

Twee bekende stelsels vraagvergelijkingen
en hun mengvorm

door A. Nieuwenhuis^{*}

Samenvatting: Additiviteit van de directe of indirecte nutsfunctie impliceert dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen inkomens- en eigen- prijselasticiteiten. Daarom staan het *(Generalized) Linear Expenditure System* (met een additieve directe nutsfunctie) en het *Indirect Addilog Demand System* (met een additieve indirecte nutsfunctie) niet toe dat deze twee belangrijke reactie-parameters onafhankelijk van elkaar worden gemeten. Een mengvorm van deze twee stelsels doet dat wel.

^{*}

Centraal Planbureau, Van Stolkweg 14, 2585 JR ,Den Haag , tel. 070 - 514151.

Twee bekende stelsels vraagvergelijkingen en hun mengvorm

1. Inleiding

De eerste schrijvers over nutstheorie en consumentengedrag gingen uit van eenvoudige nutsfuncties van de gedaante

$$(1.1) \quad u = \sum f_i(x_i)$$

waarin x_i de geconsumeerde hoeveelheid van goed i is en f_i een functie van één variabele, voor $i = 1, \dots, I$. Een dergelijke functie wordt tegenwoordig *expliciet additief* genoemd. Een functie die na een monotone maar overigens willekeurige transformatie in deze vorm kan worden geschreven, is *additief*.

Additiviteit van een functie g legt restricties op aan de tweede-orde afgeleiden $\partial^2 g / \partial x_i \partial x_j$. Al gauw zijn in de theorie algemene functies zonder restricties op de tweede-orde afgeleiden als nutsfunctie toegelaten.

Uit de veronderstelling van nutsmaximering onder een budget-restrictie volgen een aantal eigenschappen van de vraagvergelijkingen die de optimale hoeveelheden geven als functie van de gegeven prijzen en het gegeven inkomen. Naarmate de nutsfunctie algemener is, zijn de eigenschappen van de vraagvergelijkingen minder specifiek. Zo is het bijvoorbeeld niet mogelijk te concluderen dat de (niet gecompenseerde) eigen-prijselasticiteit altijd negatief is.

Bij de eerste empirische studies van het consumentengedrag werd er niet op gelet of de vraagvergelijkingen al de eigenschappen hadden die ze volgens de theorie moesten hebben. Dat was ook eigenlijk niet nodig. Het onderzoek betrof markt-vraagvergelijkingen, en de theorie heeft betrekking op het gedrag van individuele consumenten. Marktvraagvergelijkingen hoeven niet alle eigenschappen van micro vraagvergelijkingen te hebben.

Niettemin heeft men bij het empirisch onderzoek al gauw de hulp ingeroepen van de micro-economische theorie. De vraag

naar een goed is een functie van het inkomen van de afnemers, van de prijs van dat goed en van de prijzen van alle andere goederen. Men beschikte echter niet over voldoende informatie om alle reactieparameters te kunnen schatten. De micro-economische theorie legt een aantal restricties aan de reactieparameters van individuele consumenten op en vermindert daarmee het aantal onafhankelijke coëfficiënten. Deze restricties paste men ook op geaggregeerd niveau toe, omdat andere plausibele restricties ontbraken.

In feite heeft men niet slechts de restricties opgelegd die volgen uit de algemene theorie, maar is men veel verder gegaan door voor de nutsfunctie heel specifieke, eenvoudige vormen te veronderstellen. De twee oudste stelsels vraagvergelijkingen zijn het *Indirect Addilog Demand System* (IADS) en het *Linear Expenditure System* (LES). Bij de laatste is de (*directe*) nutsfunctie additief, bij de eerste is de *indirecte* nutsfunctie (die ontstaat door substitutie van de vraagvergelijkingen in de directe nutsfunctie) additief.

Aanvankelijk heeft men additieve (directe of indirecte) nutsfuncties gebruikt zonder de implicaties daarvan systematisch te onderzoeken. Later hebben Frisch (1959) en Houthakker (1960) bewezen dat additiviteit equivalent is met bepaalde restricties (verschillend voor directe en indirecte additiviteit) op de kruiselingse prijselasticiteiten. Dat kwam mooi uit, want men was toch het meest geïnteresseerd in de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten.

Nog weer later heeft Deaton (1974) erop gewezen dat (directe of indirecte) additiviteit een bij benadering lineair verband oplegt aan de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten. De benadering is vooral goed als het aantal onderscheiden goederencategorieën groot is, maar kan bij een niet al te klein aantal al heel redelijk zijn.

De conclusie is dat onder additiviteit de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten niet onafhankelijk van elkaar kunnen worden gemeten. Dit is alleen dan geen nadeel als er wel informatie is over inkomensveranderingen maar geen of slechts weinig informatie

over relatieve-prijsveranderingen (of omgekeerd, maar dat zal in de praktijk niet voorkomen).

Naast deze tak van onderzoek die de micro-economische theorie gebruikt om het schattingsprobleem te vereenvoudigen, is er een andere tak van onderzoek die zich afvraagt of de micro-economische theorie een aanvaardbare beschrijving van de (macro) werkelijkheid geeft. Om de theorie te toetsen heeft men flexibele modellen ontwikkeld waarin de restricties van de theorie niet zijn "ingebakken" maar waarin ze door parameterrestricties wel kunnen worden verwerkt. Voorbeelden zijn het *Rotterdam Model* van Theil en Barten, de *Transcendental Logarithmic Utility Functions* van Christensen, Jorgenson en Lau (1975), en het *Almost Ideal Demand System* (AIDS, niet te verwarren met IADS) van Deaton en Muellbauer (1980). Omdat deze modellen veel parameters bevatten, kunnen ze alleen als het aantal onderscheiden goederencategorieën I niet te groot is, worden geschat.

De situatie is dus zó dat de modellen die ook voor (middel-) grote I kunnen worden geschat, zeer restrictieve eigenschappen hebben en dat de flexibele modellen zoveel parameters hebben dat ze voor (middel-)grote I niet kunnen worden geschat.

We concluderen dat er een markt bestaat voor verdeelmodellen die zó eenvoudig zijn dat ze voor (middel)grote I kunnen worden geschat en tegelijkertijd zó algemeen dat de eigen-prijs- en inkomenselasticiteit van elk goed onafhankelijk van elkaar kunnen worden gemeten. Zoals we in deze notitie laten zien, voldoet een mengvorm van het IADS en van een generalisatie van het LES aan deze eisen.

De inhoud van deze notitie is verder als volgt. In Paragraaf 2.1 vermelden we de restricties op de vraagvergelijkingen die volgen uit de (neo-klassieke) theorie van het consumentengedrag bij algemene nutsfuncties, en in Paragraaf 2.2 geven we de extra restricties voor het geval dat de directe of indirecte nutsfunctie additief is. In Paragraaf 3 bespreken we het (*Generalized*) LES en het IADS, hun mengvorm komt in de daaropvolgende paragraaf aan de orde. Paragraaf 5 geeft een samenvatting en enkele slotopmerkingen.

