzoek, Dissertatie RUG.

How a claim by Wagner Proves to be False

J.R. de Wit*

Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam

1. Model and Algorithms

The well-known continuous review s,Q inventory model [2,3] will give, under quite general conditions the following expression for the expected average cost per unit of time for $s \geq 0$ and $Q > 0$:

$$C(s,Q) = \frac{h}{\lambda Q} \{ \alpha \mu_L - s + sF(s) - \mu_L(s) \} + \frac{h}{2}Q + hs + \left(\frac{c}{L} - h\right) \mu_L$$

where

$$F(s) = \int_0^s d\Phi(x) ; \mu_L(s) = \int_0^s x d\Phi(x) ; \mu_L = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu_L(s)$$

$$\lambda = \frac{2hL}{(hL+2M)\mu_L} \text{ and } \alpha = 1 + \frac{\lambda k}{hL}$$

Hadley and Whitin [1] show how to prove convexity in both s and Q in case $\Phi(x)$ is a continuous p.d.f. which is positive over its entire range. They also demonstrate a solution algorithm. For the discrete case an analogous algorithm is given by Wagner [2].

The continuous algorithm is

- (1) Choose $Q = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} (\alpha-1) \mu_L$
- (2) Determine s by $Q = \frac{1}{\lambda} [1-F(s)]$.

If this s is sufficiently close to the previous one, stop.

Else go to (3)

- (3) Determine Q by $Q = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \{ \alpha \mu_L - s + sF(s) - \mu_L(s) \}$ and return to (2)

*Discussiant: Prof. H.C. Tijms

Wagners discrete algorithm only differs from this one by step (2)

(2'') Determine s as the smallest integer satisfying

$$\frac{1}{\lambda} [1-F(s)] \leq Q \leq \frac{1}{\lambda} [1-F(s-1)].$$

If this s is equal to the previous one, stop.

Else go to (3).

Both algorithms are developed using first order information. As can be proved the discrete cost function need not be convex, so the algorithm may yield locally instead of globally optimal points. Wagner acknowledges this when he writes in [2]

'Once again, because no assumptions have been made about the form of the distribution other than that it is a discrete distribution, the terminating value for s may not to be globally optimal; at most, a neighbouring value of s and the associated optimal Q may have lower expected cost.'

Our calculations revealed that Wagner's claim does not hold. Various examples can be constructed in which the optimal solution is far from neighbouring with respect to s .

This is due to the fact that in the discrete case the probability of multiple intersection of the curves implied by the algorithms is by no means negligible, whereas in the continuous case there can only be a unique intersection.

Bearing this in mind we ask if it is possible to indicate in advance whether Wagner will work or whether it won't?

It seems, to our knowledge, not to be so.

If Wagner is to work we must have just a single intersection. To ensure that, assuming s^* is the unknown optimum, it should hold

$$\begin{aligned} Q(s) &< \frac{1}{\lambda} \{1-F(s)\} \quad \text{for all } s < s^* \\ \text{and} \quad Q(s) &> \frac{1}{\lambda} \{1-F(s-1)\} \quad \text{for all } s > s^* \end{aligned}$$

which should of course be checked for all possible candidates of s^* .
This is a very tedious test and therefore better left undone!

We have not been able to devise an algorithm that copes with the problem directly.

We can, however, indicate a fool-proof solution method.

An optimal solution can be found by systematically applying Wagner's algorithm to different starting points until the complete range of s is scanned. After that it is easy to select the minimizing values of s and Q .

References

- [1] Hadley, G. and T.M. Whitin, 'Analysis of inventory systems', Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1963.
- [2] Wagner, H.M. 'Principles of Operations Research', Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [3] Wit, J.R. de, 'Inventory problems with slow moving items: a Bayesian approach', The Statistician, vol. 32, 1983.

