

Universiteit van Amsterdam
Interfaculteit van Actuariële
Wetenschappen en Econometrie

A&E Note 7/82

juni 1982

CONTANTEN: WIT, ZWART, ONZICHTBAAR *

J.S.Cramer

INHOUD

samenvatting

inleiding

kassen

betalingen

noten

aangehaalde literatuur

bijlage A: statistische bronnen

bijlage B: een model van contante betalingen

Samenvatting

Met 'zwart geld' bedoelt men vaak contanten. Soms denkt men bij deze term vooral aan het feit dat zwarte transacties om ze beter geheim te houden bij voorkeur in contanten worden afgedaan, soms meent men ook dat juist de vruchten van zwarte praktijken vooral in baar geld worden aangehouden. In beide versies zou men mogen verwachten dat de aanwezigheid c.q. de sterke groei van zwarte transacties in het peil c.q. in de ontwikkeling van de chartale geldhoeveelheid tot uiting komt. Wij doen een onderzoek aan de hand van nederlandse cijfers en komen tot de conclusie dat dit niet het geval is.

* inhoud van een voordracht, gehouden op de Economisch Statistische Dag 1982 te Utrecht.

INLEIDING

1. Deze notitie gaat over de vraag of wij de term "zwart geld" letterlijk moeten nemen, preciezer: of de voor ons land betekende gegevens over de chartale geldomloop aanwijzingen bevatten voor het bestaan van omvangrijke en snel groeiende zwarte kassen en zwarte transacties ¹). Ons antwoord luidt ontkennend.

Zeker, het is nu eenmaal niet of nauwelijks bekend waar de contanten zich bevinden en wat er mee gebeurt, en zoveel onzekerheid laat ook wel ruimte voor voor het bestaan van zwarte kassen of van zwarte transacties. Als een positieve aanwijzing mag dat echter niet worden opgevat. Wie de aanwezigheid van iets zwarts wil aantonen en er de omvang van wil ramen zal van andere cijfers moeten uitgaan.

Wat volgt is aldus een overzicht van een onbekend terrein, een inventarisatie van onwetendheid. Hier en daar zijn verspreide feiten bekend, maar het ontbreekt nog ten enen male aan een theoretisch kader en aan een houdbare interpretatie. Zo nu en dan zullen wij veronderstellingen onderzoeken aan de hand van eenvoudige cijfers en grafieken. Deze primitieve argumenten gaan natuurlijk voorbij aan de mogelijkheid dat er verschillende factoren in het spel zijn die elkaar compenseren of juist versterken. Daarvoor is een model nodig dat wij nog niet kunnen opstellen - zo gering is onze kennis op dit gebied.

Wij behandelen het chartale geld eerst als een rustende kas en daarna als circulerend betaalmiddel. De gegevens zijn voor het grootste deel ontleend aan de uitgebreide documentatie die de Nederlandsche Bank in de loop der jaren heeft opgebouwd en gepubliceerd. Tenzij anders vermeld zijn alle cijfers ontleend aan statistisch materiaal van de Nederlandsche Bank en het Centraal Bureau voor de Statistiek; wij geven een korte verantwoording in bijlage A.

Kassen

2. Tegen het eind van 1980 was er in ons land per hoofd van de bevolking rond f 1.550 aan contanten in omloop, of bijna f 5.000 per gezin; ruim een kwart van dit bedrag bestond uit biljetten van f 1.000, waarvan er 6 miljoen stuks in circulatie waren, of drie stuks per twee gezinnen. Dit is allebei onzinnig veel. Nu is het niet nodig alle chartale geld toe te rekenen aan gezinnen. Ook als wij aannemen dat zeg de helft van het geld zich bij gezinnen bevindt, en de andere helft bij de winkeliers waar zij het besteden, dan komen wij nog uit op bedragen die als gemiddelde onaanvaardbaar hoog zijn ²).

Contanten moeten dus ook in andere sectoren van de samenleving aanwezig zijn, en in 1971 heb ik geprobeerd van hun verdeling aan de hand van een ruim opgezet onderzoek een beeld te verkrijgen. Dit is mislukt: het totaal bedrag waarvan de verblijfplaats kon worden achterhaald bleef, na het vakkundig op-hogen van de steekproefcijfers naar de populatie, ver achter bij de bekende circulatie. Omdat alle gegevens per coupure werden verzameld kon ook worden geconstateerd dat er een systematische vertekening optrad, en dat met name de grote coupures veel te weinig werden aangetroffen. Men vindt de cijfers in tabel 1.

Tabel 1. Resultaten van een onderzoek naar het houderschap van bankbiljetten per 31 maart 1971

coupure	in omloop	waarvan aan- getroffen	%
	(mln. guldens)		
f 10	614	393	64%
f 25	1.200	701	58%
f 100	5.668	1.973	35%
f 1.000	1.965	438	22%
totaal	9.447	3.505	37%

Van de "aangetroffen" bankbiljetten kon de verblijfplaats worden vastgesteld aan de hand van gegevens van i) elf grote geldscheppende instellingen, ii) 267 financiële instellingen, via de Nederlandsche Bank, iii) ruim duizend grote industriële en vervoersbedrijven, via het C.B.S., iv) grootwinkelbedrijven, N.S., P.T.T. en iv) een enquête die ruim 1500 opgaven opleverde van particulieren, bedrijven en instellingen. Voor details zie [6].

Eén van de mogelijke verklaringen van dit verschijnsel is dat contanten in het algemeen en biljetten van f 1.000 in het bijzonder bij voorkeur in grote bedragen worden aangehouden door personen die dat bezit op twijfelachtige wijze hebben verworven en er niet graag voor uitkomen. Dit is op het eerste gezicht plausibel, te meer omdat enkele andere verklaringen kunnen worden weerlegd. Toch zullen wij zien dat er ook feiten zijn die tegen de veronderstelling van omvangrijke zwarte oppottingen in contanten pleiten.

3. Een eerste alternatieve verklaring die wel eens wordt geopperd is dat de cijfers van de chartale geldhoeveelheid, die op de uitgiftecijfers van munten en bankbiljetten berusten, een overschatting zijn omdat er geen rekening wordt gehouden met verlies, vernietiging door brand en andere onttrekkingen aan het maatschappelijk gebruik waarvoor het geld bestemd is. Bij nader inzien kan dit echter geen factor van belang zijn. Alleen geldige bankbiljetten worden tot de geldcirculatie gerekend, en die zijn door een geregelde vernieuwing van de modellen meestal van recente datum; de thans gangbare modellen zijn bijna alle minder dan tien jaar oud, de oudere zijn weliswaar nog geldig maar reeds tot inlevering opgeroepen. De ervaring leert bovendien dat bij buitengebruikstelling en intrekking alleen van de allerkleinste muntjes een merkbaar deel niet opkomt; verschillen in de duur van uitgifte vallen bij deze verschillen tussen coupures geheel in het niet. Tabel 2 geeft enkele cijfers die dit illustreren; hetzelfde verschijnsel werd voor Amerikaanse bankbiljetten geconstateerd door Laurent [21]. Wij concluderen dat er dan wel in betrekkelijk korte tijd 130 bronzen centen per hoofd van de bevolking uit de circulatie zijn verdwenen, maar dat dit gevaar voor de grotere coupures niet dreigt. Voor de totale geldomloop bedraagt het verlies, naar waarde gemeten, op zijn hoogst enkele procenten. Dit is niet interessant.

- zie hier tabel 2 -

4. Er is ook wel een geopperd dat een aanzienlijk deel van chartale geld in het buitenland zou berusten ³). Anders dan b.v. de dollar circuleert onze munt echter niet als betaalmiddel buiten ons land, en ook is het onwaarschijnlijk dat er grote bedragen Nederlands courant in het buitenland zijn opgeslagen, hetzij wit of zwart. Men kan natuurlijk met een koffer vol bankbiljetten naar Zürich reizen en ze daar afgeven ter creditering van een bankrekening onder nummer; maar de bank die de biljetten ontvangt zal ze heus niet in zijn kelders opslaan maar ze per kerende post aan de Nederlandsche Bank aanbieden.