2. Nutsmaximering

2.1. Algemene nutsfuncties

In deze subparagraaf geven we een overzicht van de (voor ons doel) belangrijkste resultaten van de statische theorie van het consumentengedrag. De meeste van deze resultaten zijn algemeen bekend; daarom gaan we niet diep in op de bewijzen. Voor een beknopte behandeling die gebruik maakt van matrix-algebra, zie bv. Brown en Deaton (1972, blz. 1158 e.v.).

Zij x_i de geconsumeerde hoeveelheid van goed i , $i = 1, \dots, I$, en p_i de behorende prijs. De totale consumptieve bestedingen, kortweg "inkomen" genoemd, worden aangeduid met Y . De consument maximeert zijn nut u ,

$$(2.1) \quad u = u(x_1, \dots, x_I),$$

onder de lineaire budgetrestrictie

$$(2.2) \quad \sum p_k x_k = Y.$$

De eerste-orde voorwaarden voor een nutsmaximum zijn (2.2) en

$$(2.3) \quad u_i = \lambda p_i, \quad i=1, \dots, I,$$

met $u_i := \partial u / \partial x_i$; λ is een Lagrange-multiplicator, en heeft de interpretatie van marginaal nut van het inkomen, $\partial u / \partial Y$. Uit deze $I + 1$ relaties kunnen we in beginsel λ en elke x_i oplossen als functie van alle prijzen en het inkomen. De vraagvergelijkingen zijn

$$(2.4) \quad x_i = x_i(p_1, \dots, p_I, Y), \quad i=1, \dots, I.$$

Uit de veronderstelling van nutsmaximering onder een lineaire budgetrestrictie volgt een aantal restricties op de vraagvergelijkingen (2.4). We kunnen ze afleiden door de eerste-

ordevoorwaarden (2.2) en (2.3) partieel te differentiëren naar het inkomen en de prijzen. Hieronder geven we deze restricties in termen van de I inkomenselasticiteiten $\varepsilon_i := \partial \ln x_i / \partial \ln Y$ en de I^2 prijselasticiteiten $\varepsilon_{ij} := \partial \ln x_i / \partial \ln p_j$.

Uit partiële differentiatie van de budgetrestrictie naar het inkomen en naar de prijzen volgt

$$(2.5) \quad \sum_k w_k \varepsilon_k = 1 \quad (\text{Engel Aggregatie}),$$

$$(2.6) \quad \sum_k w_k \varepsilon_{ki} = -w_i, \quad i=1, \dots, I \quad (\text{Cournot Aggregatie}),$$

waar w_i staat voor het budgetaandeel $p_i x_i / Y$. Deze restricties drukken alleen maar uit dat het gehele inkomen wordt besteed.

De prijzen en het inkomen worden alleen door de budgetvergelijking in het keuzeprobleem geïntroduceerd en deze vergelijking is lineair homogeen in het inkomen en de prijzen. Dit betekent dat de consument na een proportionele verandering van alle prijzen en het inkomen nog steeds uit dezelfde goederencombinaties kan kiezen, terwijl zijn nutsfunctie onveranderd is. Het voorwaardelijke nutsmaximum wordt dan ook ongemoeid gelaten door een proportionele verandering van alle prijzen en het inkomen. Anders gezegd, de vraagvergelijkingen (2.4) zijn homogeen van de graad nul in hun argumenten:

$$x_i(p_1, \dots, p_I, Y) = x_i(\alpha p_1, \dots, \alpha p_I, \alpha Y).$$

Toepassing van de stelling van Euler voor homogene functies hierop geeft

$$(2.7) \quad \sum_k \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_i, \quad i=1, \dots, I \quad (\text{Homogeniteit}).$$

Deze restricties veronderstellen alleen maar rationaliteit in de zin van afwezigheid van geldillusie.

Het effect van een prijsverandering kan worden gesplitst in een substitutie-effect en een inkomenseffect. In termen van

elasticiteiten:

$$(2.8) \quad \varepsilon_{ij} = w_j (\sigma_{ij} - \varepsilon_i), \quad i, j = 1, \dots, I,$$

zie Allen (1938, blz. 512). Hier staat σ_{ij} voor de partiële substitutie-elasticiteit volgens Allen (AES) tussen i en j . De krachtigste restricties die uit de theorie volgen, hebben betrekking op deze elasticiteiten. Er geldt

$$(2.9a) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{Symmetrie}),$$

$$(2.9b) \quad \sum_k w_k \sigma_{ik} = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (\text{Negatief+}$$

Semi-Definietheid)

$$(2.9c) \quad \sum_k \sum_l z_k z_l \sigma_{kl} \leq 0$$

(de matrix $\Sigma := \{\sigma_{ij}\}$ is symmetrisch en negatief semi-definiet).

De eerste term in het rechterlid van (2.8), $w_j \sigma_{ij}$, meet het effect op de hoeveelheid van goed i van een verandering in de prijs van goed j , waarbij de overige prijzen en het *nutsniveau* constant worden gehouden. Om de consument in staat te stellen op hetzelfde nutsniveau te blijven, moet de prijsverandering van goed j worden gecompenseerd door een kleine inkomensverandering. $w_j \sigma_{ij}$ wordt daarom de *gecompenseerde* prijselasticiteit genoemd, en ε_{ij} de *ongecompenseerde* prijselasticiteit.

De restricties (2.5-7) en (2.9a en b) zijn niet alle onafhankelijk van elkaar. De restricties (2.9b) bijvoorbeeld volgen uit sommatie van (2.8) over j en combinatie van het resultaat met (2.7). Deze laatste restricties kunnen we op hun beurt afleiden uit (2.5 en 6) en (2.9a). Er zijn dus in totaal $(I^2 + I + 2)/2$ onafhankelijke restricties, zodat van de $I^2 + I$ prijs- en inkomenselasticiteiten $(I^2 + I - 2)/2$ onafhankelijke elasticiteiten overblijven. Als we bv. de $I(I-1)/2$ substitutie-elasticiteiten σ_{ij} ($i \neq j$) en $I-1$ inkomenselasticiteiten kennen, kunnen we alle andere elasticiteiten uitrekenen.