The elimination of convexly dominated cutting patterns in trimloss problems

G. van der Hoek, H.W. van den Meerendonk and R.Th. Wijnga

Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam

Discussiant: C.A.Th. Takkenberg

1 Introduction

We consider a cardboard factory which has to produce a demand of a number n_i , $i = 1, \dots, m$ of rectangular pieces of length l_i and width w_i . The pieces are to be cut from an available roll of width W . Because generally, algorithms for integer programming will be too costly to determine optimal cutting patterns for cutting stock problems the integrality requirement of the demand is dropped. The loss thus allowed is assumed to be a neglectable fraction of the total amount ordered. Order i now requires a length of $b_i = n_i l_i$, which is obtained by circular cutters that cut slits in the length of the strip. The resulting strips are subsequently cut into rectangular pieces by cutting hatchets.

The aim of the factory is to minimize costs in the production of the pieces ordered. In order to formulate this corrugator trim problem as a linear programming problem, we introduce the notion of cutting patterns. Cutting pattern $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ is an activity which produces a_{ij} pieces of order i , $i = 1, \dots, m$ (see fig. 1). The cutting pattern a_j is produced at the cost c_j per unit of length and with a total length of x_j . Note that if the trimloss is considered to be valueless, we have $c_j = W$ for all j . Some possible cutting combinations are shown in fig. 1.

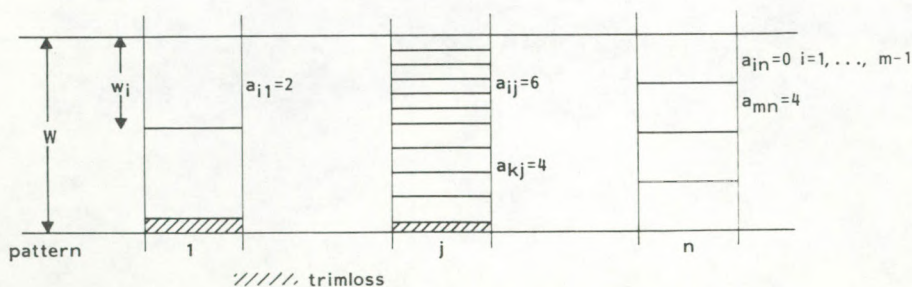


Fig. 1 Examples of cutting combinations

Now the problem can be formulated as the well known cutting stock problem (A):

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$(A) \text{ subject to } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

One of the main problems in actually using the problem formulation (A) is that the number of feasible cutting patterns increases very rapidly with the number of different orders. In Gilmore and Gomory [1961] the authors propose to change the way of selecting the incoming activity in the simplex algorithm in order to reduce computational costs. In stead of selecting the entering activity they propose to generate an improving incoming vector as the solution of an auxiliary knapsack problem.

Another approach is studied in this paper. We shall concentrate on elimination rules which reduce the number of candidate incoming vectors at each pivot step. Cutting patterns which will not occur in the optimal solution with certainty are deleted from the problem formulation.

In the paper we discuss a basic theorem due to Van den Meerendonk c.s. [1963] which gives necessary and sufficient conditions for cutting patterns to be 'convexly dominated'. These conditions involve both the production (there exists a convex combination of activities producing at least the dominated activity) and the costs (this dominating combination produces at most at equal costs). The discussion of an extended version of the basic theorem and a critical evaluation of the formulation of the conditions on production and costs conclude this section on the basic theory of convex dominance.

The remaining sections of the paper are devoted to the incorporation of several practical aspects such as: capacity and occupation rate constraints, parallel machines, refund options for trimloss, penalization of over- and underproduction. A comparison with the Gilmore-Gomory column generation approach is made and computational results are presented.

2 The theory of convex dominance

2.1 The basic theorem

In this section we discuss a theorem by Van den Meerendonk c.s. [1963] which states for the single-machine case that some cutting patterns may be 'convexly dominated' and can consequently be deleted from the problem formulation (A) without changing the optimal objective value. Deletion of one cutting combination, say the n -th, from (A) yields the related LP problem (B):

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j \quad (2.1)$$

$$(B) \quad \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

Let V_A and V_B be the optimal objective function values of (A) and (B) respectively. Then the Basic Theorem of convex dominance reads:

THEOREM 1 (Van den Meerendonk c.s., 1963)

$V_A = V_B$ for any vector $b' = (b_1, \dots, b_m)$

if and only if there exist scalars λ_j , $j = 1, \dots, n-1$ such that

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \lambda_j \geq a_{in} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j \lambda_j \leq c_n \quad (2.6)$$

The relations (2.4) and (2.6) will be referred to as production conditions and cost condition respectively. The theorem states, in other words, that activities in (A) corresponding with dual redundant

constraints will not occur in the optimal solution. Hence they can be omitted from (A).

