

David A. Kodde^{*}

Samenvatting

Economische analyses worden veelal gebaseerd op de eerste-orde voorwaarden van een maximeringsprobleem met nevenvoorwaarden. Hierbij wordt dan verondersteld dat aan de niet-negativiteits-restrictie van de variabelen wordt voldaan. Door de analyses te baseren op de Kuhn-Tucker-voorwaarden voor een maximum wordt aangetoond dat er geen invloed is van kleine veranderingen in exogene variabelen op de niet-positieve variabelen en op de niet-effectieve restricties. Voor de positieve variabelen geldt dat de normale comparatieve statica kan worden toegepast door de analyses te beperken tot de positieve variabelen en de effectieve restricties. Het artikel wordt besloten met een tweetal toepassingen. In het eerste voorbeeld laten we zien dat de theoretische restricties op systemen van vraagvergelijkingen ook correct zijn als er niets van sommige goederen wordt gekocht. Het laatste voorbeeld heeft betrekking op gerestricteerde vraagfuncties en laat zien dat de invloed van een verandering in het gerestricteerde goed samengesteld is uit een inkomens- en een gewogen substitutie-effect.

1 Inleiding

Een belangrijk deel van de economische analyse houdt zich bezig met de relaties tussen exogene en endogene variabelen. Met name is men geïnteresseerd in de verandering van een endogene variabele als gevolg van een verandering in een exogene variabele of instrument variabele.

In de economische wetenschap ontstaan de relaties tussen endogene en exogene variabelen veelal op grond van een maximeringsprobleem met nevenvoorwaarden, bijvoorbeeld nutsmaximalisatie. Dit maximeringsprobleem geeft een aantal optimaliteitsvoorwaarden waaraan de oplossing van de endogene variabelen moet voldoen. In de comparatieve statica wordt be-

* Economisch Instituut, Katholieke Universiteit Nijmegen, tel (080) 515890, Thomas van Aquinostraat 6, 6525 EM NIJMEGEN.
De auteur dankt de redactie en twee anonieme beoordelaars voor hun opmerkingen op een eerdere versie van dit artikel.

studeerd hoe deze optimale oplossing zal veranderen bij zeer kleine veranderingen in de exogene variabelen zodanig dat de optimaliteitsvoorwaarden geldig blijven. Het maximeringsprobleem behoeft niet noodzakelijk lineair te zijn in de doelstellingsfunctie en/of de restricties. Daarnaast is het in de economische wetenschap veelal noodzakelijk dat de variabelen niet negatief zijn. De oplossing van een dergelijk algemeen maximeringsprobleem moet voldoen aan de Kuhn-Tucker-voorwaarden. Deze voorwaarden zijn een generalisatie van de eerste orde-voorwaarden behorend bij problemen waar de restricties geformuleerd zijn als gelijkheden en de variabelen niet noodzakelijk positief moeten zijn. De traditionele comparatieve statica is bij haar analyse van deze eerste orde-voorwaarden uitgegaan, waarbij ze aannam dat alle variabelen positief zouden zijn. We zullen in paragraaf 2 aangeven hoe comparatieve statica-resultaten verkregen kunnen worden door de analyse te starten met de Kuhn-Tucker-voorwaarden. We laten zien dat de traditionele comparatieve statica-resultaten van toepassing blijven als de analyse wordt beperkt tot de effectieve restricties en de positieve variabelen. Hier laten we eveneens zien dat de duale variabelen of Lagrange multipliers, welke een onderdeel vormen van de Kuhn-Tucker-voorwaarden, altijd geïnterpreteerd kunnen worden als de marginale verandering in de doelstellingsfunctie als gevolg van een zeer kleine verruiming van de bijbehorende restricties.