Tot slot van deze subparagraaf vermelden we enkele duale

relaties die we in het vervolg nodig zullen hebben. We merken eerst op dat we de vraagvergelijkingen (2.4) wegens hun homogeniteit van de graad nul kunnen schrijven als

$$(2.10) \quad x_i = x_i(r_1, \dots, r_I), \quad i=1, \dots, I,$$

waar r_i staat voor de *genormaliseerde* prijs p_i/Y . Substitutie van deze vergelijkingen in de *directe* nutsfunctie geeft ons de *indirecte* nutsfunctie:

$$(2.11) \quad u = u\{x_1(r_1, \dots, r_I), \dots, x_I(r_1, \dots, r_I)\} \\ = v(r_1, \dots, r_I).$$

We veronderstellen nu dat het stelsel vergelijkingen (2.10) kan worden geïnverteerd. Dit geeft ons de *inverse* vraagvergelijkingen

$$(2.12) \quad r_i = r_i(x_1, \dots, x_I), \quad i=1, \dots, I.$$

Zoals de (*gewone*) vraagvergelijkingen volgen uit *maximering* van de *directe* nutsfunctie onder de restrictie $\sum r_k x_k = 1$ met gegeven (*genormaliseerde*) *prijzen*, zo volgen de *inverse* vraagvergelijkingen uit *minimering* van de *indirecte* nutsfunctie onder de restrictie $\sum r_k x_k = 1$ met gegeven *hoeveelheden*. De eerste-ordevoorwaarden voor dit voorwaardelijke minimumprobleem zijn

$$(2.13) \quad \sum r_k x_k = 1,$$

$$(2.14) \quad v_i = \mu x_i, \quad i=1, \dots, I,$$

met $v_i := \partial v / \partial r_i$ en μ een Lagrange-multiplicator. Uit deze $I + 1$ relaties kunnen we in beginsel μ en elke r_i oplossen als functie van alle hoeveelheden.

In feite is het veel eenvoudiger om uit (2.13 en 14) de

gewone vraagvergelijkingen af te leiden: vermenigvuldig het linker- en rechterlid van (2.14) met r_i , sommeer over i en deel de uitkomst op (2.14):

$$(2.15) \quad x_i = v_i / \sum_k r_k v_k, \quad i=1, \dots, I.$$

Dit resultaat blijkt equivalent te zijn met de gelijkheid van Roy (ook wel de gelijkheid van Ville en Roy genoemd),

$$(2.16) \quad x_i = -v_i / v_Y,$$

waar $v_Y := \partial v / \partial Y (= \lambda)$.

Op dezelfde eenvoudige manier kunnen we uit (2.2 en 3) de inverse vraagvergelijkingen afleiden:

$$(2.17) \quad r_i = u_i / \sum_k x_k u_k, \quad i=1, \dots, I.$$

Dit resultaat staat bekend als de gelijkheid van Hotelling en Wold.

Voor meer bijzonderheden en andere dualiteitsresultaten verwijzen we naar Weymark (1980). De eigenschappen van de inverse vraagvergelijkingen worden besproken door Anderson (1980).

2.2. Additieve (directe of indirecte) nutsfuncties

Hoewel de veronderstelling van nutsmaximering het aantal onafhankelijke elasticiteiten drastisch reduceert, blijft er toch nog een flink aantal over, dat kwadratisch met het aantal goederencategorieën toeneemt. In de praktijk is er meestal onvoldoende informatie om dit (gereduceerde) aantal elasticiteiten te kunnen schatten. Vooral de schattingen van de kruiselingse prijs-elasticiteiten zijn onbetrouwbaar, door gebrek aan variantie in de relatieve prijzen. Omdat de meeste belangstelling toch uitgaat naar de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten, is gezocht naar manieren om de kruiselingse prijselasticiteiten aan verdere beperkingen te onderwerpen. Frisch (1959) en Houthakker (1960)

hebben erop gewezen dat een manier waarop dit kan worden gedaan, is uit te gaan van een additieve (directe of indirecte) nutsfunctie. Later zijn Sato (1972) en Deaton (1974) teruggekomen op de veronderstelling van additiviteit, waarbij vooral Deaton heeft gewezen op de nadelen ervan.

Uit de veronderstelling dat de *directe* nutsfunctie additief is, heeft Frisch (1959) de volgende formule voor de kruiselingse prijselasticiteiten afgeleid:

$$(2.18) \quad \epsilon_{ij} = -w_j \epsilon_i (1 - \sigma^* \epsilon_j), \quad i, j=1, \dots, I, i \neq j,$$

waar de parameter σ^* een positieve waarde heeft. Houthakker (1960) formuleerde de implicaties van directe additiviteit in termen van de substitutie-effecten. Herschreven in termen van partiële substitutie-elasticiteiten volgens Allen luidt zijn resultaat

$$(2.19) \quad \sigma_{ij} = \sigma^* \epsilon_i \epsilon_j, \quad i, j=1, \dots, I, i \neq j.$$

Met behulp van (2.8) blijkt dat (2.18) en (2.19) equivalent zijn. Houthakker (1960) bewees verder dat (2.19) niet alleen noodzakelijk maar ook voldoende is voor additiviteit van de directe nutsfunctie.

Frisch (1959) ging uit van een directe nutsfunctie die *expliciet* additief is, en constateerde dat in dat geval geldt

$$-\sigma^{*-1} = \partial \ln \lambda / \partial \ln Y;$$

hij noemde de reciproke van $-\sigma^*$ de *money flexibility of the marginal utility of money*. Deze interpretatie maakt gebruik van cardinale eigenschappen van de nutsfunctie en vervalt bij niet expliciet additieve representaties van de voorkeursordening. De "ordinale" interpretatie van σ^* is, zoals uit (2.19) blijkt, die van een maat voor de gemiddelde substitueerbaarheid (zie ook Pearce (1964, blz. 210) en Sato (1972, blz. 108)).

Directe additiviteit schijnt ons precies te geven wat we graag willen hebben, *i.e.* restricties op de kruiselingse prijs-elasticiteiten, en niet meer dan dat, zodat de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten als onafhankelijke reactieparameters overblijven. Deaton (1974) heeft er echter op gewezen dat (2.18) bij benadering proportionaliteit tussen de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten impliceert, als het aantal goederencategorieën niet te klein is. Immers, substitutie van (2.18) in (2.7) geeft voor de eigen-prijselasticiteit

$$(2.20) \quad \varepsilon_{ii} = -w_i \varepsilon_i (1 - \sigma^* \varepsilon_i) - \sigma^* \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, I.$$

De orde van grootte van het budgetaandeel w_i is $1/I$. Als I dus niet te klein is, wordt de eigen-prijselasticiteit voornamelijk bepaald door de tweede term in het rechterlid, d.w.z.

$$(2.21) \quad \varepsilon_{ii} \approx -\sigma^* \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, I.$$

Eigen-prijs- en inkomenselasticiteiten kunnen dus niet onafhankelijk van elkaar worden gemeten.

Nu is *a priori* additiviteit van de directe nutsfunctie alleen aannemelijk bij een indeling in ruime goederengroepen als voeding, kleding e.d., waar het aantal goederengroepen tamelijk klein is. De benadering (2.21) hoeft dan niet goed te zijn, in welk geval het bezwaar van Deaton tegen additiviteit zou vervallen. De vraag rijst wat in dit verband "klein" is. Dat zal in de praktijk moeten blijken. Deaton (1974) geeft een empirisch voorbeeld met acht goederencategorieën waarin de benadering (2.21) al zeer goed is.