Als men werkelijk meent dat er veel Nederlands geld buitenslands is verplaatst de aandacht zich naar het buitenslands geld dat volgens dezelfde redenering hier zou moeten zijn. Zoals wij in tabel 3 illustreren is Nederland namelijk wat chartaal geld betreft internationaal geen uitschieter, ook al blijven er grote verschillen tussen de landen waarvoor wij geen gereede verklaring hebben.

Tabel 2. Uitvalpercentages van enkele buiten omloop gestelde munten en bankbiljetten

	jaar van eerste uitgifte	muntslag in mil- joenen	uitval- percen- tage
halve cent, brons	1878	145	89.0%
cent, brons	1877	568	52,6%
cent, zink	1941	374	38.6%
2½ cent, brons	1877	95	25.6%
2½ cent, zink	1941	28	14.2%
stuiver, cupro-nickel	1913	56	19.8%
stuiver, zink	1941	51	22.7%
dubbeltje, zilver	1848	318	42.1%
dubbeltje, zink	1941	154	19.3%
kwartje, zilver	1848	135	19.1%
kwartje, zink	1941	76	13.0%
halve gulden, zilver	1921	18	8.7%
gulden, zilver	1922	101	1.2%
rijksdaalder, zilver	1929	30	1.7%
biljet van f 20	1946	> 6.9	< 0.7%
biljet van f 50	1946	> 3.9	< 0.5%

De cijfers over munten zijn aan het licht gekomen bij de algehele vernieuwing van de pasmuntcirculatie in de jaren 1948-1960; zie [22]. De muntslag is het totaal aantal aangemunte en in omloop gebrachte exemplaren. De bankbiljetten van f 20 en f 50 uit 1946 zijn in 1960 uit de circulatie genomen; wij weten niet hoeveel er ooit zijn uitgegeven, wel hoeveel er in de jaren van grootste circulatie van waren en hoeveel er uiteindelijk in 1969 resp. 1970 nog niet waren opgekomen (Jaarverslagen van de Nederlandsche Bank).

Tabel 3. Chartaal geld in omloop in verschillende landen, 1980

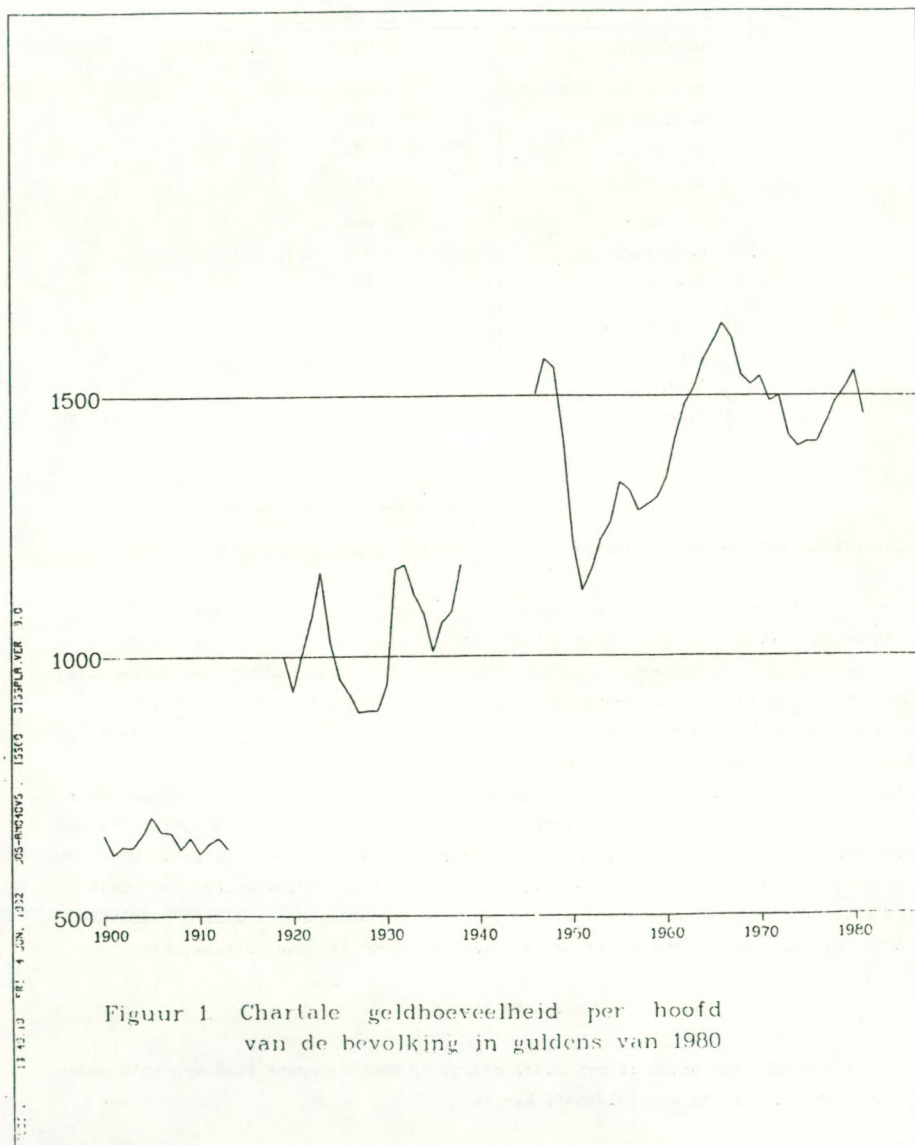
	guldens per hoofd van de bevolking
Nederland	1.550
België en Luxemburg	2.410
Duitsland	1.480
Frankrijk	1.260
Engeland	940
Denemarken	860
Noorwegen	1.890
Zweden	1.970
Oostenrijk	1.470
Zwitserland	4.820
Italië	670
Spanje	850
Verenigde Staten	1.100
Canada	770

Omerekend volgens de rekenkoers (aa) van de SDR; gegevens uit [16].

5. De alternatieven voor de "zwarte" verklaring van de grote hoeveelheid contanten gaan dus niet op, en men kan bovendien ter ondersteuning aanvoeren dat de chartale geldhoeveelheid per hoofd ook na correctie voor de geldontwaarding sedert 1974 behoorlijk is gestegen. Daar staat dan tegenover dat hij in 1981 daalde, zoals hij ook van 1966 tot 1974 deed. Daarvoor steeg hij vijftien jaar lang ... Zo kunnen wij natuurlijk doorgaan. Bezien wij het verloop over een langere periode, zoals in figuur 1, dan kan men (net als bij tabel 3) alleen maar concluderen dat het een interessante reeks is, met heel suggestieve variaties, en dat een eenvoudige verklaring tekort zal schieten; er zijn zeker verschillende factoren in het spel -reële groei, verandering van betalingsgewoonten, rentepeil en inflatie- die samen de afwisselende perioden van stijging en daling bepalen. Maar wij weerstaan de verleiding om de grafiek ad hoc te gaan interpreteren.

- zie hier figuur 1 -

Voor een goede verklaring is een model nodig, en voor de opstelling van zo'n model ontbreekt het ons nog aan voldoende kennis.



Wij beweren dus dat wie de stijging van de chartale geldhoeveelheid van 1974 tot 1980 aan zwart geld toeschrijft óók moet uitleggen hoe het komt dat het peil van 1980 dat van 1946 maar net en dat van 1966 nog niet eens bereikt, en hoe het komt dat de geldhoeveelheid in 1981 weer daalt. Wij hebben noch voor het een, noch voor het ander een verklaring.

