

Markovtheorie toegepast op een spaarzegelsysteem

J.J.A. Moors*

Bij verschillende detailhandelsketens bestaan spaarzegelsystemen die erop berusten, dat voor een bepaald percentage van het bestede bedrag aan aankopen spaarzegels kunnen worden gekocht. Met bijv. 200 stuks tegelijk kunnen deze zegels worden verzilverd, waarbij tevens een premie wordt geïncasseerd.

Zegels, die om welke reden dan ook niet worden verzilverd, representeren een winstpost voor de uitgever. Dit artikel bespreekt de bepaling van de fractie niet-verzilverde spaarzegels met behulp van een stationair Markov-model.

Trefwoorden: Markovmodel, spaarzegelsysteem, zegelverlies.

* Katholieke Hogeschool Tilburg, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg. De schrijver dankt Jan T.H.C. van Lieshout en Jacques H.J. Roemen voor het kritisch lezen van het manuscript, Roger H.M. van Montfort voor het uitvoeren van de berekeningen en een onbekende referee voor zijn nuttige suggesties.

1. Probleemstelling

Menige keten van detailhandelszaken kent een spaarzegelsysteem ten behoeve van haar klanten. Het principe hiervan werkt als volgt. Heeft men voor een bepaald bedrag inkopen gedaan, dan mag men spaarzegels kopen ter waarde van een zeker percentage (doorgaans 10%) van het aankoopbedrag. Zodra men voldoende zegels bijeen gespaard heeft (bijv. 200 stuks), kunnen zij worden verzilverd, waarbij een premie van bijv. 25% wordt uitgekeerd. Een dergelijk systeem kennen o.a. Albert Heyn en de Spar.

Belangrijke parameters in zo'n systeem zijn o.m. de omlooptijd van de zegels (i.v.m. de rente) en het zegelverlies, d.w.z. de fractie verkochte zegels die nooit wordt verzilverd. Deze laatste grootte is met name ook uit commercieel oogpunt van belang, omdat bijv. verloren gegane zegels winst betekenen voor de uitgever. Dat hierbij forse bedragen in het geding zijn, blijkt uit de totale (nominale) omzet van spaarzegels, welke in Nederland in 1981 zo'n 40 miljoen gulden bedroeg.

Concreet is het probleem het zegelverlies binnen een zeker spaarzegelsysteem te schatten met behulp van de gegevens uit Tabel 1. Hierin is met 'uitgifte' bedoeld het bedrag aan verkochte zegels, met 'inname' het bedrag aan verzilverde zegels (exclusief de uitgekeerde premies) en met 'zegelschuld' het door de klanten nog te vorderen bedrag. In dit laatste bedrag is het zegelverlies dus begrepen. In verband met de geheimhouding zijn de bedragen in Tabel 1 fictief in de zin dat op alle werkelijke bedragen dezelfde lineaire transformatie is toegepast. Voorts omvat de uitgifte in jaar 1 ook de (geringe) uitgifte uit de voorafgaande jaren.

Een wezenlijk kenmerk van dit probleem is de onbeperkte geldigheidsduur van de verkochte zegels. Daardoor kan het zegelverlies in beginsel tot in lengte van jaren nog verandering ondergaan. Ook de omlooptijd van de zegels kan daardoor slechts gedefinieerd worden voor die zegels welke ooit worden verzilverd.

Vermeld dient nog te worden, dat geprobeerd is aanvullende, meer rechtstreekse informatie te krijgen omtrent de omlooptijd via een steekproef uit de verzilverde zegels. Deze poging strandde echter op het feit, dat in de loop der jaren aangebrachte wijzigingen in zegeltype en nummering onvoldoende waren geregistreerd. Wél bleek dat voor de meeste zegels de omlooptijd niet extreem lang was. Van ruim 14 miljoen onderzochte zegels had 0.4% een omlooptijd langer dan 4 jaar en waren er 278 langer dan 12 jaar in omloop.