De restrictie (2.21) zou zelfs voor grote I niet hinderlijk zijn als goederen met een hoge (lage) inkomenselasticiteit altijd ook een in absolute waarde hoge (lage) eigen-prijselasticiteit zouden hebben. Er is echter geen reden dit te veronderstellen. In ieder geval zouden we zo'n veronderstelling graag willen toetsen en niet van te voren opleggen.

In de meeste steekproeven is de variatie in inkomen veel

groter dan de variatie in prijzen. We kunnen dus verwachten dat de inkomenselasticiteiten tamelijk goed zijn bepaald. De eigenprijselasticiteiten passen zich dan zó aan dat (2.21) opgaat.

Houthakker (1960) heeft ook het geval bekeken dat de *indirecte* nutsfunctie additief is, en bewezen dat dan de kruiselingse prijselasticiteiten voldoen aan

$$(2.22) \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{kj}, \quad i, j, k=1, \dots, I, i \neq j, k \neq j.$$

Omgekeerd impliceert (2.22) dat de indirecte nutsfunctie additief is.

De restricties (2.22) kunnen we evenals (2.18) herschrijven tot restricties op de partiële substitutie-elasticiteiten volgens Allen. Uit (2.22) en (2.8) volgt

$$\sigma_{ij} - \sigma_{kj} = \epsilon_i - \epsilon_k, \quad i \neq j, k \neq j,$$

ofwel

$$\sigma_{ij} = \omega_j + \epsilon_i, \quad i \neq j,$$

met ω_j een of andere grootheid die specifiek is voor j maar niet voor i . Op dezelfde manier vinden we

$$\sigma_{ji} = \omega_i + \epsilon_j, \quad i \neq j.$$

Omdat $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ volgt nu

$$(2.23) \quad \sigma_{ij} = \omega + \epsilon_i + \epsilon_j, \quad i \neq j.$$

Dit is het analogon van (2.19) voor indirecte additiviteit. ω is de inkomensflexibiliteit van het marginale nut van het inkomen voor de (unieke) *expliciet* additieve representatie van de indirecte nutsfunctie. Een interpretatie van ω die geen beroep doet op cardinale eigenschappen van de nutsfunctie, vinden we uit (2.23): $\omega + 2$ is een maat voor de gemiddelde substitueerbaarheid.

Substitutie van (2.23) in (2.8) geeft voor de kruiselingse prijselasticiteiten

$$(2.24) \quad \epsilon_{ij} = w_j(\epsilon_j + \omega), \quad i \neq j.$$

Indirecte additiviteit lijkt ons dus, net als directe additiviteit, precies te geven wat we willen hebben - restricties op de kruiselingse prijselasticiteiten - en niet meer dan dat. Deaton (1974) heeft er echter op gewezen dat (2.24) bij benadering een lineair verband tussen de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten impliceert. Immers, substitutie van (2.24) in (2.7) geeft voor de eigen-prijselasticiteit

$$(2.25) \quad \epsilon_{ii} = w_i(\epsilon_i + \omega) - (1 + \epsilon_i + \omega), \quad i=1, \dots, I.$$

Als het aantal goederencategorieën niet te klein is, geldt dus

$$(2.26) \quad \epsilon_{ii} \approx -\epsilon_i - (1 + \omega), \quad i=1, \dots, I.$$

Zoals bij directe additiviteit het *quotiënt* van eigen-prijs- en inkomenselasticiteit bij benadering constant is, zo is bij indirecte additiviteit hun *som* bij benadering constant. In geen van beide gevallen kunnen deze reactieparameters onafhankelijk van elkaar worden gemeten.

Tot slot van deze paragraaf merken we het volgende op. Is hierboven additiviteit van de directe of indirecte nutsfunctie gekarakteriseerd in termen van eigenschappen van de (*gewone*) vraagvergelijkingen, het is natuurlijk ook mogelijk een karakterisering te geven in termen van eigenschappen van de *inverse* vraagvergelijkingen. Nieuwe bewijzen hoeven daartoe niet geleverd te worden. Met een beroep op dualiteit kunnen we onmiddellijk het volgende stellen: wat additiviteit van de directe (indirecte) nutsfunctie betekent voor de gewone vraagvergelijkingen, betekent additiviteit van de indirecte (directe) nutsfunctie voor de inverse vraagvergelijkingen. Als voorbeeld noemen we het volgende resultaat. Zij $\eta_{ij} := \partial \ln r_i / \partial \ln x_j$, de hoeveelheidselasti-

citeit van de (genormaliseerde) prijs van goed i met betrekking tot de hoeveelheid van goed j , waarbij alle overige hoeveelheden constant worden gehouden. Directe additiviteit is equivalent met

$$(2.27) \quad \eta_{ij} = \eta_{kj}, \quad i, j, k=1, \dots, I, i \neq j, k \neq j.$$

Dit is het analogon van (2.22).

3. Twee bekende stelsels vraagvergelijkingen

In deze paragraaf bekijken we vergelijkingenstelsels voor de budgetaandelen w_i als functie van de genormaliseerde prijzen $r_i := p_i/Y$, met Y het inkomen. De vraagvergelijkingen $x_i = x_i(r_1, \dots, r_I)$ moeten consistent zijn met de veronderstelling van nutsmaximering onder de lineaire budgetrestrictie $\sum r_k x_k = 1$.

Het allereenvoudigste stelsel (budget-)aandeelvergelijkingen is

$$(3.1) \quad w_i = \beta_i, \quad i=1, \dots, I,$$

waar de positieve constanten β_i tot één optellen.¹ Dit stelsel correspondeert met het geval van een *Cobb-Douglas* (CD) nutsfunctie, de logaritmische transformatie waarvan is

$$(3.2) \quad \ln u = \sum \beta_k \ln x_k.$$

Als we de CD-nutsfunctie vervangen door de meer algemene *Constant Elasticity of Substitution* (CES) nutsfunctie,

$$(3.3) \quad u = \left(\sum \beta_k^{1-\rho} x_k^\rho \right)^{1/\rho}, \quad \rho < 1,$$

dan luiden de aandeelvergelijkingen

$$(3.4) \quad w_i = \beta_i r_i^{1-\sigma} / \sum \beta_k r_k^{1-\sigma} =: b_i^*, \quad i=1, \dots, I,$$

¹ Waar in het vervolg van deze notitie parameters β_i voorkomen, hebben zij altijd deze eigenschappen.

waar $\sigma := 1/(1 - \rho)$. σ is de partiële substitutie-elasticiteit volgens Allen. De restrictie $\rho < 1$ betekent $\sigma > 0$. In feite kunnen we toestaan dat σ in (3.4) de waarde nul aanneemt. De bijbehorende directe nutsfunctie vinden we als limiet van u in (3.3) voor $\rho \rightarrow -\infty$; dit is de Leontief-functie, $u = \min_k (x_k/\beta_k)$; in dit geval zijn er geen inverse vraagvergelijkingen. De CD-functie correspondeert met het geval $\sigma = 1$.