In de derde paragraaf geven we door een tweetal voorbeelden op het gebied van consumentengedrag de mogelijkheden van comparatieve statica met behulp van de Kuhn-Tucker voorwaarden aan. Het eerste voorbeeld heeft betrekking op Marshalliaanse vraagfuncties, waarbij we enerzijds de mogelijkheid openlaten dat de budgetrestrictie niet bindend is en waarbij we anderzijds toestaan dat er van bepaalde goederen niets wordt gekocht. Het tweede voorbeeld heeft betrekking op conditionele vraagfuncties. We leiden af dat wijzigingen in de hoeveelheid van het geconditioneerde goed de gevraagde hoeveelheid van de andere goederen beïnvloedt door de combinatie van een inkomenseffect en een gewogen som van substitutie-effecten.

2 Comparatieve Statica

Een belangrijk deel van de economische analyse heeft betrekking op het onderzoek van de relaties die tussen exogene en endogene variabelen bestaan. Op micro-economisch terrein gaat men onder andere na hoe het consumentengedrag wordt beïnvloed door veranderingen in prijzen van con-

sumptiegoederen en inkomen of hoe voor een winstmaximerende producent de vraag naar factor-inputs samenhangt met de hoogte van de bijbehorende factorprijzen. De relaties tussen de exogene en de endogene variabelen zijn veelal een direct gevolg van een veronderstelling ten aanzien van het gedrag van een economische eenheid, bijvoorbeeld nutsmaximalisatie of winstmaximalisatie. Dit gedrag is dan te vertalen als de oplossing van een maximerings- of minimeringsprobleem met een aantal nevenvoorwaarden. Het optimaliseringsprobleem levert een aantal optimaliteitsvoorwaarden waaraan de oplossing moet voldoen. Deze optimaliteitsvoorwaarden vormen de basis van de comparatieve statica. Zij worden gebruikt om na te gaan hoe de endogene variabelen bij kleine veranderingen van de exogene variabelen moeten veranderen zodanig dat de optimaliteitsvoorwaarden geldig blijven. We zullen voor het algemene niet lineaire optimaliseringsprobleem met ongelijkheidsvoorwaarden en niet negativiteitsrestricties op de variabelen aangeven hoe comparatieve statica kan worden uitgevoerd.

Zonder beperking der algemeenheid kunnen we uitgaan van een maximeringsprobleem met kleiner gelijkheidsvoorwaarden. Het probleem luidt:

$$\begin{array}{ll} \text{maximaliseer:} & f(x, \beta) \\ \text{onder} & g(x, \beta) \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

waarbij de m restricties $g(x, \beta)$ opgevat moeten worden als een kolom vectorfunctie en de vector endogenen x en vector exogenen β respectievelijk een kolomvector met n en k elementen weergeven. Met $x \geq 0$ bedoelen we dat voor ieder element van de vector moet gelden $x_i \geq 0$. We gebruiken $x > 0$ als voor ieder element $x_i > 0$ en $x = 0$ als voor ieder element $x_i = 0$.

Door de introductie van m Lagrange multipliers, λ , kan het maximeringsprobleem vertaald worden naar:

$$\begin{array}{ll} \text{maximaliseer:} & Z = f(x, \beta) - \lambda' g(x, \beta) \\ \text{onder} & x \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \quad (2)$$

Het optimum voor dit probleem, indien het bestaat, moet voldoen aan de Kuhn-Tucker-voorwaarden. Deze voorwaarden zijn afgeleid in Kuhn-Tucker (1951) en worden onder andere beschreven en besproken in Lancaster (1968) en Chiang (1974). Het maximum van probleem (2), dat equivalent is met het maximum uit (1), moet voldoen aan:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x, \beta)}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0$$

en $x_j \frac{\partial Z}{\partial x_j} = 0$ voor $j = 1 \dots n$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = -g_j(x, \beta) \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0$$

$$\text{en } \lambda_j \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{voor } j = 1 \dots m.$$

Om de notatie te vereenvoudigen nemen we de argumenten van de functies niet op in de formules en comprimeren we de schrijfwijze door over te gaan op matrixnotatie.