If (2.4) - (2.6) are met the n -th pattern is said to be convexly dominated by $a_1, \dots, a_{n-1}$. The removal of convexly dominated activities clearly reduces the number of candidate incoming vectors in each step of the simplex procedure. One obvious result of this theorem is that in the case of equal costs only those cutting patterns need be considered in which no extra piece of whichever order can be cut.

Note furthermore that the 'only if' - part of the basic theorem implies that convex dominance is the strongest possible form of problem reduction by prior elimination which does not use the specific values of the demand vector b .

The following example gives a geometrical illustration in the simple situation in which at most two different orders can be cut at a time. This is a quite common technical constraint. Application of the criteria (2.4) - (2.6) and assuming $c_i = W$ for all i , implies that combinations P_2 , P_3 and P_4 in the figure are convexly dominated.

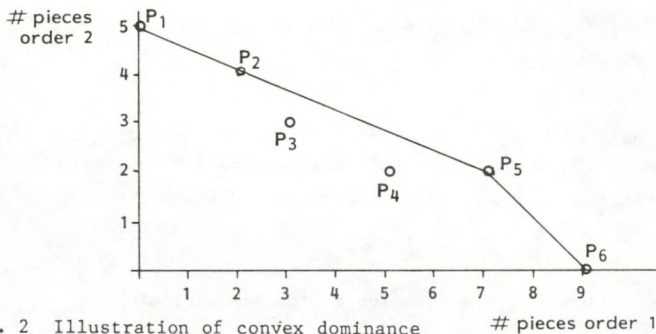


Fig. 2 Illustration of convex dominance

From this example the following reformulation of theorem 1 will be clear: an activity a_n can be removed from (A) if and only if it lies in the closed convex hull of the set of all feasible activities and satisfies the cost condition. To implement the theorem in practice, an algorithm is presented in Van den Meerendonk c.s. [1963] which generates for each pair of orders k, l all not convexly dominated cutting patterns.

2.2 The basic theorem revisited and extended

The basic theorem can be extended by the following cases:

1. When there are two or more machines with different cost coefficients available or when there is a refund possibility the theorem is also applicable by adjusting the coefficients .
2. In case overproduction is allowed (which is considered as scrap) then the slack variables can be removed, provided other activities are introduced. This case can then be handled as the original one.
3. In case there are capacity or occupation rate restrictions the set of dominating and dominated vectors is not affected.
4. If there is a trimloss refund which is proportional with the trimloss width, then the set of dominating and dominated vectors does not change.
5. In case of conditional trimloss refund the extended algorithms can be used in certain circumstances.
6. If there is a quadratic penalty term penalizing the difference between the exact demand and overproduction or underproduction the original elimination algorithm can still be applied.

2.3 Elimination versus generation in the basisformulation

In the last part of the paper a comparison between the elimination approach and the generation method as proposed by Gilmore and Gomory is made. The paper is concluded by numerical examples.

References

- Gilmore, P.C. & R.E. Gomory, 'A linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem', Parts I, II, Operations Research 1961, 1963, 9, no. 6, 849-859 and 11, no. 6, 863-887.
- Van den Meerendonk, H.W., J.A.G.M. Kerbosch, P. Medema and J.H. Schouten, 'Some Computational Aspects of a Trimloss Problem', Statistica Neerlandica, 1963, 17, no. 1, 37-47.
- Van der Hoek, G., H.W. van den Meerendonk and R.Th. Wijmenga, 'The Elimination of Convexly Dominated Cutting Patterns in Trimloss Problems, 1983, Report 8333/0, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.