De stelsels (3.1) en (3.4) zijn wél gebruikt voor de verklaring van *kostenaandelen* bij empirische studies van het producentengedrag, maar niet voor de verklaring van consumentenbudgetaandelen. De reden daarvoor is dat beide stelsels proportionaliteit tussen het inkomen en de uitgaven aan elke budgetcategorie impliceren. Alle inkomenselasticiteiten zijn volgens (3.1) en (3.4) dus gelijk aan één. De werkelijkheid is echter anders, zoals al bij oppervlakkige beschouwing blijkt.

Er zijn twee bekende generalisaties van (3.4) die dit probleem omzeilen. Deze komen in de volgende subparagrafen aan de orde.

3.1. (G)LES

Stel dat we in de nutsfunctie (3.3) de argumenten x_k vervangen door $\bar{x}_k := x_k - \chi_k > 0$. Als χ_k positief is, kunnen we hem interpreteren als minimumniveau van consumptie van goed k . De vergelijkingen voor de budgetaandelen zijn nu

$$(3.5) \quad w_i = r_i \chi_i + b_i^* (1 - \sum r_k \chi_k), \quad i=1, \dots, I.$$

De consument verdeelt zijn inkomen in twee stappen. In de eerste stap geeft hij aan elke budgetcategorie een bedrag uit van $p_i \chi_i$ om aan zijn minimale behoeften te voldoen. In de tweede stap deelt hij van zijn bovenminimale inkomen, $Y - \sum p_k \chi_k$, nog een fractie b_i^* toe aan elke budgetcategorie. b_i^* , gedefinieerd als in (3.4), is het marginale budgetaandeel van goed i .

Voor $\sigma = 1$ luiden de uitgavenvergelijkingen

$$(3.6) \quad p_i x_i = p_i \chi_i + \beta_i (Y - \sum p_k \chi_k), \quad i=1, \dots, I.$$

Dit is het beroemde *Linear Expenditure System* (LES), zo genoemd omdat het lineair is in alle prijzen en het inkomen. Het LES heeft al een lange staat van dienst. De vraagvergelijkingen zijn voor het eerst geopperd in 1948 door Klein en Rubin; in dat jaar is de onderliggende (directe) nutsfunctie afgeleid door Samuelson, en later (onafhankelijk) door Geary (1950); Stone (1954) heeft het model voor het eerst geschat en het zijn naam gegeven; Stone (1954) en Frisch (1954) hebben bewezen dat het het enige stelsel lineaire (in inkomen en prijzen) uitgavenvergelijkingen is dat verenigbaar is met de veronderstelling van nutsmaximerend gedrag. Het is veelvuldig toegepast bij empirische studies van het consumentengedrag, zie bv. Pollak en Wales (1969).

De generalisatie tot het algemene geval $\sigma \neq 1$ is in 1970 door Gamaletsos voorgesteld, zie Gamaletsos (1973). De uitgavenvergelijkingen staan bekend als het *Generalized LES* (GLES), ofschoon ze niet lineair zijn in de prijzen (wel in het inkomen).

De prijs- en inkomenselasticiteiten zijn

$$(3.7) \quad \epsilon_i = b_i^* / w_i, \quad i=1, \dots, I,$$

$$(3.8) \quad \epsilon_{ij} = -w_j \epsilon_i \left\{ 1 - \epsilon_j \cdot \sigma (1 - \delta_{ij} b_i^{*-1}) (1 - \sum r_k \chi_k) \right\} \\ = -(b_i^* / w_i) \left[w_j (1 - \sigma) + \left\{ r_j \chi_j + \delta_{ij} (1 - \sum r_k \chi_k) \right\} \sigma \right], \\ i, j=1, \dots, I,$$

met δ_{ij} een Kronecker delta ($\delta_{ij} = 1$ als $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$). Omdat de directe nutsfunctie additief is, kunnen we tegen het GLES het bezwaar inbrengen dat we in Paragraaf 2.2 hebben genoemd, nl. dat eigen-prijs- en inkomenselasticiteiten bij benadering proportioneel zijn. Door de eerste regel van (3.8) te

vergelijken met (2.18) vinden we voor de verhoudingsconstante

$$(3.9) \quad \sigma^* = \sigma(1 - \sum_k r_k \chi_k).$$

σ^* is, zoals gezegd, een maat voor de gemiddelde substitueerbaarheid. Deze blijkt bij het GLES gelijk te zijn aan het produkt van σ , de substitutie-elasticiteit tussen de bovenminimale hoeveelheden $\bar{x}_i$ en $\bar{x}_j$ ($i \neq j$), en de verhouding van het bovenminimale inkomen tot het gehele inkomen.

Een ander gevolg van directe additiviteit is dat inferioriteit praktisch gesproken wordt uitgesloten. In theorie kunnen negatieve inkomenselasticiteiten voorkomen, echter alleen in de constellatie dat alle inkomens-elasticiteiten op één na negatief zijn,² wat zeer onrealistisch is. Blijft over de situatie dat alle inkomenselasticiteiten positief zijn. Dit impliceert op zijn beurt dat complementariteit tussen goederen, gedefinieerd als $\sigma_{ij} < 0$, is uitgesloten, zie (2.19).

Naast deze eigenschappen, die het GLES deelt met alle andere stelsels waaraan een additieve directe nutsfunctie ten grondslag ligt, heeft het GLES ook meer specifieke restrictieve eigenschappen. De belangrijkste daarvan is dat de marginale budgetaandelen onafhankelijk van het inkomen zijn. Anders gezegd, de Engel-curven (het verband tussen uitgaven en inkomen voor gegeven prijzen) zijn lineair. Bij het LES zijn de marginale budgetaandelen zelfs constant. Dit betekent dat bij stijging van het reële inkomen alle inkomenselasticiteiten monotoon tot één naderen, en in het bijzonder dat de inkomens-elasticiteit van voeding stijgt met het inkomen. Dat lijkt niet erg realistisch.