Partiële afgeleiden van een functie f naar een vector x geven we aan met $D_x f$, hetgeen als resultaat een kolomvector oplevert. $D_x g$ is een matrix van orde $m \times n$, waarbij op plaats i, j de afgeleide van restrictie i naar x_j staat. Tweede orde afgeleiden geven we aan met $D_{xx'} f$. Verder gebruiken we $\dot{x}$ om een vierkante matrix weer te geven met op de diagonaal de elementen van de kolomvector x .

De Kuhn-Tucker voorwaarden kunnen dan worden gecomprimeerd tot

$$D_x Z = D_x f - D_x g' \lambda \leq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{en} \quad \dot{x} D_x Z = 0$$

$$D_\lambda Z = -g \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \quad \text{en} \quad \dot{\lambda} D_\lambda Z = 0. \quad (3)$$

We gaan aan de hand van bovenstaande voorwaarden na hoe de endogene variabelen x samenhangen met de exogene variabelen β . De exogene variabelen mogen zowel deel uitmaken van de doelstellingsfunctie als van de restricties.

We leiden de comparatieve statica-resultaten af door de $n+m$ impliciete functies in de Kuhn-Tucker-voorwaarden uit (3) totaal te differentiëren. Dit levert:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} D_{xx'} Z + D_x Z & \dot{x} D_{x\lambda'} Z \\ \dot{\lambda} D_{\lambda x'} Z & \dot{\lambda} D_{\lambda\lambda'} Z + D_\lambda Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{x} D_{x\beta'} Z \\ -\dot{\lambda} D_{\lambda\beta'} Z \end{pmatrix} d\beta. \quad (4)$$

Comparatieve statica-resultaten kunnen worden bepaald indien de matrix aan de linkerkant van (4) niet singulier is. Na verbijzondering van de structuur in (4) door gebruikmaking van de ongelijkheidsvoorwaarden in (3) zullen we laten zien dat de inverteerbaarheidseis, naast het bestaan van de tweede-orde afgeleiden, een extra conditie op de Kuhn-Tucker-voorwaarden impliceert.

Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat er $n_1 \leq n$ endogene variabelen zijn waarvoor geldt dat $x_i > 0$. Laat deze n_1 variabelen x_1 vormen en partitioneer $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ met $x_2 = 0$. Op analoge wijze verdelen we de $m_1 \leq m$ positieve variabelen van λ toe aan $\lambda_1 > 0$ en $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ met $\lambda_2 = 0$, daarnaast partitioneren we de bij λ_1 en λ_2 behorende restricties respectievelijk in g_1 en g_2 . We kunnen nu onze stelling bewijzen.

Deze stelling betreft een verruiming van de mogelijkheden om economische analyses uit te voeren met behulp van comparatieve statica en staat als zodanig gedeeltelijk tegenover de door Deaton en Muellbauer (1980, p. 36) gesuggereerde beperktheid van de traditionele nutsmaximalisatie benadering.

Stelling

Als voor de optimale oplossing van het maximeringsprobleem uit (1), welke voldoet aan de Kuhn-Tucker voorwaarden in (3), zowel geldt dat:

- a. de eerste afgeleiden van de "Lagrangean" ongelijk zijn aan nul voor endogene variabelen met waarde nul, d.w.z. als $x_j = 0$ dan $\partial Z / \partial x_j < 0$, en tevens,
- b. de restricties niet effectief zijn indien de bijbehorende Lagrange multiplier gelijk is aan nul, d.w.z. als $\lambda_j = 0$ dan $\partial Z / \partial \lambda_j = -g_j(x, \beta) > 0$,

dan geldt:

- c. dat de partiële afgeleiden van de endogene variabelen met waarde nul naar de exogene variabelen en de partiële afgeleiden van de Lagrange multipliers met waarde nul naar de exogene variabelen beide gelijk zijn aan nul.
- d. dat de normale comparatieve statica-resultaten kunnen worden verkregen door alleen de effectieve restricties en de positieve endogene variabelen te beschouwen.