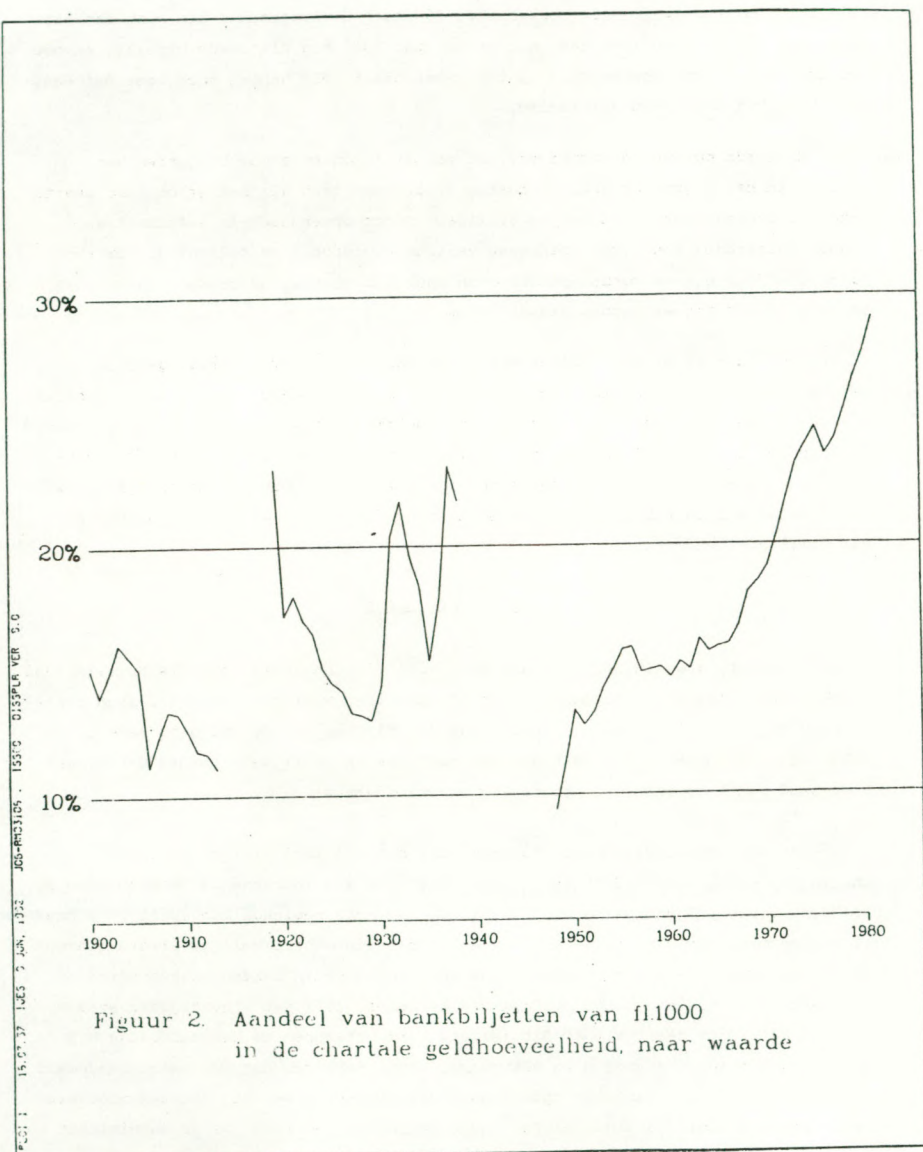
6. Er wordt ook wel gesuggereerd dat van alle contanten de biljetten van f 1.000 in het bijzonder goede diensten zouden bewijzen als het er om gaat zwarte inkomens in even zwart vermogen op te slaan. Dicht opeengepakt in safeloketten kunnen duizendjes heel grote bedragen vertegenwoordigen, en telkens als er een bankkluis door dieven wordt opengebroken doet het verhaal de ronde dat dit is wat zij er hebben aangetroffen.

Inderdaad is er niet alleen veel geld maar ook erg veel groot geld in omloop, en bovendien kan men hier (anders dan bij de totale circulatie) aanvoeren dat de duizendjes sedert 1946 voortdurend toenemen, of wij nu het bedrag per hoofd bekijken of het aandeel van dit biljet in het totaal. Bezien wij echter de ontwikkeling op langere termijn, zoals in figuur 2, dan is opnieuw duidelijk dat wij niet verder zullen komen zonder een model voor de onderlinge verhouding van de verschillende coupures.

- zie hier figuur 2 -

Verderop, als wij het chartale geld niet als thesaurie maar als betaalmiddel beschouwen, zullen wij een partieel model opstellen voor het verband tussen prijspeil en het aantal duizendjes, en het zal dan blijken dat de stijging sedert 1950 niet slechts aan de prijsstijgingen valt toe te schrijven, zonder dat er een toenemend zwart gebruik behoeft te worden verondersteld.

7. Dat het aantal duizendjes toeneemt als het prijspeil stijgt is logisch indien zij als betaalmiddel dienen, maar niet als zij voornamelijk worden opgepot. Bij een sterke prijsstijging of, algemener, een hoog nominaal rentepeil zijn bankbiljetten maar een slechte belegging, en er bestaan aantrekkelijke alternatieven in wit en zwart. De zwarte belegger kan met name gebruik maken van rentedragend toonderpapier, zoals vanouds pandbrieven en sedert 1972 het eigentijdser spaarbewijs. Het lijkt haast wel of dit laatste werd ontworpen om het duizendje bij de belegging van zwart vermogen te vervangen, en daarenboven nog een zwart rendement aan te bieden. In de publieke opinie gaat het tenminste wel bij uitstek voor een zwart activum door, getuige ook de recent getroffen regeling die de anonimiteit bij de verzilvering opheft.



Wat hier van aan zij, van enige feitelijke substitutie van spaarbewijzen voor duizendjes vinden wij in de cijfers geen spoor. In de tien jaar na de introductie groeide het uitstaand bedrag aan spaarbewijzen tot tien miljard, maar voorzover wij dat kunnen nagaan uit figuur 3 is die groei in het geheel niet ten koste van de duizendjes gegaan. Dit pleit tégen het vermoeden dat die duizendjes in zwarte kassen zijn opgeslagen.

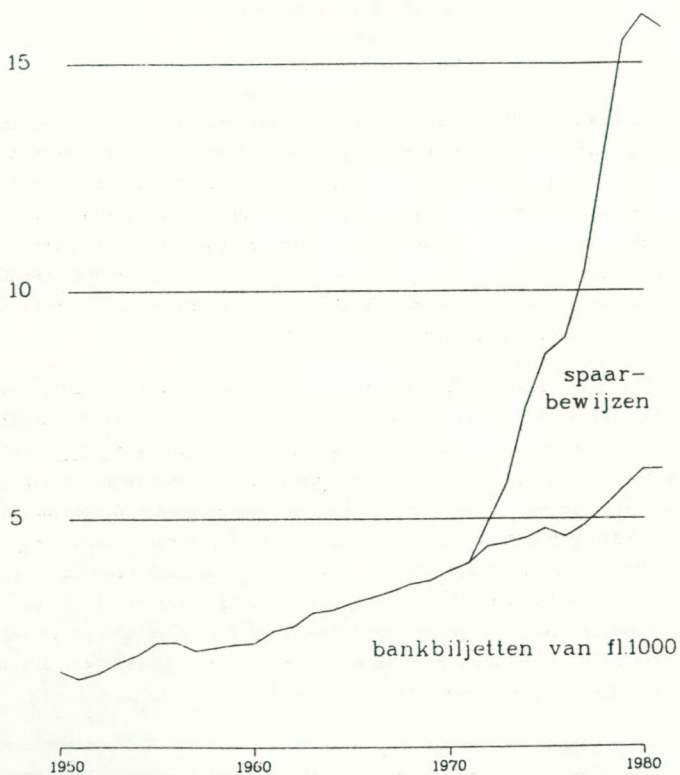
- zie hier figuur 3 -

Betalingen

8. Tot hier toe hielden wij ons bezig met de verdenking dat contanten in het algemeen en duizendjes in het bijzonder als rustende kassen zwart vermogen onderdak bieden. Wij kunnen chartaal geld echter ook als betaalmiddel beschouwen en op zoek gaan naar aanwijzingen voor zwarte betalingen en zwarte transacties. Onze belangstelling gaat dan niet uit naar de voorraadgrootte van het uitstaande geld en zijn verblijfplaats, maar naar de geldstromen van het contante betalingsverkeer. Dit is een even onbekend gebied als de kassen, maar het leent zich wat beter tot (een begin van) modelvorming.