3.2. IADS

De tweede bekende generalisatie van (3.4) verkrijgen we door toe te staan dat de exponenten van de genormaliseerde prijzen

² Zie Sato (1972, blz. 103(voetnoot 3)).

van elkaar verschillen:

$$(3.10) \quad w_i = \beta_i r_i^{1-\sigma_i} / \sum \beta_k r_k^{1-\sigma_k}, \quad i=1, \dots, I,$$

met $\sigma_i \geq 0$, $i=1, \dots, I$. Het bijbehorende stelsel vraagvergelijkingen staat bekend als het *Indirect Addilog Demand System* (IADS); het kan door toepassing van de gelijkheid van Roy worden verkregen uit de volgende additieve, indirecte nutsfunctie:

$$(3.11) \quad v = -\sum (\beta_k / \alpha_k) r_k^{\alpha_k},$$

waar $\alpha_i = 1 - \sigma_i$, $i=1, \dots, I$ (als $\alpha_k = 0$ wordt de k -de term in het rechterlid van (3.11) vervangen door $\beta_k \ln r_k$). Het geval $\alpha_i = 1$ ($\sigma_i = 0$), $i=1, \dots, I$, komt overeen met een directe nutsfunctie van het Leontief-type.³

De restricties $\sigma_i \geq 0$ ($\alpha_i \leq 1$), $i=1, \dots, I$, zijn voldoende tweede-orde voorwaarden voor een nutsmaximum. Zij zijn tevens noodzakelijke voorwaarden als we toestaan dat de genormaliseerde prijzen alle niet-negatieve waarden mogen aannemen. Als we echter aan de genormaliseerde prijzen een positieve ondergrens opleggen - en bij de meeste, zo niet alle, steekproeven zal er inderdaad een positieve ondergrens zijn - mag één (en niet meer dan één) van de σ 's negatief zijn, mits alle overige "voldoende" ver van nul liggen.⁴

Het IADS heeft net als het LES een lange staat van dienst. Het is voor het eerst toegepast in 1941 door Leser. Onafhankelijk van Leser heeft Somermeyer in 1956 het model voorgesteld. Houthakker (1960) heeft het model zijn naam "indirect addilog" gegeven. De vurigste verdediger ervan is Somermeyer. Somermeyer en Langhout (1972) geven een uitvoerige bespreking van de eigenschappen.

³ Volgens Van Driel (1974) mag slechts één van de α_i gelijk zijn aan één. Het voorbeeld van een Leontief (directe) nutsfunctie toont aan dat deze eis te sterk is.

⁴ Wat "voldoende" is, is een empirische kwestie en hangt af van de feitelijke genormaliseerde-prijsvectoren. De restricties waaraan de σ 's moeten voldoen, volgen uit tekenrestricties op de determinanten van minoren van de gerande Hessiaan van de indirecte nutsfunctie. In het tweedimensionale geval ($I=2$) met $\sigma_1 < 0$ (ofwel $\alpha_1 > 1$) moet σ_2 voldoen aan $\sigma_2 > -w_2 \sigma_1 / w_1 > 0$ (moet α_2 voldoen aan $\alpha_2 < (1 - \alpha_1 w_2) / w_1 < 1$).

De prijs- en inkomenselasticiteiten zijn

$$(3.12) \quad \varepsilon_i = 1 + \sigma_i - \sum w_k \sigma_k, \quad i=1, \dots, I,$$

$$(3.13) \quad \varepsilon_{ij} = -w_j(1 - \sigma_j) - \delta_{ij} \sigma_i, \quad i, j=1, \dots, I.$$

Door (3.13) met (2.24) te vergelijken vinden we verder

$$(3.14) \quad \omega + 2 = \sum w_k \sigma_k,$$

hetgeen de interpretatie van $\omega + 2$ als maat voor de gemiddelde substitueerbaarheid bevestigt.

Omdat de indirecte nutsfunctie additief is, kunnen we tegen het IADS het bezwaar inbrengen dat we in Paragraaf 2.2 hebben genoemd, nl. dat de som van eigen-prijs- en inkomenselasticiteit van elk goed bij benadering gelijk is aan één gemeenschappelijke constante. Deze twee belangrijke reactieparameters kunnen dus niet onafhankelijk van elkaar worden geschat.

Overigens lijkt het IADS in kwalitatieve zin flexibel. Goederen kunnen inferieur zijn, en complementariteit is mogelijk zelfs tussen grote goederengroepen. Het IADS deelt deze eigenschappen met andere stelsels waaraan een additieve indirecte nutsfunctie ten grondslag ligt. De mogelijkheid van complementariteit ($\sigma_{ij} < 0$) blijkt bv. uit (2.23), zodra we bedenken dat ω best negatief mag zijn (maar waarschijnlijk niet kleiner dan -2 is). In kwantitatieve zin is het IADS echter even restrictief als het LES: beide stelsels bevatten slechts $2I-1$ onafhankelijke parameters.

4. De mengvorm

De indirecte nutsfunctie die hoort bij (3.4), is, net als de directe nutsfunctie, van het CES-type, en dus additief. Samuelson (1965) heeft bewezen dat dit het enige geval is waarin de directe nutsfunctie en de duale indirecte nutsfunctie

beide additief zijn. Bij de generalisatie van (3.4) tot het GLES blijft de directe nutsfunctie additief, bij de generalisatie tot het IADS blijft de indirecte nutsfunctie additief. Beide stelsels zijn onderhevig aan de kritiek van Deaton (1974) dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten. Wie deze reactie-parameters onafhankelijk van elkaar wil meten, zal een verdeelmodel moeten gebruiken waarvan noch de directe noch de indirecte nutsfunctie additief is. Zoals hieronder zal blijken, voldoet een mengvorm van het GLES en het IADS aan deze eis.

De mengvorm van het GLES en het IADS ontstaat door minimum-niveau's van consumptie te introduceren in het IADS. De consument verdeelt zijn inkomen weer in twee stappen. In de eerste stap geeft hij aan elke budgetcategorie een bedrag uit van $p_i x_i$ om in zijn minimale behoefte te voorzien. In de tweede stap verdeelt hij zijn bovenminimale inkomen; daarvoor gebruikt hij nu echter niet het CES-model (3.4), maar het indirecte addilog model. De vergelijkingen voor de budgetaandelen luiden

$$(4.1a) \quad w_i = r_i x_i + b_i (1 - \sum r_k x_k), \quad i=1, \dots, I,$$

$$(4.1b) \quad b_i = \beta_i s_i^{\alpha_i} / \sum \beta_k s_k^{\alpha_k},$$

waar s_i staat voor de *gerenormaliseerde prijs*

$$(4.1c) \quad s_i = r_i / (1 - \sum r_k x_k), \quad i=1, \dots, I.$$

Dit stelsel bevat $3I-1$ onafhankelijke parameters (de som van de β 's is weer gelijk aan één). Het verenigt de eigenschappen van het GLES en het IADS in zich. We kunnen dus verwachten dat het tegemoet komt aan sommige bezwaren die we tegen elk van beide stelsels afzonderlijk kunnen inbrengen.

We kunnen het stelsel (4.1) afleiden door toepassing van de gelijkheid van Roy op de volgende indirecte nutsfunctie:

$$(4.2) \quad v = - \sum (\beta_k / \alpha_k) s_k^{\alpha_k}.$$

Deze functie is additief in de gerenormaliseerde prijzen s_i maar niet in de genormaliseerde prijzen r_i . De duale directe nutsfunctie is alleen voor specifieke waarden van een aantal parameters additief (in de x_i), zoals we dankzij Samuelson (1965) weten.