Bewijs

Rekening houdend met de partitionering van x en λ in variabelen met een positieve waarde, x_1 en λ_1 , en variabelen met waarde nul, x_2 en λ_2 , levert in combinatie met de Kuhn-Tucker-voorwaarden in (3), nl.: $D_{x_1} Z = 0$ voor $x_1 > 0$, $D_{x_2} Z \leq 0$ voor $x_2 = 0$, $g_1 = 0$ voor $\lambda_1 > 0$ en $g_2 \leq 0$ voor $\lambda_2 = 0$, dat de totale differentiaal in (4) herschreven kan worden als

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^D & Z & \dot{x}_1^D & Z & -\dot{x}_1^D x_1' g_1' & -\dot{x}_1^D x_1' g_2' \\ x_1 x_1' & & x_1 x_2' & & & \\ 0 & & D_{x_2} Z & & 0 & 0 \\ -\dot{\lambda}_1^D x_1' g_1' & & -\dot{\lambda}_1^D x_2' g_1' & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & g_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_1^D x_1 \beta', Z \\ 0 \\ \dot{\lambda}_1^D \beta', g_1 \\ 0 \end{bmatrix} d\beta. \quad (5)$$

De voorwaarde a) en b) uit de stelling impliceren dat $D_{x_2} Z < 0$ voor $x_2 = 0$ en $g_2 < 0$ voor $\lambda_2 = 0$, zodat op grond van de tweede en vierde rij van de totale differentiaal in (5) automatisch volgt dat $dx_2 = 0$ en $d\lambda_2 = 0$. Op grond van de impliciete functiestelling, zie Rudin (1976), wordt hierdoor onderdeel c) van onze stelling bewezen.

Na het verwerken van $\dot{x}_1$ en $\dot{\lambda}_1$ en gebruikmakend van $dx_2 = 0$ en $d\lambda_2 = 0$ reduceert het stelstel tot:

$$\begin{bmatrix} D_{x_1} Z & -D_{x_1} g_1' \\ x_1 x_1' & \\ -D_{x_1} g_1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ d\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{x_1} \beta', Z \\ D_{\beta} g_1' \end{bmatrix} d\beta \quad (6)$$

en deze vergelijking is precies de totale differentiaal van de eerste orde voorwaarden met $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ en g_2 redundant. Dit bewijst onderdeel d) van de stelling.

We merken op dat de voorwaarden genoemd in de stelling ook nodig zijn, omdat anders $D_{\beta} x = \frac{\partial x}{\partial \beta}$, en $D_{\beta} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}$, niet bepaald kunnen worden, daar niet aan de voorwaarde van de impliciete functiestelling wordt voldaan.

Comparatieve statica-resultaten kunnen worden verkregen door middel van invertering van de matrix in (6) of door uitwerking van de regel van Cramer. Bij deze regel kan gebruik worden gemaakt van voorwaarden op de diverse principale minoren van de gerande hessiaan in vergelijking (6). Dit zijn voldoende voorwaarden voor een maximum van een functie onder restricties, welke onder andere worden beschreven in Lancaster (1968). Anderzijds kunnen de gewenste effecten ook worden bepaald door de ge-partitioneerde matrix in (6) te invertieren. Totaal resulteert dit dan in:

$$\begin{bmatrix} D_{x_1 x_1} \\ \beta' \\ D_{\beta' g_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1} B (B' A^{-1} B)^{-1} B' A^{-1} & A^{-1} B (B' A^{-1} B)^{-1} \\ (B' A^{-1} B)^{-1} B' A^{-1} & -(B' A^{-1} B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_{x_1 \beta'} Z \\ D_{\beta' g_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

waarbij $A = D_{x_1 x_1}$, Z en $B = -D_{x_1 \beta'}$. De matrix $-B$ kan, in navolging van Edfelsen (1981, p. 1503), opgevat worden als een compacte schrijfwijze voor de schaduwprizen in het optimum. Zij geeft namelijk aan hoe een verandering in x_1 leidt tot een verandering in de effectiviteit van de restricties. Omdat de schaduwprizen, in deze context, functioneel gerelateerd kunnen zijn aan de waarde van de endogene variabelen hebben ze slechts een lokale betekenis. Edfelsen (1981) geeft een interpretatie van de schaduwprizen bij één niet lineaire restrictie. Verder geldt dat de schaduwprijs gewogen som van partiële afgeleiden van de endogene variabelen met betrekking tot de exogene variabelen geschreven kan worden als:

$$-B' D_{\beta' x_1} = \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_{x_1 \beta'} Z \\ D_{\beta' g_1} \end{bmatrix} = -D_{\beta' g_1} \quad (8)$$