Wij stellen het contante betalingsverkeer voor als een geldstroom die, door huishoudingen voortgestuwd, bij het bankwezen ontspringt en daarheen terugkeert. Er zijn drie soorten huishoudingen in het spel. Disponenten of opnemers halen geld bij de bank om het te besteden; de grootste groep wordt vermoedelijk gevormd door gezinshuishoudingen met een wit inkomen, dat tegenwoordig doorgaans giraal wordt betaald. Aan het andere eind van de keten van betalingen staan deposanten of storters die de contanten welke zij ontvangen naar de bank brengen - grootwinkelbedrijven, vervoerders, benzinestations, altijd voorzover ze in een witte wereld functioneren. Ter voorkoming van diefstal en fraude gelden in dergelijke bedrijven vaak stringente voorschriften voor het frequent (dagelijks) bij de bank afstorten van het ontvangen geld.

De derde categorie vormen de doorgevers-huishoudingen die contanten zowel van anderen (geen bank) ontvangen als aan anderen (geen bank) betalen. Deze moeizame omschrijving gaat ook in de witte wereld op voor bepaalde bedrijfstakken - de handel in chocolaterie en rookwaren, in vee en in gebruikte auto's - en voor financiële intermediairs zoals spaarbanken. Daarnaast zijn bedrijven die aan het zwarte circuit deelnemen doorgevers van contanten.



Figuur 3 Uitstaande bedragen van toonderpapier
in mld gld tegen prijzen van 1980

Een aannemer die zwart loon betaalt kan de vereiste contanten niet van zijn witte bankrekening halen maar moet ze buiten de boeken om van afnemers ontvangen; geheel onschuldige transacties worden aldus in contanten afgerekend om verderop in de keten voor een zwarte transactie te dienen. De zwarte transactie leidt tot het toevoegen van een extra lus aan het traject van bank tot bank dat de contanten doorlopen.

In een stationaire situatie geeft iedere huishouding per tijdseenheid evenveel contanten uit als hij ontvangt, en dat geldt ook voor het bankwezen. Als wij nu groepen huishoudingen definiëren naar hun gedrag ten aanzien van contanten kan het hele betalingsverkeer gekarakteriseerd worden door

- i) de omvang en bestemming van de kasdisposities en ii) de verdeling naar bestemming van de betalingen door iedere groep of sector. Opnieuw ontbreekt iedere empirische kennis van deze processen, en wij kunnen alleen een voorbeeld schematisch uitwerken. Dit is gedaan in bijlage B.

Ook zonder kwantitatieve gegevens kunnen wij een enkele conclusies trekken. De eerste is dat alle contanten die bij het bankwezen worden opgenomen daar uiteindelijk ook weer terugkomen. Het hele contante betalingsverkeer kan dus worden voorgesteld als een reeks lussen die twee bankklokken verbinden, en men kan zijn omvang ramen door de jaarlijkse kasdisposities (of de jaarlijkse stortingen) te vermenigvuldigen met de gemiddelde lengte van de kaslus, uitgedrukt in een aantal betalingen ⁴).

Ten tweede suggereert de gegeven voorstelling van zaken dat iedere zwarte transactie tot een veelvoud aan contante betalingen leidt omdat stroomopwaarts contante betaling voor girale wordt gesubstitueerd. Dat kan leiden tot grotere kasdisposities, maar het voornaamste effect is vermoedelijk een toename van het aantal doorgevers huishoudingen, met als gevolg een verlenging van de gemiddelde lengte van de kaslus van dispositie tot deposito. Helaas kan deze niet rechtstreeks worden waargenomen.

Op dit gebied ontbreken veel gegevens. De kasdisposities en stortingen zijn bijvoorbeeld in ons land voor de girodienst(en) bekend, maar voor de banken niet. Natuurlijk zijn die cijfers in de boeken van de banken terug te vinden, maar zij worden niet verzameld, laat staan gepubliceerd ⁵). Daar staat tegenover dat er dankzij het unieke systeem van de Nederlandsche Bank in ons land vermoedelijk meer over de bankbiljettencirculatie bekend is dan in enig ander land.

Dit stelsel is gericht op een geregelde keuring en registratie van ieder afzonderlijk bankbiljet dat in omloop is gebracht, zulks in het belang van een vlekkeloze bankbiljettencirculatie ⁶). Eigenlijk zou men willen dat alle papiergeld dat de banken ontvangen naar de Nederlandsche Bank wordt opgezonden, en dat er geen geld aan het publiek wordt uitbetaald dat niet van de Bank afkomstig is. De achterkant van de kaslus die het geld binnen het bankwezen van deposito naar dispositie doorloopt zou dan steeds een omweg langs de controlekamers van de Nederlandsche Bank inhouden.

In tabel 4 vermelden wij voor verschillende coupures de frequentie waarmee zij onder dit stelsel uit de circulatie naar de Bank terugkeren. Dit is een onder-schatting van de terugkeurfrequentie naar het bankwezen, want men houdt zich lang niet altijd aan de verlangde procedure om alle biljetten die een bankloket passeren naar de Nederlandsche Bank terug te sturen.

- zie hier tabel 4 -

Zoals men uit deze cijfers ziet bestaan er grote verschillen in de terugkeurfrequentie van de verschillende coupures, maar deze vertonen geen duidelijke samenhang met de waarde. Met name strookt het cijfermateriaal in het geheel niet met de veronderstelling dat grotere coupures langzamer circuleren of vaker (en langer) opgepot worden, zoals men wel uit de langere levensduur van de grote biljetten opmaakt (zie b.v. Anderson [1]). A priori zou men menen dat alle munten en biljetten dezelfde omloopsnelheid hebben en het is onduidelijk in welke zin deze hypothese in het licht van deze cijfers zou moeten worden veranderd. Wij houden dan ook in het vervolg aan deze veronderstelling vast, en schrijven de verschillen in tabel 4 in hoofdzaak toe aan de omstandigheid dat het publiek een bepaald coupurebeleid voert bij zijn disposities en stortingen bij de banken. Net zoals wij allen dagelijks kwartjes gebruiken maar zelden of nooit geld in deze vorm bij de banken opnemen kunnen er bepaalde voorkeuren bestaan bij de storters en, wellicht, ook bij de banken in hun verkeer met de Nederlandsche Bank.

De tweede conclusie is dat de terugkeurfrequenties erg hoog zijn: een biljet komt gemiddeld om de 20 à 30 weken bij de Nederlandsche Bank terug. Bedenkt men dat het biljet een wisselend aantal weken nodig heeft voor het traject van de Bijkantoren naar de sorteerinrichting, en dat de banken lang niet alle biljetten terugzenden, dan moeten de biljetten met een veel kortere tussentijd terugkeren bij het bankwezen ⁷).

Tabel 4. Terugkeerfrequenties van bankbiljetten*
(aantal keer per jaar)

coupure	1976	1977	1978	1979	1980	1981
f 1.000	2.07	2.16	1.94	1.79	1.60	1.55
f 100	2.15	2.14	2.16	2.15	2.14	2.23
f 25	3.14	3.27	3.34	3.38	3.52	3.52
f 10	1.48	1.46	1.40	1.36	1.33	1.32
f 5	1.04	1.07	1.07	1.06	1.03	1.01

* aantal biljetten dat jaarlijks bij de Nederlandsche Bank
wordt ontvangen als veelvoud van het aantal dat uitstaat.
Gegevens van de Nederlandsche Bank.

Dit is zo kort dat wij niet meer geloven dat een aanzienlijk deel van de chartale geldhoeveelheid in oppottingen (hetzij wit of zwart) verblijft. Volgens de vorige conclusie geldt dat óók voor de duizendjes. Alle chartaal geld zal dus moeten worden gezien in zijn functie van betaalmiddel dat van hand tot hand gaat.