Het model (4.1) wordt genoemd in Somermeyer en Van Daal (1978), die verwijzen naar een niet gepubliceerd rapport van Van Daal en Somermeyer uit 1977. Het is eerder voorgesteld door F. Carlevaro in 1975.⁵

De prijs- en inkomenselasticiteiten zijn (met $\sigma_i = 1 - \alpha_i$)

$$(4.3) \quad \epsilon_i = (b_i/w_i)(1 + \sigma_i - \sum b_k \sigma_k), \quad i=1, \dots, I,$$

$$(4.4) \quad \epsilon_{ij} = -(b_i/w_i) \left\{ w_j(1 - \sigma_j) + r_j x_j (\sigma_i + \sigma_j - \sum b_k \sigma_k) + \delta_{ij}(1 - \sum r_k x_k) \sigma_i \right\}, \quad i, j=1, \dots, I.$$

Uit (4.3) blijkt dat inferioriteit is toegestaan: zowel b_i als w_i is altijd positief, maar de tweede factor in het rechterlid kan negatief zijn.

We zullen nu laten zien dat bij de mengvorm van het GLES en het IADS de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten onafhankelijk van elkaar gemeten kunnen worden. We roepen daartoe eerst in herinnering de restricties waaraan deze elasticiteiten van het GLES en het IADS bij benadering voldoen.

Bij het GLES is het *quotiënt* van eigen-prijs- en inkomenselasticiteit bij benadering constant (over de goederengroepen):

$$(4.5) \quad \epsilon_{ii}/\epsilon_i = -w_i(1 - \sigma) - \left\{ r_i x_i + (1 - \sum r_k x_k) \right\} \sigma \\ \approx - (1 - \sum r_k x_k) \sigma =: -\sigma^*.$$

Bij het IADS is de *som* van eigen-prijs- en inkomenselasticiteit

⁵ Vernomen van J. van Daal in een telefoongesprek.

bij benadering constant (over de goederengroepen):

$$(4.6) \quad \varepsilon_i + \varepsilon_{ii} = 1 - \sum w_k \sigma_k - w_i (1 - \sigma_i) \\ \approx 1 - \sum w_k \sigma_k =: -(\omega + 1).$$

Bij de mengvorm vinden we voor het quotiënt

$$(4.7) \quad \varepsilon_{ii}/\varepsilon_i = - \left\{ w_i (1 - \sigma_i) + r_i \chi_i (2\sigma_i - \sum b_k \sigma_k) + \right. \\ \left. + (1 - \sum r_k \chi_k) \sigma_i \right\} / (1 + \sigma_i - \sum b_k \sigma_k) \\ \approx - (1 - \sum r_k \chi_k) \sigma_i / (1 + \sigma_i - \sum b_k \sigma_k).$$

Voor de som vinden we

$$(4.8) \quad \varepsilon_i + \varepsilon_{ii} = (b_i/w_i) \left\{ (1 + \sigma_i - \sum b_k \sigma_k) - w_i (1 - \sigma_i) + \right. \\ \left. - r_i \chi_i (2\sigma_i - \sum b_k \sigma_k) - (1 - \sum r_k \chi_k) \sigma_i \right\} \\ \approx (b_i/w_i) \left\{ (1 - \sum b_k \sigma_k) + \sigma_i \sum r_k \chi_k \right\}.$$

In het bijzondere geval $\chi_k = 0$, $k \neq i$, geldt $b_k \approx w_k$ en $b_i \approx w_i - r_i \chi_i$. Substitutie hiervan in het laatste lid van (4.8) geeft, onder verwaarlozing van nog een term,

$$\varepsilon_i + \varepsilon_{ii} \approx \left\{ (w_i - r_i \chi_i) / w_i \right\} (1 - \sum w_k \sigma_k).$$

Zoals uit deze formules blijkt, heft ongelijkheid van de σ_i 's de proportionaliteit tussen de eigen-prijs- en inkomens-elasticiteiten op, en heft ongelijkheid aan nul van de χ_i 's de constantheid van hun som op. De mengvorm van het GLES en het IADS staat ook voor grote I toe dat de eigen-prijs- en inkomens-elasticiteiten onafhankelijk van elkaar worden gemeten, terwijl het GLES en het IADS dat niet doen. Daarom valt de mengvorm verre te verkiezen boven zowel het GLES als het IADS,

zeker als het aantal goederencategorieën niet klein is.

We mogen echter niet uit het oog verliezen dat de mengvorm, met zijn 3I-1 onafhankelijke parameters, nog steeds een betrekkelijk eenvoudig verdeelmodel is. In het bijzonder is het van belang op te merken dat het aantal onafhankelijke parameters *lineair* met het aantal onderscheiden goederencategorieën toeneemt, en het aantal onafhankelijke elasticiteiten *kwadratisch* (zie Paragraaf 2.1). Dus, hoe groter I, des te restrictiever de mengvorm is. Wanneer I "te" groot is voor succesvolle toepassing van het model, zal in de praktijk moeten blijken.

Tot slot van deze paragraaf geven we nog de partiële substitutie-elasticiteiten volgens Allen van het nieuwe model en de maat voor de gemiddelde substitueerbaarheid, σ_{ij}^+ en σ^+ :

$$(4.9) \quad \sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j - \sum b_k \sigma_k) (1 - \sum r_k x_k) (b_i/w_i) (b_j/w_j),$$

$$i, j=1, \dots, I, i \neq j,$$

$$(4.10) \quad \sigma^+ = (\sum b_k \sigma_k) (1 - \sum r_k x_k).$$

Deze uitdrukkingen zijn, net als die van de prijs- en inkomens-elasticiteiten, mengvormen van de overeenkomstige formules bij het GLES en IADS.

5. Besluit

In deze notitie hebben we de aandacht gevestigd op het resultaat van Deaton (1974) dat additiviteit van de directe of indirecte nutsfunctie een bij benadering lineair verband impliceert tussen de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten, als het aantal onderscheiden goederencategorieën niet te klein is. Bij directe additiviteit is er een proportioneel verband, bij indirecte additiviteit is het intercept in het algemeen ongelijk aan nul en de richtingscoëfficiënt altijd gelijk aan minus één. In beide gevallen speelt de gemiddelde substitueerbaarheid een belangrijke

Ondanks het feit dat de veronderstelling van directe additiviteit niet plausibel is bij een indeling in een (middel)groot aantal goederencategorieën, is hij toch vaak gemaakt omdat daarvoor de *a priori* schatting van coëfficiënten makkelijker wordt. Een bekend voorbeeld vinden we in Johansen (1960, Ch.6). Ook op het Centraal Planbureau is de veronderstelling van directe additiviteit voor dit doel gebruikt. Het heeft geen zin om, zoals wel is voorgesteld, hem te vervangen door de veronderstelling van indirecte additiviteit, omdat dan, voor gegeven waarden van de inkomenselasticiteiten, vrijwel dezelfde eigen-prijselasticiteiten resulteren.