Toespitst op de traditionele theorie van het consumentengedrag levert deze vergelijking direct dat de prijsgewogen som van substitutie-effecten gelijk is aan 0 en laat eveneens direct de Engel- en Cournotaggregatie zien. Deze relaties gelden algemeen omdat de schaduwprizen deel uitmaken van de matrix in (6). Deze problematiek zal in het eerste voorbeeld van paragraaf drie nader aan de orde worden gesteld.

Verdere eigenschappen van systemen van vraagvergelijkingen, zoals symmetrie en negativiteit, zijn het directe gevolg van de symmetrie van de matrix in (6) en tweede orde voorwaarden van het maximeringsprobleem onder nevenvoorwaarden.

In lineaire programmering of in mathematische programmering onder gelijkheidsvoorwaarden worden de variabelen λ geïnterpreteerd als de marginale verandering in de doelstellingsfunctie ten gevolge van een infinitesimal kleine verruiming van de restrictie. In het resterende deel van deze paragraaf zullen we laten zien dat deze interpretatie ook correct is voor het algemene niet lineaire optimeringsprobleem. Dit geldt zelfs als bepaalde endogene variabelen de waarde 0 aannemen. Hiermee geven we aan dat Lancaster (1968, p.71) een fout maakt door aan te nemen dat marginale waarde van een kleine verruiming van de restrictie mogelijk kleiner is dan de waarde van de bijbehorende duale variabele.

Laat de restricties geschreven worden $g(x, b) = h(x) - b \leq 0$, waarbij b een vector is die in eerste instantie gelijk was aan 0. We bepalen de invloed van kleine veranderingen in b op de doelstellingsfunctie. De gevraagde grootte wordt gegeven door

$$D_{b'} f = D_{x'} f D_{b'} x, \quad (9)$$

waarbij $D_{b'} x$ voor $D_{b'} x_1$ gegeven wordt in formule (7) en $D_{b'} x_2 = 0$ op grond van (5). Als we verder gebruiken dat $D_{x_1'} f = \lambda_1'$ $D_{x_1'} g_1$ voor alle

positieve endogene variabelen, dan valt (9) te herschrijven tot:

$$D_{b'} f = \lambda_1' D_{x_1'} g_1 D_{b'} x_1 + D_{x_2'} f D_{b'} x_2 = \lambda_1' D_{x_1'} g_1 D_{b'} x_1,$$

hetgeen analoog aan (8) en op grond van (7) met gebruikmaking van

$D_{b'} g_1 = \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix}$ geschreven kan worden als:

$$D_{b'} f = \lambda_1' \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_{x_1'} b' & Z \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1' & \lambda_2' \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dit toont aan dat de duale variabelen, λ , opgevat kunnen worden als de marginale verandering in de doelstellingsfunctie ten gevolge van een kleine verandering in de grens van de restrictie.

3 Toepassingen

In deze paragraaf bespreken we een tweetal voorbeelden van de in de vorige paragraaf geschetste methoden. Omdat comparatieve statica op zeer veel terreinen van de economie toegepast kan worden, kunnen de voorbeelden alleen dienen ter illustratie van de rijkdom aan toepassingsmogelijkheden. Het eerste voorbeeld heeft betrekking op de traditionele consumentenproblematiek van nutsmaximalisatie. We zullen laten zien dat de theoretische restricties op het systeem van Marshalliaanse vraagfuncties ook van toepassing zijn indien niet van alle goederen iets wordt gekocht. Daarnaast laten we in dit voorbeeld zien dat een niet effectieve budgetrestrictie tot gevolg heeft dat de consumptie niet zal veranderen bij kleine wijzigingen in prijzen en beschikbaar

inkomen. Het tweede voorbeeld heeft betrekking op conditionele vraagfuncties. We leiden af dat wijzigingen in de hoeveelheid van het geconditioneerde goed de gevraagde hoeveelheid van de andere goederen beïnvloedt door de combinatie van een inkomenseffect en een gewogen som van substitutie-effecten.