Om eventuele zwarte transacties via de geïnduceerde contante betalingen aan het licht te brengen onderzoeken wij nu i) of het gebruik van duizendjes de laatste decennia excessief is toegenomen en ii) of het aandeel van contante betalingen in het totaal betalingsvolume de laatste decennia excessief is toegenomen.

9. Als alle coupures even snel circuleren zegt het aandeel van de duizendjes in de chartale geldhoeveelheid iets over het (waarde-)aandeel van de betalingen waarbij ze worden gebruikt. Men mag aannemen dat het om grote bedragen gaat, die maar zelden contant betaald worden, tenzij zwart- een fatsoenlijk mens betaalt zulke bedragen uit voorzichtigheid per bank of giro.

Hoe groot zijn deze bedragen dan wel? Deze vraag beantwoorden wij aan de hand van een model van het betaalgedrag. Het uitgangspunt is dat er verschillende coupures in omloop worden gebracht opdat uiteenlopende bedragen ieder met een klein aantal munten of biljetten kunnen worden voldaan. Wij nemen nu aan dat het publiek van deze mogelijkheid gebruik maakt, en dat betaler en ontvanger stilzwijgend zó samenwerken dat er bij de betaling van ieder gegeven bedrag met overbetaling en teruggave van wisselgeld (indien van toepassing) tezamen een minimaal aantal biljetten en/of munten gemoeid is. Dit is optimaal betalingsgedrag. Het is natuurlijk een idealisering van de werkelijkheid, zoals wel meer in modellen het geval is; het voordeel is dat wij nu kunnen uitrekenen hoeveel exemplaren van iedere coupure in een gegeven betaling voorkomen. Voor de 1999 bedragen van f 0,05 met f 0,05 opklimmend tot f 100 zijn bijvoorbeeld in het huidige Nederlandse muntstelsel nooit meer dan 7 biljetten of munten nodig⁸). Men zal gemakkelijk inzien dat er bij optimaal betaalgedrag nooit grote coupures voor kleine betalingen worden gebruikt. Kleine munten komen wel voor bij grote betalingen, tenzij de bedragen worden afgerond. Houden wij hier geen rekening mee dan hangt het gebruik van een coupure af van i) het aantal betalingen boven een bepaalde ondergrens en ii) de intensiteit per betaling door de afstand tot de naast hogere coupure. Dit laatste betekent dat een optimale betaling 0 of 1 stuiver bevat, nooit meer, omdat er een dubbeletje bestaat. Uit een (veronderstelde) verdeling van de betalingen naar omvang zou men aldus met enig gereken de verhouding tussen de verschillende coupures moeten kunnen verklaren, maar dit is mij ondanks vele pogingen niet gelukt.

Het duizendje neemt in dit model een aparte plaats in omdat er geen grotere coupure bestaat. Bij optimaal betalingsgedrag wordt het gebruik bij betalingen vanaf f 550. Tot f 1.550 gebruikt men één duizendje bij iedere betaling⁹, van f 1.550 tot f 2.550 één meer, en zo vervolgens. Nemen wij nu aan dat de betalingen in constante prijzen uitgedrukt (zeg in guldens van 1980) naar omvang een verdeling met dichtheidsfunctie $f(x)$ hebben dan geldt derhalve

$$ND = C\{\bar{F}(a/P) + \bar{F}((a+b)/P) + \bar{F}((a+2b)/P) + \dots\}. \quad (1)$$

Hierin is ND het aantal duizendjes, C een schaalconstante, en

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(t)dt. \quad (2)$$

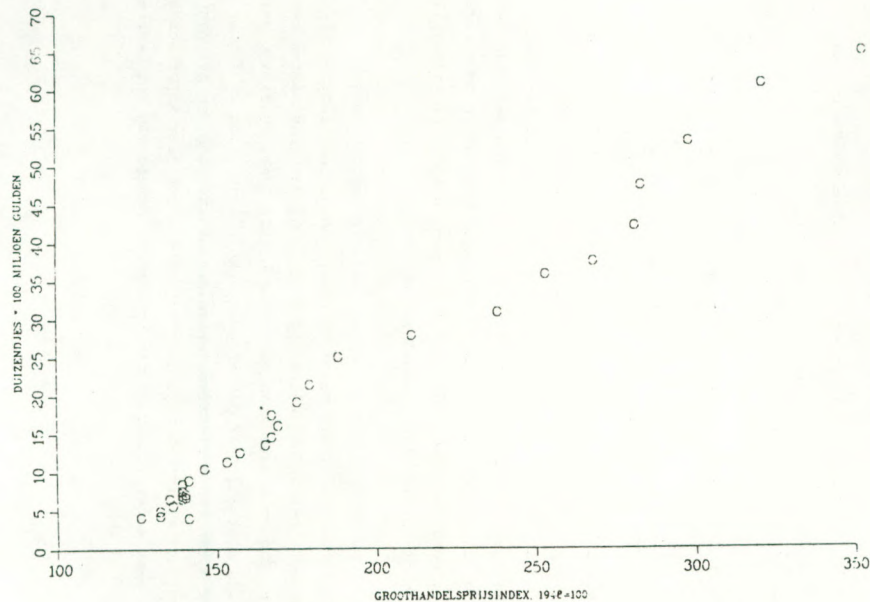
P is een prijsindex die in 1980 1 is, a is 550 en b is 1000. Uit (1) volgt direct

$$\frac{\partial ND}{\partial P} = \frac{C}{P^2} \left\{ a \cdot f(a/P) + (a+b)f\{(a+b)/P\} + \dots \right\}. \quad (3)$$

Dit alles dient om iets te zeggen over de invloed die geldontwaarding ceteris paribus op het aantal duizendjes heeft. Uit (3) volgt dat het aantal duizendjes bij stijging van het prijspeil toeneemt, en verder niets: nadere conclusies hangen af van het gedrag van $f(x)$, met name in de rechter staart van deze verdeling. Zelfs als wij willen aannemen dat betalingen net zo'n scheve verdeling volgen als andere economische grootheden zoals inkomens blijven er verschillende functies over die nu juist in die staart nogal verschillen.

Wel suggereert (1) dat er een relatie bestaat tussen het aantal duizendjes en het prijspeil¹⁰). Wij nemen voor dit laatste de groothandels- of producenten-prijzen omdat het weinig waarschijnlijk lijkt dat consumenten veel duizendjes besteden. Figuur 4 laat zien dat er sedert 1950 een duidelijk verband tussen beide grootheden bestaat, maar dat er geen enkele aanwijzing is dat er zeg sedert de zestiger jaren een excessieve, extra snelle stijging van het aantal duizendjes optreedt; eerder is het tegendeel het geval. Ook hier is er derhalve op het eerste gezicht geen aanwijzing voor een toenemende omvang van het zwarte circuit.

- zie hier figuur 4 -



Figuur 4. Aantal duizendjes per ultimo en groothandels-
prijzen in december 1950-1981

10. Als het duizendje dan al geen uitzonderlijke groei vertoont zou het nog kunnen zijn dat de omvang van de totale contante betalingen aanwijzingen geeft voor een groeiend zwart circuit. Nemen wij aan dat alle coupures even snel circuleren (en dat doen wij) dan maakt het voor de gemiddelde omloopsnelheid en de omvang van het contante betalingsverkeer niet uit hoe de chartale geldhoeveelheid is samengesteld. Het herhaaldelijk vastgestelde feit dat grotere coupures minder slijtage vertonen en langer meegaan moet dan ook worden toegeschreven aan een zorgvuldiger behandeling door het publiek, en niet aan een geringer gebruiksintensiteit en een ruimer gebruik voor oppotting ¹¹). Daarmee vervalt ook de methode van raming van het contante betalingsverkeer die van verschillen in de omloopsnelheid per coupure uitgaat ¹²). Wij moeten dus wel gebruik maken van de hierboven al omschreven methode van Fisher. Dit hebben wij voor drie landen en telkens voor verschillende jaren gedaan, zij het aan de hand van gebrekkige cijfers en willekeurige veronderstellingen, in [7], [8], [9]. De uitkomsten suggereren dat de jaarlijkse omloopsnelheid van contanten praktisch constant is, en tussen de 16 en 18 per jaar ligt-zulks in tegenstelling tot de omloopsnelheid van girale tegoeden, die sterk kan variëren. (Vandaar dat het zo moeilijk is veranderingen in de verhouding tussen chartaal en giraal geld te interpreteren.)