Tabel 1: Uitgifte- en innamecijfers

Jaar	Uitgifte	Cum. uitgifte	Inname	Cum. inname	(Cum.) zegelschuld
1	10 172	10 172	6 389	6 389	3 783
2	10 400	20 572	9 287	15 676	4 896
3	12 281	32 853	11 414	27 090	5 763
4	13 727	46 580	12 842	39 932	6 648
5	15 695	62 275	14 489	54 421	7 854
6	17 873	80 148	16 334	70 755	9 393
7	18 938	99 086	18 149	88 904	10 182
8	20 219	119 305	19 214	108 118	11 187
9	19 799	139 104	19 334	127 452	11 652
10	20 417	159 521	19 853	147 305	12 216
11	20 546	180 067	20 021	167 326	12 741
12	20 492	200 559	19 757	187 083	13 476
13	20 954	221 513	19 955	207 038	14 475
14	21 740	243 253	20 759	227 797	15 456
Totaal	243 253	-	227 797	-	-

2. Model

Na enige schematisering kan het beschreven probleem worden geformuleerd met behulp van een Markovketen. (Zie voor een algemene behandeling hiervan bijv. Kemeny en Snell (1976) of Narayan Bhat (1972).) Neem daartoe aan, dat elke spaarzegel slechts in m opeenvolgende kalenderjaren kan worden verzilverd: in het jaar van uitgifte en in de $m-1$ daaropvolgende jaren. Dit impliceert

automatisch dat zegels, welke aan het eind van deze m jaren niet verzilverd zijn, deel uitmaken van het zegelverlies.

Omdat slechts gegevens beschikbaar zijn op jaarbasis, wordt in het vervolg alleen gekeken naar de situatie aan het eind van een kalenderjaar. Op een dergelijk tijdstip zijn $m+2$ verschillende toestanden te onderscheiden, waarin een individuele zegel kan verkeren. Worden deze toestanden genummerd van 1 tot en met $m+2$, dan zij als volgt te beschrijven:

- toestand k ($k = 1, 2, \dots, m$): het tijdstip van uitgifte van de zegel is tussen de $k-1$ en de k kalenderjaren geleden en de zegel is nog niet verzilverd;
- toestand $m+1$: de zegel is verzilverd;
- toestand $m+2$: de zegel is verloren gegaan.

De twee laatste zijn absorptietoestanden: een zegel die hierin verkeert, blijft daar ook.

Worden nu voor een zegel de toestanden per ultimo twee opeenvolgende kalenderjaren vergeleken, dan kunnen de volgende overgangen zich hebben voorgedaan:

- overgang van toestand k naar $k+1$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) ('in omloop blijven');
- overgang van k naar $m+1$ ($k = 1, 2, \dots, m$) ('verzilverd worden');
- overgang van m naar $m+2$ ('verloren gaan').

De impliciete veronderstelling is hierbij gemaakt dat zegels alleen in de m^e periode verloren kunnen gaan.

De kans op overgang van toestand i naar toestand j wordt nu aangegeven met p_{ij} . Voor $m=4$ bijvoorbeeld geeft dit de volgende matrix van overgangswaarschijnlijkheden:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 & p_{15} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & p_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & p_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deze kansen zijn nog tijdsafhankelijk, d.w.z. zij kunnen afhangen van het jaar van uitgifte van de zegel. In het vervolg zal echter worden aangenomen dat de p_{ij} constant zijn in de tijd; m.a.w. er wordt uitgegaan van een stationaire Markovketen. In par. 4 wordt op deze aanname teruggekomen.

Zoals gezegd, zijn alleen waarnemingen beschikbaar over de aantallen verzilverde zegels. Daarom is het handig over te gaan tot een herparametrisering, waarbij de voorwaardelijke kansen p_{ij} worden omgezet in onvoorwaardelijke. Definieer p_i als de kans dat een willekeurige zegel in het $(i-1)$ ste kalenderjaar na uitgifte verzilverd wordt (dus p_1 is de kans op verzilvering in het jaar van uitgifte, enz.) en q als de kans dat een zegel verloren gaat. Dan valt te schrijven:

$$(1) \quad \begin{cases} p_i = p_{i,m+1} \prod_{k=1}^{i-1} p_{k,k+1}, & i = 1, 2, \dots, m \\ q = p_{m,m+2} \prod_{k=1}^{m-1} p_{k,k+1}. \end{cases}$$