3.1. Nutsmaximalisatie

Het probleem van nutsmaximalisatie wordt gegeven door

$$\begin{array}{ll} \max & U(q) \\ \text{onder} & p'q - m \leq 0 \\ & \text{en } q \geq 0, \end{array}$$

waarbij hoeveelheden, prijzen en beschikbaar inkomen respectievelijk gegeven worden door q , p en m . De hoeveelheden zijn endogeen. Prijzen en inkomen zijn exogeen. Voor dit probleem moet de optimale oplossing voldien aan het volgende stelsel Kuhn-Tucker voorwaarden:

$$\begin{array}{llll} D_q U - \lambda p \leq 0 & , & q \geq 0 & \text{en} & \dot{q}(D_q U - \lambda p) = 0, \\ -p'q + m \geq 0 & , & \lambda \geq 0 & \text{en} & \lambda(p'q - m) = 0. \end{array} \quad (11)$$

Neem in eerste instantie aan dat de budget-restrictie niet effectief is, d.w.z. $\lambda = 0$. Deze aanname impliceert dat de behoeften in principe bevredigbaar zijn binnen het toegestane gebied van de budget-restrictie.

Als gevolg hiervan reduceren de Kuhn-Tucker voorwaarden tot $D_q U \leq 0$, $q \geq 0$ en $\dot{q}D_q U = 0$. Vanwege de afwezigheid van prijzen en inkomen in $\dot{q}D_q U = 0$, zullen de gevraagde hoeveelheden niet veranderen bij kleine prijs- en inkomensveranderingen.

Neem vervolgens aan dat de budget-restrictie wel effectief is, d.w.z. $p'q = m$ en $\lambda > 0$, en laat q_1 en q_2 de partitie van goederen zijn waarvan in de optimale situatie respectievelijk iets en niets wordt gekocht. Gezamenlijk met de voorwaarden a) en b) uit de stelling worden de Kuhn-Tucker voorwaarden gekarakteriseerd door:

$$\begin{array}{llll} D_{q_1} U - \lambda p_1 = 0 & , & q_1 > 0 & \text{en} & \dot{q}_1(D_{q_1} U - \lambda p_1) = 0 \\ D_{q_2} U - \lambda p_2 < 0 & , & q_2 = 0 & \text{en} & \dot{q}_2(D_{q_2} U - \lambda p_2) = 0 \\ -p'q + m = 0 & , & \lambda = 0 & \text{en} & \lambda(-p'q + m) = 0. \end{array} \quad (12)$$

De nutsmaximerende goederencombinatie is afhankelijk van de prijzen en het beschikbaar inkomen, $q = q(p, m)$. Het stelsel $q(p, m)$ wordt het stelsel Marshalliaanse vraagvergelijkingen genoemd. Op grond van onze stelling en formule (7) kan afgeleid worden dat de partiële afgeleiden van de ge-

vraagde hoeveelheden en de Lagrange multiplier met betrekking tot prijzen en inkomen gegeven worden door:

$$\begin{bmatrix} D_{\beta, q} \\ D_{\beta, \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{p_1, q_1} & D_{p_2, q_1} & D_{m, q_1} \\ D_{p_1, q_2} & D_{p_2, q_2} & D_{m, q_2} \\ D_{p_1, \lambda} & D_{p_2, \lambda} & D_{m, \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda U_1^{-1} - \frac{\lambda U_1^{-1} p_1 p_1' U_1^{-1}}{p_1' U_1^{-1} p_1} - \frac{U_1^{-1} p_1 q_1'}{p_1' U_1^{-1} p_1} & 0 & \frac{U_1^{-1} p_1}{p_1' U_1^{-1} p_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda p_1' U_1^{-1}}{p_1' U_1^{-1} p_1} - \frac{q_1'}{p_1' U_1^{-1} p_1} & 0 & \frac{1}{p_1' U_1^{-1} p_1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