Wij houden ons voor Nederland aan een constante betalingsomloopsnelheid van chartaal geld van 16 per jaar. Dit lijkt erg laag, maar men moet wel bedenken dat het betrekking heeft op netto-betalingen; met de teruggave van wisselgeld, die een veelvoud van het betaalde bedrag kan zijn, is geen rekening gehouden, en ook niet met puur geld wisselen (zonder te betalen), noch met kasverkeer binnen huishoudingen en de transacties bij het halen en brengen van geld bij de bank. De fysieke omloopsnelheid kan dus een veelvoud zijn van de betalingsomloopsnelheid. - Ook bij dit lage cijfer is het contante betalingsverkeer ruim 1.7 maal zo groot als de consumptieve bestedingen (1980), en deze laatste worden zeker voor een deel per bank of giro betaald; dit bevestigt nog eens dat men contanten en het gebruik van contanten niet alleen bij de gezinshuishoudingen moet zoeken.

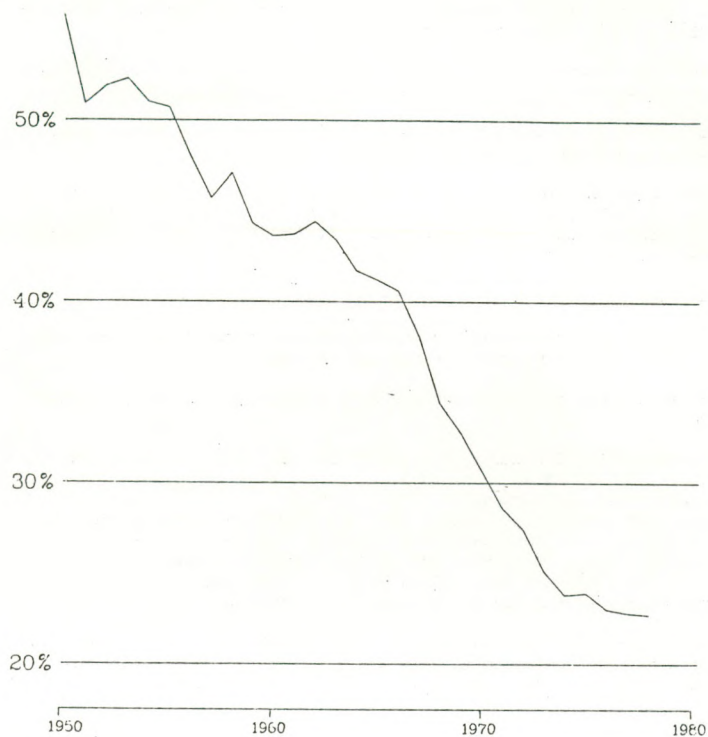
Hoe dit ook zij, voor ons gaat het om de ontwikkeling van de contante betalingen, zestien maal de chartale geldhoeveelheid, als fractie van het totale betalingsverkeer. Veronderstelt men dat dit laatste op zijn beurt evenredig aan het Nationaal Inkomen is (hetgeen overigens geenszins vanzelf spreekt), dan is de gezochte verhouding zelf evenredig met de chartale liquiditeitsquote. Voor de jaren tot 1978 kunnen wij echter ook gebruik maken van de ramingen van de totale betalingen uit [7], al maakt dit niet veel verschil voor het feitelijk verloop.

Deze ramingen komen nauw overeen met de geraamde transacties, die op dezelfde gegevens berusten waar het C.B.S. het Nationaal Inkomen uit berekent, en die dus vermoedelijk in dezelfde mate zwarte componenten bevatten. Een onverklaarbare stijging van de fractie contante betaling kan dus een aanwijzing geven dat er in toenemende mate zwarte transacties over het hoofd worden gezien.

- zie hier figuur 5 -

Figuur 5 laat zien dat het aandeel van contanten in het totale betalingsverkeer sedert 1950 praktisch is gehalveerd. Zo'n daling zou men ook verwachten: banken en girodiensten hebben de afgelopen decennia in broederlijke wedijver hun best gedaan de girale betaling ingang te doen vinden. Wij herinneren aan de invoering van zgn. salarisrekeningen, van gegarandeerde betaalcheques (1967) en postgirobetaalkaarten (1969), en aan de stroomlijning van het bankgirosysteem door de stichting van de Bankgirocentrale. Ook het gebruik van credit cards kan er toe bijdragen dat girale betaling in de plaats treedt van contante betaling, maar de omvang van dit verschijnsel is nog gering.

Het is waar dat aan de sterke daling van het contante aandeel die in 1967 inzet omstreeks 1975 een einde is gekomen, alsof het wachten is op een nieuwe impuls (het nationale betalingscircuit?). Als aanwijzing voor het bestaan van zwarte transacties is een vrijwel constante betalingsquote echter onvoldoende. Men zou dan moeten aanvoeren dat de witte contante betalingscomponent nog steeds afneemt, en dat het verschil dus aan zwart verkeer is toe te schrijven. Dit kan zo zijn, maar overtuigend is de redenering niet.



Figuur 5 Geraamd aandeel contante betalingen
in totaal betalingsverkeer

Noten

- 1) Dit is meer dan eens gesuggereerd. Mr. Drs. H. Langman heeft in oktober 1978 in lezingen voor de Maatschappij voor Nijverheid en Handel betoogd dat de chartale geldhoeveelheid sedert 1973 (veel) minder daalt dan men had mogen verwachten, en daaruit ramingen van zwarte inkomens en zwarte werkgelegenheid afgeleid. Heertje en Cohen vonden onlangs een aanwijzing voor het bestaan van een zwart circuit in het feit dat de chartale geldhoeveelheid in verhouding tot het girale geld na 1977 toeneemt ([14], p.130). Beide uitspraken zijn vermoedelijk ingegeven door het artikel over de Amerikaanse verhoudingen van Gutmann [13].
- 2) Zoals wij zullen zien is het in andere landen en andere tijden niet veel anders, en van tijd tot tijd baart de omvang van de chartale geldhoeveelheid opzien - zie b.v. [23] en [24]. Tot nu toe blijft het echter bij verbazing.
- 3) Zo de Minister van Financiën in antwoord op een kamervraag in 1972. Zie Kamerstuk 3507, Zitting 1971-72 van de Tweede Kamer.
- 4) Deze methode is afkomstig van Irving Fisher [12], en door mij onlangs weer eens toegepast; zie verderop.
- 5) Voor mijn raming van het contante betalingsverkeer in [6] heb ik de disposities bij de banken dan ook moeten schatten. Later is mij gebleken dat de verschillende bankconcerns al naar hun klantenkring heel uiteenlopende verhoudingscijfers tussen tegoeden en disposities hebben.
- 6) Voor meer details zie Koeze [17], [18], en den Butter en Coenen [2].
- 7) Mijn raming van de kasdisposities [6] impliceert dat chartaal geld acht maal per jaar of om de zes weken langs een bank of postkantoor komt.
- 8) Deze en andere gegevens in deze paragraaf dank ik aan een computerprogramma van J. de Ruiter.
- 9) Dit is niet helemaal juist omdat er tussen f 550 en f 600 nog een aantal bedragen is die men even goed of zelfs beter zonder duizendje kan afrekenen. Ook dit herhaalt zich met intervallen van f 1.000. De ondergrens wordt natuurlijk bepaald door de omstandigheid dat er tussen f 1.000 en f 100 niets is. Dit was vroeger anders: van 1930 tot 1943 circuleerden er bankbiljetten van f 500, van 1900 tot in de dertiger jaren biljetten van f 200 en f 300 [10]. Van veel belang zijn deze geen van alle geweest, en men vindt nauwelijks sporen van hun bestaan in het verloop van figuur 3.
- 10) Zo levert het model tenminste nog iets op. Dat het ook anders kan blijkt uit het werk van Klein [16] en Cole [4], die menen dat de gemiddelde nominale waarde van de munten en bankbiljetten in omloop gelijke tred met het prijspeil moet houden.
- 11) De verschillen in levensduur tussen coupures zijn voor ons land geconstateerd in [2], [3] en [22].
- 12) Deze methode is afkomstig van Laurent [19] en gebruikt door Feige [11]. Voor ons land werd hij toegepast door Uyttewael [22].