Intuïtief in te zien (of algebraïsch aan te tonen) valt dat geldt

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m p_i + q = 1.$$

Indien het bedrag aan uitgegeven zegels in jaar t wordt aangegeven met x_t en het bedrag (excl. premie) aan verzilverde zegels met y_t , dan bestaat in beginsel het volgende verband:

$$y_t = \sum_{i=1}^m p_i x_{t-i+1}.$$

(Deze relatie moet gelden over de gehele waarnemingsperiode van n jaar; hier geldt $n = 14$.) In bovenstaande uitdrukking komt het stochastische karakter van y_t nog niet tot uiting; door toevoeging van een storingsterm ϵ_t wordt hieraan tegemoet gekomen. Invoering van de vectornotatie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en idem y en ϵ geeft dan het uiteindelijke model:

$$(3) \quad y = P_m x + \epsilon.$$

Hierin is $P_m = ((q_{ij}))$ de $n \times n$ -matrix met als elementen:

$$q_{ij} = \begin{cases} p_k & \text{voor } i = j+k-1 \text{ (} k = 1, 2, \dots, m \text{)} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Dus, bijvoorbeeld:

$$p_3 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

Uitgaande van de waargenomen vectoren x en y (kolom 2 resp. 4 van Tabel 1), kunnen nu de coëfficiënten $p_1, p_2, \dots, p_m$ geschat worden, waarbij q als zogenaamde 'slack variabele' te beschouwen is. Het meest gebruikelijk is deze schatting uit te voeren met behulp van de kleinste-kwadraten-methode. Daarbij rijst hier echter een complicatie waarop verderop wordt ingegaan. De kleinste-kwadraten-methode komt in dit geval neer op het minimaliseren van de functie S , gedefinieerd door:

$$S := S(p_1, \dots, p_m) := (y - P_m x)' (y - P_m x) .$$

Met de conventie $x_t = 0$ voor $t \leq 0$ valt hiervoor te schrijven:

$$S = \sum_{t=1}^n [y_t - \sum_{j=1}^m p_j x_{t-j+1}]^2 .$$

Het minimum wordt gevonden door alle partiële afgeleiden $\partial S / \partial p_j$ gelijk aan nul te stellen. Dit leidt tot het stelsel vergelijkingen ($i = 1, 2, \dots, m$):

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=1}^n x_{t-i+1} x_{t-j+1} \right) \hat{p}_j = \sum_{t=1}^n y_t x_{t-i+1} ,$$

waarvan de oplossingen $\hat{p}_j$ de gezochte kleinste-kwadraten-schattingen zijn. In matrixvorm luidt deze relatie:

$$(4) \quad A \hat{p} = b ,$$

waarin $\hat{p}$ en b m -vectoren zijn en A een symmetrische $m \times m$ -matrix, waarbij:

$$(5) \quad \begin{cases} b_i := \sum_{t=1}^n y_t x_{t-i+1} & (i = 1, 2, \dots, m) \\ a_{ij} := \sum_{t=1}^n x_{t-i+1} x_{t-j+1} & (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

Dit kan nog iets handiger geschreven worden door invoering van de verschuivingsmatrix $D = ((d_{ij}))$, gedefinieerd door:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = j+1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Voor $k = 1, 2, \dots, m$ geldt nl. voor $D^k = ((d_{ij}^{(k)}))$:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = j+k \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

(Kort gezegd: D^k is een nulmatrix, maar met op de k^e onderdiagonaal allemaal éenen.) De elementen in (5) zijn nu als volgt te schrijven:

$$(6) \quad \begin{cases} b_i = y' D^{i-1} x \\ a_{ij} = (D^{j-1} x)' D^{i-1} x \end{cases}$$

Nadat nu een waarde voor m gekozen is, kunnen de coëfficiënten b_i en a_{ij} worden berekend uit (6) of (5) en kan vergelijking (4) worden opgelost. Een aantrekkelijk aspect hierbij is, dat (4) voor verschillende waarden van m genest is: uit de vergelijking $A\hat{p} = b$ voor een gegeven waarde van m kan de vergelijking voor $m-1$ verkregen worden door de laatste rij en kolom van A te schrappen, alsmede het laatste element van b . Uiteraard vereenvoudigt deze eigenschap het rekenwerk aanzienlijk. Duidelijk is voorts dat een hogere waarde van m de doelfunctie S zal doen afnemen.