waarbij $\beta' = (p' : m)$ de vector exogene variabelen voorstelt en U_1 gelijk is aan $D_{q_1 q_1'}^U$. Vergelijking (13) is een transformatie van Barten's "Fundamental matrixequation", zie Barten (1964) of Theil (1980), waarbij rekening is gehouden met het feit dat van sommige goederen niets wordt gekocht. We zullen laten zien hoe (13) kan worden gebruikt om aan te tonen dat de theoretische restricties op systemen van vraagvergelijkingen ook van toepassing zijn als er niets van bepaalde goederen wordt gekocht. Deze restricties, adding-up, homogeniteit, symmetrie en negativiteit, worden onder andere besproken in Barten en Böhm (1981).

Adding-up volgt direct doordat $p' D_{\beta, q} = (-q' : 1)$, hetgeen de onder (8) beweerde Cournot- en Engelaggregatie oplevert. Op grond van Euler's theorema mogen we concluderen dat uit

$$\begin{bmatrix} D_{\beta, q} \\ D_{\beta, \lambda} \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \end{bmatrix},$$

volgt dat de Marshalliaanse vraagfuncties homogeen zijn van graad 0 in p en m , terwijl de Lagrange multiplier homogeen van graad -1 in p en m is. Symmetrie van de Slutsky-matrix, $\lambda U_1^{-1} - \lambda U_1^{-1} p_1 p_1' U_1^{-1} / (p_1' U_1^{-1} p_1)$, volgt direct uit de symmetrie van U_1 .

De negativiteit van de Slutsky-matrix kan niet op grond van (13) aan worden getoond, maar volgt uit de noodzakelijke tweede-orde voorwaarde voor een maximum, nl.: $(dq_1')' U_1(dq_1) \leq 0$, $dq_2 = 0$ en $p'(dq) = 0$.

3.2. Gerestricteerde vraagfuncties

In situaties waarin personen, bijvoorbeeld door externe omstandigheden, niet volledig vrij zijn om die goederencombinatie te kiezen die het meest wordt geprefereerd, zullen ze kiezen uit de overblijvende mogelijkheden. Restricties op de keuzevrijheid ontstaan onder andere als een bepaalde hoeveelheid van een zeker goed moet worden gekocht.

Wijzigingen in de gerestricteerde hoeveelheid zorgen dan voor een effect op de budgetrestrictie en voor een effect in de nutsfunctie. Men spreekt in deze context van gerestricteerde of conditionele vraagfuncties. Deze conditionele vraagfuncties worden behandeld in Pollak (1969). De invloed van wijzigingen in de hoeveelheid van het conditionerende goed wordt geanalyseerd door Tobin en Houthakker (1950-51), Latham (1980) die dualiteitstheorie gebruikt en Howard (1977) en Mackay en Whitney (1980) welke met behulp van determinant voorwaarden de effecten proberen na te gaan. We zullen laten zien dat de invloed van een verandering in de gerestricteerde hoeveelheid geschreven kan worden als de combinatie van een inkomens- en een gewogen substitutie-effect.

We gaan uit van nutsmaximalisatie met betrekking tot een vector goederen q waarbij daarnaast de verplichting bestaat om een hoeveelheid b van een ander goed te kopen. De prijs van dit goed bedraagt p_b . De prijzen van de goederen bedragen p en het budget bedraagt m . Het probleem is dan:

$$\begin{aligned} \max_q \quad & U(q, b) \\ \text{onder: } & p'q + p_b b - m \leq 0 \end{aligned}$$

Voor een interne oplossing kunnen de conditionele vraagfuncties afgeleid worden uit de volgende eerste orde voorwaarden:

$$\begin{aligned} D_q U - \lambda p &= 0 \\ -p'q - p_b b + m &= 0. \end{aligned}$$