Het resultaat van Deaton (1974) betekent dat twee bekende verdeelmodellen, het (G)LES met een additieve directe nutsfunctie en het IADS met een additieve indirecte nutsfunctie, niet toestaan dat de inkomens- en eigen-prijselasticiteiten onafhankelijk van elkaar worden gemeten. In deze notitie hebben we een mengvorm van deze twee stelsels besproken die dat wel toestaat.

Hoewel de mengvorm van GLES en IADS een betrekkelijk eenvoudig verdeelmodel is, is het wel meteen een stuk moeilijker *a priori* schattingen van alle coëfficiënten te maken dan bij het GLES en IADS. Er zal dus geschat moeten worden. Succesvolle schatting van het model eist wel, anders als bij de schatting van het GLES of IADS, dat de relatieve prijzen in de steekproef voldoende variantie vertonen. Een andere eis, die in beginsel los staat van de voorgaande maar er in de praktijk waarschijnlijk op neerkomt, is dat het aantal onderscheiden goederencategorieën niet te klein is (voor kleine I verliest het bezwaar tegen additiviteit zijn kracht). Omdat het aantal onafhankelijke parameters lineair is in I en het aantal onafhankelijke elasticiteiten kwadratisch, mag I ook weer niet te groot zijn. Wat "te klein" en "te groot" is, zal in de praktijk moeten blijken.

We merken nog op dat we, voor gegeven χ 's, eenvoudig *a priori* schattingen kunnen maken van alle β 's, indien we de gegevens op een bepaalde manier schalen. Bekijk eerst het geval dat alle χ 's nul zijn. In het CD-model hebben de β 's dan de interpretatie van budgetaandelen, ongeacht de schaling van

de gegevens. Stel dat we onze meeteenheden zó kiezen dat alle prijzen gelijk zijn aan één in een zeker jaar, het basisjaar; in het CES-model hebben de β 's dan de interpretatie van budgetaandelen in het basisjaar, ongeacht de waarde van σ . Hetzelfde geldt, ongeacht de waarden van de σ 's, voor de β 's in het IADS, als we onze meeteenheden zó kiezen dat alle genormaliseerde prijzen gelijk zijn aan één in het basisjaar. Als niet alle χ 's gelijk zijn aan nul, moeten we in het bovenstaande "budgetaandelen" vervangen door "aandelen van de bovenminimale uitgaven aan elk goed in de totale bovenminimale uitgaven"; bovendien moeten we bij de mengvorm onze meeteenheden zó kiezen dat niet de genormaliseerde prijzen r_i maar de gerenormaliseerde prijzen s_i alle gelijk zijn aan één in het basisjaar.

Vanzelfsprekend zullen de "beste" (volgens een of ander criterium, bv. dat van maximale aannemelijkheid) schattingen van de β 's niet exact gelijk zijn aan de genoemde "waargenomen" (voor gegeven χ 's) aandelen, omdat de residuen in het basisjaar niet gelijk aan nul zullen zijn.

Het bovenstaande suggereert dat elk verdeelmodel met I budgetcategorieën I-1 onafhankelijke parameters nodig heeft alleen al om de modeluitkomsten voor de budgetaandelen qua niveau te laten aansluiten bij de realisaties. Wie de I-1 vrije inkomenselasticiteiten en de I eigen-prijselasticiteiten onafhankelijk van elkaar wil kunnen meten, moet een verdeelmodel gebruiken dat op zijn minst 3I-2 vrije parameters bevat. De mengvorm van het GLES en het IADS bevat in feite 3I-1 vrije parameters. Een interessant onderwerp voor toekomstig onderzoek is de specificatie van verdeelmodellen met een vergelijkbaar aantal parameters die eveneens toestaan dat de prijs- en inkomens-elasticiteiten los van elkaar worden gemeten, en die consistent zijn met de veronderstelling van nutsmaximerend gedrag. Een keuze tussen deze modellen kan dan worden gemaakt op grond van andere eigenschappen, zoals de vorm van de Engelcurven, de mogelijkheid van complementariteit en de eenvoud van schatting.

Literatuur

- Allen, R.G.D. (1938), *Mathematical Analysis for Economists*, Mac Millan, London.
- Anderson, R.W. (1980), "Some Theory of Inverse Demand for Applied Demand Analysis", *European Economic Review* 14, 281-90.
- Brown, A. and A. Deaton (1972), "Surveys in Applied Economics: Models of Consumer Behaviour", *The Economic Journal* 82, 1145-236.
- Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau (1975), "Transcendental Logarithmic Utility Functions", *American Economic Review* 65, 367-83.
- Deaton, A. (1974), "A Reconsideration of the Empirical Implications of Additive Preferences", *The Economic Journal* 84, 338-48.
- Deaton, A. and J. Muellbauer (1980), "An Almost Ideal Demand System", *American Economic Review* 70, 312-26.
- Driel, J. van (1974), "Consumer Expenditure Allocation Models", Report 7405 of the Econometric Institute of Erasmus University Rotterdam.
- Frisch, R. (1954), "Linear Expenditure Functions, an Expository Article", *Econometrica* 22, 505-10.
- Frisch, R. (1959), "A Complete Scheme for Computing all Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors", *Econometrica* 27, 177-96.
- Gamaletsos, T. (1973), "Further Analysis of Cross-Country Comparison of Consumer Expenditure Patterns", *European Economic Review* 4, 1-20.
- Geary, R.C. (1950), "A Note on 'A Constant Utility Index of the Cost of Living'", *Review of Economic Studies* 17, 65-6.

- Houthakker, H.S. (1960), "Additive Preferences", *Econometrica* 28, 244-57.
- Johansen, L. (1960), *A Multi-Sectoral Study of Economic Growth*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Pearce, I.F. (1964), *A Contribution to Demand Analysis*, Oxford University Press, Oxford.
- Pollak, R.A. and T.J. Wales (1969), "Estimation of the Linear Expenditure System", *Econometrica* 37, 611-28.
- Samuelson, P.A. (1965), "Using Full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand", *Econometrica* 33, 781-96.
- Sato, K. (1972), "Additive Utility Functions with Double-Log Consumer Demand Functions", *Journal of Political Economy* 80, 102-24.
- Sommers, W.H. and J. van Daal (1978), "Analytical Utility Functions Underlying Fractional Expenditure Allocation Models", Report 7809/E of the Econometric Institute of Erasmus University Rotterdam.
- Sommers, W.H. and A. Langhout (1972), "Shapes of Engel Curves and Demand Curves: Implications of the Expenditure Allocation Model, Applied to Dutch Data", *European Economic Review* 3, 351-86.
- Stone, J.R.N. (1954), "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand", *The Economic Journal* 64, 511-27.
- Weymark, J.A. (1980), "Duality Results in Demand Theory", *European Economic Review*, 14, 377-95.