Bij de hier toegepaste algemene kleinste-kwadraten-methode rijst in dit geval één complicatie. Deze wordt veroorzaakt door het feit dat de parameterwaarden niet de gehele reële rechte kunnen doorlopen, maar daarentegen aan bepaalde grenzen gebonden. Er is hier dus sprake van een beperkte parameterruimte die wordt vastgelegd door de voorwaarden:

$$(7) \quad \begin{cases} p_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m p_i \leq 1 \end{cases}$$

Het is logisch te eisen, dat ook de geschatte parameterwaarden deze voorwaarden vervullen. Dit leidt tot een kleinste-kwadraten-probleem onder nevenvoorwaarden, dat met behulp van een computer numeriek vrij eenvoudig oplosbaar is.

3. Resultaten

Met de waargenomen vectoren x en y uit Tabel 1 is voor $m = 5$ het vergelijkingenstelsel (4) uitgeschreven:

$$\begin{pmatrix} 444.67 & 414.94 & 385.33 & 353.58 & 319.35 \\ 414.94 & 397.41 & 369.39 & 340.78 & 308.91 \\ 385.33 & 369.39 & 353.50 & 326.45 & 297.73 \\ 353.58 & 340.78 & 326.45 & 311.51 & 284.35 \\ 319.35 & 308.91 & 297.73 & 284.35 & 269.30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420.33 \\ 395.70 \\ 368.28 \\ 338.40 \\ 305.97 \end{pmatrix}$$

De stelsels voor $m = 2, 3$ of 4 volgen hier direkt uit. Tabel 2 toont de verkregen kleinste-kwadraten-schattingen zonder nevenvoorwaarden, alsmede de corresponderende schattingen $\hat{q}$.

Tabel 2: Kleinste-kwadraten-schattingen zonder nevenvoorwaarden

m	2	3	4	5
$\hat{p}_1$	0.628	0.630	0.627	0.625
$\hat{p}_2$	0.340	0.274	0.276	0.275
$\hat{p}_3$		0.069	0.087	0.090
$\hat{p}_4$			-0.018	-0.001
$\hat{p}_5$				-0.019
$\hat{q}$	0.032	0.027	0.028	0.030

Het is duidelijk, dat de schattingen, verkregen bij verschillende waarden van m , slechts weinig uiteenlopen. De fractie zegels die nog verzilverd wordt, neemt dus snel af naarmate de zegels langer in omloop zijn. Bij de hoogste waarde van m komen zelfs negatieve schattingen $\hat{p}_i$ voor - wat theoretisch natuurlijk niet kan. Dit kan worden voorkomen door het kleinste-kwadraten-probleem op te lossen onder de nevenvoorwaarde (7). Dit is uitgevoerd m.b.v. het computerprogramma KPTIL op de I.C.L.-computer van de Katholieke Hoge-

school Tilburg. De uitkomsten waren weinig verrassend: de negatieve waarden die bij $m \geq 4$ voorkomen, worden gelijk aan nul; m.a.w., de schattingen bij $m = 3$ gelden eveneens voor $m > 3$. Als uiteindelijke schatting voor het zegelverlies resulteert dus de waarde 2,7%.

Uitgaande van de geschatte vector $\hat{p}$, kunnen nog de overgangswaarschijnlijkheden worden berekend. Voor $m = 3$ geeft dit de matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.370 & 0 & 0.630 & 0 \\ 0 & 0 & 0.259 & 0.741 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.720 & 0.280 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In de vierde kolom staan hier dus de voorwaardelijke verzilveringskansen voor zegels die een uiteenlopend aantal jaren in omloop zijn.