We kunnen het inkomens- en substitutie-effect van een wijziging in b bepalen door de eerste orde voorwaarden totaal te differentiëren:

$$\begin{bmatrix} D_{qq} U & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I & D_{qb} U & 0 \\ q' & p_b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ db \\ dm \end{bmatrix}$$

Oplossen van dit stelsel levert de verandering in de gevraagde hoeveelheden als gevolg van een verandering in de hoeveelheid van het gerestricteerde goed

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial q}{\partial p'} \bigg|_u D_{qb} U - p_b \frac{\partial q}{\partial m} \quad (14)$$

Deze formule kan worden opgevat als een variant van de Slutsky-vergelijking. De tweede term in (14) is het inkomenseffect dat voor normale

goederen via het minteken een negatieve invloed op de gevraagde hoeveelheden heeft. De eerste term in (14) is een gewogen som van de eigen nutsgecompenseerde substitutie-effecten met de verandering in de marginale nutten door een verandering in b . De substitutieterm is gelijk aan 0 indien $D_{qb} U$ evenredig is met de prijsvector omdat $\left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_p = 0$. Het teken van het gewogen substitutie-effect is niet zonder extra vooronderstellingen te bepalen.

Ook voor gerestricteerde vraagfuncties is het mogelijk om, evenals in het eerste voorbeeld, de analyses uit te voeren zonder te veronderstellen dat de budgetrestrictie effectief is, of dat er van ieder goed iets wordt gekocht. Bij een niet effectieve budget-restrictie hebben de prijzen en het inkomen geen invloed op de optimale hoeveelheden. Dit kan in het algemeen niet van het gerationeerde goed worden gezegd. Op grond van onze stelling mogen we concluderen dat formule (14) ook van toepassing is als we ons beperken tot de goederen waar wel iets van wordt gekocht. De partiële afgeleide van de goederen waarvan niets wordt gekocht met betrekking tot het gerationeerde goed is dan gelijk aan nul.

Literatuur

- Barten, A.P., (1964), Consumer demand functions under conditions of almost additive preferences, *Econometrica*, p. 1-38.
- Barten, A.P., Böhm, V. (1981), Consumer theory, in Handbook of Mathematical Economics, eds. Arrow, H.J.; Intrilligator, M.D.; Amsterdam, North-Holland Publishing Company.
- Chiang, A.C. (1974), *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, New York, McGraw-Hill, second edition.
- Deaton, A.S.; Muellbauer, J. (1980), *Economics and Consumerbehavior*, Cambridge University Press.
- Edfelsen, L.E. (1981), The Comparative Statics of Hedonic Price Functions and Other Nonlinear Constraints, *Econometrica*, volume 49, p.1501-1520.
- Howard, D. (1977), Rationing, Quantity Constraints and Consumer theory, *Econometrica*, volume 45, p.399-412.
- Kuhn, H.W.; Tucker, A.W. (1951), Non Linear Programming. In ed. Neyman, J., Proceedings of the Second Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press.
- Lancaster, K. (1968), *Mathematical Economics*, Toronto, MacMillan.
- Latham, R. (1980), Quantity Constrained Demand Functions, *Econometrica*, volume 48, p.307-314.
- Mackay, R.J.; Whitney, G.A., (1980), The Comparative statics of Quantity Constraints and Conditional Demands: Theory and Applications, *Econometrica*, p. 1727-1744.
- Pollak, R.A. (1969), Conditional Demand Functions and Consumption Theory, *Quarterly Journal of Economics*, volume 83, p. 60-78.
- Rudin, W. (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, Tokyo, McGraw-Hill.
- Theil, H. (1980), *The System-Wide Approach to Microeconomics*, Oxford, Basil Blackwell.
- Tobin, J.; Houthakker, H.S. (1950-1951), The Effects of Rationing on Demand Elasticities, *Review of Economic Studies*, volume 18. p. 140-153.