Aangehaalde literatuur

- [1] Anderson, P.S.: Currency in use and in hoards. New England Economic Review, Federal Reserve Bank of Boston, March 1977, p.21-30.
- [2] Den Butter, F.A.G., and R.L. Coenen: The process of soiling and the life of bank notes in the Netherlands. Verschijnt in Applied Statistics, 1982.
- [3] Coenen, R.L., M. van Nieuwkerk en J.J. van der Weijden: De levensduurverdeling van bankbiljetten in Nederland. De Nederlandsche Bank, rapport, 1979.
- [4] Cole, D.C.: The demand for denominations of U.S. currency, 1914-1965. Unpublished Ph.D. thesis, Ohio State University, 1968.
- [5] Cramer, J.S., en G.M. Reekers: Het houderschap van liquiditeiten in Nederland. N.I.B.E., Amsterdam, 1972.
- [6] Cramer, J.S.: The work money does: the transaction velocity of circulation of money in the Netherlands, 1950-1978. European Economic Review, 15 (1981), p.307-326.
- [7] Cramer, J.S.: The volume of transactions and of payments in the United Kingdom, 1968-1977. Oxford Economic Papers, N.S., 33 (1981), p.234-255.
- [8] Cramer, J.S.: Transactions demand and circulation of money in the United States, 1950-1979. Instituut voor Actuarial en Econometrie, Universiteit van Amsterdam, A&E Note 1981/2.
- [9] Fase, M.M.G., D. van der Hoeven en M. van Nieuwkerk: A numerical planning model for a central bank's bank notes operations. Statistica Neerlandica, 33 (1979), p.7-25.
- [10] Fase, M.M.G., en M. van Nieuwkerk: De bankbiljettenomloop in Nederlands sinds 1900. Kwartaalbericht van de Nederlandsche Bank, 1975, p.12-21.
- [11] Feige, E.L. : How big is the irregular economy? Challenge, november-december 1979.
- [12] Fisher, I.: A new method of estimating the velocity of circulation of money. Journal of the Royal Statistical Society, 2 (1909), p.604-618.
- [13] Gutmann, P.M.: The subterranean economy. Financial Analysts Journal, november 1977, p.26-34.
- [14] Heertje, A., and H. Cohen: Het officieuze circuit. Spectrum, Utrecht, 1980.
- [15] International Monetary Fund: International Monetary Statistics Yearbook 1980.
- [16] Klein, J.: Price-level and money-denomination movements. Journal of Political Economy, 47 (1960), p.369-378.
- [17] Koeze, P.: An accurate statistical estimation of the life-length of f 100 banknotes. International Statistical Review, 47 (1979), p.283-297.
- [18] Koeze, P.: The life-length of banknotes. Verschijnt in Statistica Neerlandica, 1982.
- [19] Laurent, R.D.: Currency transfer by denomination. Unpublished Ph.D. thesis, University of Chicago, 1970.
- [20] Laurent, R.D.: Currency in circulation and the real value of notes. Journal of Money, Credit and Banking, 6, 1974, p.213-226.
- [21] Ministerie van Financiën: Verslag omtrent de toestand van het Nederlandse muntwezen gedurende het jaar 1960.
- [22] Uyttewaal, R.A.I.M.: Maandelijks indexcijfers van de betalingen met Nederlandse bankbiljetten van 1966 tot 1980. Instituut voor Actuarial en Econometrie, Universiteit van Amsterdam, A&E note 1981/1.
- [23] Whitehead, D.: -, Bulletin of the Federal Reserve Bank of Georgia, Atlanta, 1982.
- [24] - : Whatever happened to the cashless society; Morgan Guaranty Survey, February 1972.

Bijlage A. Statistische Bronnen

Chartaal geld. Alle cijfers over de chartale geldhoeveelheid zijn ontleend aan publicaties van de Nederlandsche Bank, hetzij het Kwartaalbericht dan wel de Jaarverslagen van deze instelling. Na 1945 gelden de cijfers per ultimo van het aangegeven jaar, vóór 1945 per 31 maart van het volgend jaar.

De chartale geldhoeveelheid bestaat uit het totaal uitgegeven bedrag aan munten en bankbiljetten, verminderd met de kasvoorraden van het particuliere bankwezen. De samenstelling naar coupure, en met name het aantal biljetten van f 1.000, is echter alleen als ongecorrigeerd bruto uitgiftecijfer bekend. Wij hebben het aantal duizendjes steeds evenredig met de totale chartale geldhoeveelheid voor de kassen van banken gecorrigeerd.

Overzichten over een aantal jaren vindt men in de volgende publicaties:

De geldhoeveelheid in Nederland 1900-1945. Kwartaalbericht, 1974, nr. 3, p.46-57.

De bankbiljettenomloop in Nederland sinds 1900, door M.M.G. Fase en M. van Nieuwkerk, Kwartaalbericht, 1975, nr. 4, p.12.21.

Omvang en samenstelling van de geldomloop sedert 1945, Kwartaalbericht, 1972, nr.1, p.34.

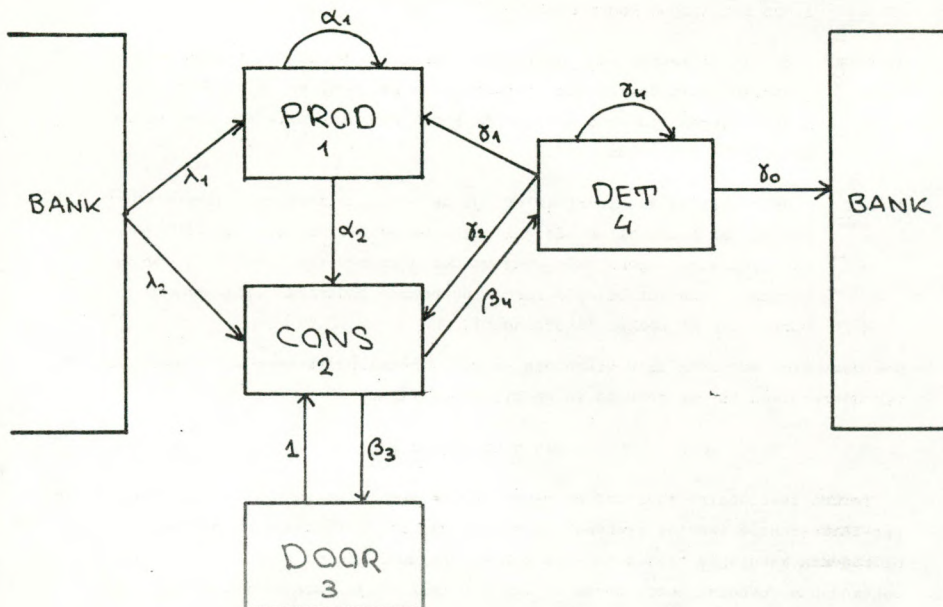
Aan de hand van de Jaarverslagen kan men de reeksen bijwerken tot en met 1981.