Tenslotte kan ook de omlooptijd van de zegels worden geschat. Er vanuit gaande dat uitgifte en verzilvering uniform over het jaar verdeeld plaatsvinden, valt de gemiddelde omlooptijd van verzilverde zegels te berekenen op 0.90 jaar.

4. Discussie

Het hier gepresenteerde model is geïnspireerd door de methode die Mustert (1975) ontwikkelde ter beschrijving van de ontwikkeling van de omvangsverdeling van ondernemingen en die door Roemen (1979) nader werd uitgewerkt.

De cruciale veronderstelling betreft hier de stationariteit van het Markovproces, dus de vraag of de verschillende overgangswaarschijnlijkheden constant zijn in de tijd. Omdat de beschouwde periode niet zo lang was (14 jaar), leek dit geen onredelijke aanname. Toch zijn er ook argumenten aan te voeren, die pleiten vóór een geleidelijke verandering van deze overgangswaarschijnlijkheden. De twee belangrijkste hiervan zijn de volgende.

1. Door de voortdurende geldontwaarding vermindert de reële waarde van de spaarzegels; het beslag dat onverzilverde zegels op het huishoudbudget leggen, loopt daardoor relatief terug.
2. Verwacht mag worden, dat in de huidige economische recessie de zegels sneller verzilverd worden.

Op grond van dit tweede argument liggen een afnemende omlooptijd en een verminderd zegelverlies in de lijn der verwachting; het eerste argument wijst juist in een tegengestelde richting. Te verwachten valt daarom

dat beide tendenzen elkaar grotendeels zullen compenseren.

Toch is de veronderstelling van constante overgangswaarschijnlijkheden nader bekeken door de schattingsprocedures te herhalen voor verschillende (kortere) waarnemingsperioden. Tabel 3 geeft hiervan enkele resultaten. De verkregen schattingen blijken bijzonder weinig uiteen te lopen, zelfs in het geval de tijdreeks slechts zes jaren bestrijkt.

Tabel 3: Schattingen voor $m > 3$ bij verschillende lengtes van de waarnemingsperiode

Periode	t/m 14	t/m 12	t/m 10	t/m 8	t/m 6
$\hat{p}_1$	0.630	0.629	0.627	0.626	0.628
$\hat{p}_2$	0.274	0.271	0.271	0.273	0.270
$\hat{p}_3$	0.069	0.075	0.080	0.079	0.076
$\hat{q}$	0.027	0.025	0.022	0.022	0.026

Alle gebruikelijke oplossingsmethoden voor schattingsproblemen onder (lineaire) nevenvoorwaarden hebben als gemeenschappelijk kenmerk dat een schatting die een gegeven grenswaarde zou overschrijden, wordt vervangen door die grenswaarde zelf. Dat geldt ook voor het hier gebruikte computerprogramma: van schattingen $\hat{p}_i$ die negatief zouden uitvallen, worden er één of meer nul gesteld onder invloed van (7). In vele gevallen leidt deze werkwijze echter tot ontoelaatbare schatters en verdient het de voorkeur enigszins van zo'n grenswaarde verwijderd te blijven; zie hiervoor Moors (1981). De numerieke invloed hiervan op de uitkomsten zal vermoedelijk echter zeer gering zijn.

Literatuur

Kemeny, J. en J. Snell (1976), Finite Markov chains, Springer Verlag, New York.

Moors, J.J.A. (1981), Inadmissibility of linearly invariant estimators in truncated parameter spaces. Journal of the American Statistical Association 76, pp. 910-916.

Mustert, G.R.M. (1975), De ontwikkeling van de omvangsverdeling van ondernemingen, Academisch Proefschrift, Tilburg.

Narayan Bhat, U. (1972), Elements of applied stochastic processes, Wiley, New York.

Roemen, J.H.J. (1979), Een schattingsprocedure op basis van macro-data voor de stationaire overgangswaarschijnlijkheden in een Markovmodel ter beschrijving van de ontwikkeling van de omvangsverdeling van de ondernemingen, Reeks "Ter Discussie", no. 79.085.