Figuur 1. De chartale geldhoeveelheid is voor de ergste veranderingen in de geldwaarde gecorrigeerd met behulp van het Prijsindexcijfer van het levensonderhoud (totaal) uit Tachtig jaren Statistiek in Tijdreeksen van het C.B.S., Staatsuitgeverij, Den Haag, 1981, voortgezet met cijfers uit het Statistisch Bulletin. Dit geeft dan 'guldens van 1980'. Erg precies is het niet, maar dat is geen enkel indexcijfer dat 1900 en 1981 vergelijkbaar moet maken. Bij heel snelle prijsstijgingen kan het wat uitmaken dat de geldhoeveelheid per ultimo (c.q. nog 3 maanden later, vóór 1945) gecorrigeerd wordt met het jaargemiddelde van de prijsindex. - De bevolkingscijfers komen ook uit Tachtig jaren Statistiek en het Statistisch Bulletin.

De oorlogsjaren, die zeer sterke stijgingen van de chartale geldomloop te zien geven, zijn weggelaten. Vooral in de Tweede Wereldoorlog doet zich het probleem voor dat de geldontwaarding wordt onderschat omdat de zwarte prijzen niet of onvoldoende in de prijsindex zijn opgenomen.

Figuur 3. Voor de correctie op het aantal duizendjes zie boven. Het bedrag aan Spaarbewijzen met een looptijd van meer dan twee jaar van de geldscheppende instellingen staat in de Statistische Bijlage van de Jaarverslagen van de Nederlandsche Bank. Het bedrag aan spaarbewijzen met een kortere looptijd is gering.

Figuur 4. Voor de duizendjes zie boven. De prijsindices zijn telkens de decembercijfers van het (Interim) Prijsindexcijfer van de Groothandel (1948=100), later gekoppeld met het Algemeen Indexcijfer van de Producenten- en Invoerprijzen en het Prijsindexcijfer van de Binnenlandse Afzet, altijd met betrekking tot afgewerkte of finale produkten. Deze zijn ontleend aan het Maandschrift van het C.B.S.



Figuur A1: Schematische voorstelling van contante betalingen

Bijlage B. Een model van contante betalingen *).

Wij onderscheiden vier sectoren die aan het contante betalingsverkeer deelnemen, te weten

1. PROD produktiehuishoudingen die niet rechtstreeks aan de consument leveren (althans niet à contant). Men moet hierbij eerder denken aan landbouw, ambacht en zakelijke dienstverlening dan aan grote industriële bedrijven waar weinig contanten omgaan. De sector ontvangt contanten van de bank, door dispositie, en van de detailhandel waar hij aan levert; hij betaalt contanten aan de gezinshuishoudingen als loon of inkomen van de ondernemer. Ook vinden er onderlinge betalingen tussen verschillende bedrijven binnen de sector plaats.
2. CONS gezinshuishoudingen. Zij ontvangen contanten van de bank, door dispositie, van PROD en de detailhandel wegens inkomen, en van DOOR (zie hieronder); zij betalen aan de detailhandel en aan DOOR. Onderlinge betalingen komen niet voor.
3. DOOR dit is de sector van 'doorgevers' zoals de handel in tweedehands goederen, spaarbanken die contanten van het publiek (i.c. de gezinshuishoudingen) ontvangen en ze daar ook weer aan uitkeren e.d. Geen onderlinge betalingen.
4. DET detailhandel en dienstverlening. Deze sector ontvangt alleen contanten van het publiek (de gezinnen) en betaalt ze uit aan PROD en aan zichzelf (wegens geleverde goederen of bewezen diensten), aan de gezinnen (contant betaald loon, ingehouden ondernemersinkomen) en vooral aan de banken (stortingen).

Hoe deze vier sectoren zich verhouden en welke betalingsstromen wij tussen hen veronderstellen is weergegeven in de bijgaande figuur A1.

- zie hier figuur A1 -

In een stationaire toestand ontvangt iedere sector (en ook het bankwezen) per tijdseenheid precies evenveel contanten als hij uitbetaalt. Een bepaald bedrag aan kasdisposities wordt dus a.h.w. onmiddellijk en restloos door de ontvangende sectoren doorgegeven en leidt uiteindelijk (zonder vertraging) tot een even groot bedrag aan stortingen bij de bank.

*) In hetgeen volgt maak ik dankbaar gebruik van de hulp van Drs. C. Elbers.

Het systeem van betalingsstromen is in de figuur nader beschreven door voor iedere sector de verdeling van de uitgaande betalingen naar de sector van bestemming in fracties weer te geven. De som van die fracties is 1, en daarom staat er bij de sector DOOR die maar één bestemming voor zijn contante uitbetalingen heeft bij die stroom een 1. Alle andere coëfficiënten zijn fracties, tussen nul en 1, de letter geeft de betalende sector aan en de index de bestemming. Natuurlijk geldt

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \beta_3 + \beta_4 &= 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

Men kan van deze coëfficiënten gebruik maken om uit te rekenen welk bedrag iedere sector per tijdseenheid ontvangt en betaalt, bij een gegeven bedrag aan disposities (en stortingen). Noem de totale kasdisposities per tijdseenheid E , de uitbetalingen van sector j X_j , dan leidt de veronderstelde gelijkheid van ontvangsten en uitgaven per sector tot een stel gelijkheden, n.l. (zie figuur A1).

$$\left. \begin{aligned} \text{sector 1: } \lambda_1 E - \gamma_1 X_4 &= (1 - \alpha_1) X_1 = \alpha_2 X_1 \\ \text{sector 2: } \lambda_2 E + \alpha_2 X_1 + X_3 + \gamma_2 X_4 &= X_2 \\ \text{sector 3: } \beta_3 X_2 &= X_3 \\ \text{sector 4: } \beta_4 X_2 &= (1 - \gamma_4) X_4 = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) X_4 \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

Dit komt overeen met een lineair stelsel

$$Ax = b$$

met $x = \{X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4\}'$, $b = \{0 \ 0 \ \lambda_1 E \ \lambda_2 E\}$ en

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & -\gamma_1 \\ -\alpha_2 & 1 & -1 & -\gamma_2 \\ 0 & -\beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_4 & 0 & 1 - \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (A3)$$

Wij kunnen hier nu de X_j uit oplossen en vinden dan, onder gebruikmaking van (A.1)

$$X_1 = \frac{\lambda_1 \gamma_0 + \gamma_1}{\alpha_2 \gamma_0} \cdot \mathcal{E}$$

$$X_2 = \frac{1 - \gamma_4}{\beta_4 \gamma_0} \cdot \mathcal{E}$$

$$X_3 = \frac{\beta_3 (1 - \gamma_4)}{\beta_4 \gamma_0} \cdot \mathcal{E}$$

$$X_4 = \frac{1}{\gamma_0} \cdot \mathcal{E}, \text{ waaronder } \mathcal{E} \text{ stortingen bij de bank.}$$

Uiteraard volgt hieruit ook de totale omvang van de betalingen per tijdseenheid, en dus ook de gemiddelde luslengte. Twee eenvoudige getallenvoorbeelden laten zien dat deze laatste vrij gevoelig is voor een toename van de onderlinge contante betalingen van de sectoren.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.15 & \alpha_1 &= 0.15 \\ \beta_3 &= 0.10 \\ \gamma_1 &= 0.10 & \gamma_2 &= 0.05 \\ \gamma_4 &= 0.05 & (\gamma_0 &= 0.80) \\ X_1 &= 0.32 \mathcal{E} & X_2 &= 1.32 \mathcal{E} \\ X_3 &= 0.13 \mathcal{E} & X_4 &= 1.25 \mathcal{E} \\ \text{luslengte} & 2.03 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.2 & \alpha_1 &= 0.15 \\ \beta_3 &= 0.15 \\ \gamma_1 &= 0.10 & \gamma_2 &= 0.10 \\ \gamma_4 &= 0.10 & (\gamma_4 &= 0.70) \\ X_1 &= 0.40 \mathcal{E} & X_2 &= 1.51 \mathcal{E} \\ X_3 &= 0.23 \mathcal{E} & X_4 &= 1.43 \mathcal{E} \\ \text{luslengte} & 2.57 \end{aligned}$$