

## BEGINVOORRAAD EN BESTELNIVEAU VOOR NIEUWE SERVICE-ONDERDELEN

Leonard Fortuin\*

**Samenvatting:** Het succes van nieuwe (elektronische) apparaten hangt onder meer af van de snelheid waarmee eventuele defecten kunnen worden verholpen. Voorraden service-onderdelen op korte afstand van de "Markt" zijn daartoe vaak onmisbaar. Voor service-onderdelen die nog niet eerder gebruikt werden, is het voorspellen van de behoefte een probleem doordat vraagcijfers uit het verleden per definitie ontbreken. Dit artikel beschrijft een manier om beginvoorraad en bestelniveau te bepalen uit het gemiddelde faalt tempo van het nieuwe onderdeel. Het aantal apparaten op de markt neemt daarbij toe met de tijd. Numerieke voorbeelden voor het geval van rechtlijnige groei besluiten het artikel.

## BELANGRIJKSTE SYMBOLEN

|           |                                                            |
|-----------|------------------------------------------------------------|
| A         | beschikbaarheidsgraad                                      |
| B         | bestelniveau                                               |
| L         | leveringstijd                                              |
| M         | beginvoorraad                                              |
| n         | aantal onderdelen-in-bedrijf                               |
| Q         | eindniveau van het aantal onderdelen-in-bedrijf            |
| T         | lengte van de periode waarvoor de beginvoorraad is bedoeld |
| t         | tijd                                                       |
| $\lambda$ | gemiddeld faalt tempo                                      |

## 1. INLEIDING

Eén van de problemen die zich voordoen als een (elektronische) industrie een nieuw apparaat op de markt brengt, betreft de beginvoorraad service-onderdelen. In de meeste gevallen zal het nieuwe apparaat een aantal onderdelen bevatten die nog niet eerder werden gebruikt. Historische verbruikscijfers ontbreken dus per definitie. Toch wenst de service-organisatie — meestal een onderdeel van de commerciële afdeling die het apparaat op de markt brengt — vanaf het begin een aantal van die onderdelen op voorraad te leggen, want het succes van het nieuwe produkt valt of staat met snelle reparatie.

Voor onderdelen die zo goedkoop zijn dat eventueel "verschrotten" van een overschot aan het einde van de levenscyclus economisch verwaarloosbare gevolgen heeft, is het probleem eenvoudig op te lossen door een

\* N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Centre for Quantitative Methods, Gebouw VN-711, Eindhoven.

**Trefwoorden:** voorraadbeheer, service-onderdelen, bedrijfszekerheid, voorspellen, niet-homogeen Poissonproces.

"redelijk aantal" in voorraad te nemen. In de laatste jaren zijn nieuwe service-onderdelen echter steeds vaker onderdelen die enkele honderden guldens of meer kosten. Printplaten en micro-processoren (chips) zijn daarvan voorbeelden. Voor zulke dure onderdelen rijzen twee vragen:

1. Hoe groot moet de beginvoorraad van het beschouwde service-onderdeel zijn?
2. Bij welke voorraadhoogte moet men gaan bijbestellen?

De enige informatie waaruit antwoorden kunnen worden afgeleid, zijn de gegevens die de bedrijfszekerheid van het onderdeel beschrijven. Verondersteld wordt dat we het gemiddelde faalt tempo kennen. Het is een constante  $\lambda$  die we definiëren op jaarbasis:

$\lambda$  = het verwachte aantal keren dat het service-onderdeel per jaar en per apparaat vervangen moet worden.

Gewoonlijk wordt een nieuw apparaat geleidelijk op de markt gebracht. Het aantal apparaten in bedrijf is dan een functie van de tijd. Het vervangingsproces is daardoor een niet-homogeen Poisson-proces. In dit artikel wordt eerst een algemene oplossing beschreven. Vervolgens wordt dit uitgewerkt voor het geval van rechtlijnige toename van het aantal apparaten, waarna enige numerieke voorbeelden het artikel besluiten.

## 2. ANALYSE

We nemen aan dat in het apparaat het beschouwde service-onderdeel slechts één keer voorkomt. Van dat onderdeel hebben we een groot aantal identieke exemplaren beschikbaar.

### 2.1 Eén apparaat

Op het tijdstip  $t=0$  wordt het apparaat in gebruik genomen. Steeds als het service-onderdeel stuk is, wordt het zonder tijdsverlies vervangen door een nieuw onderdeel. De tijd tussen twee opeenvolgende vervangingen,  $\underline{t}$ , wordt verondersteld negatief-exponentieel verdeeld te zijn. De waarschijnlijkheidsdichtheidsfunctie van  $\underline{t}$  is dan te schrijven als

$$f(t) = \rho_0 \exp(-\rho_0 t), \quad (2.1)$$

en het vervangingsproces is een Poisson-proces met intensiteit  $\rho_0$  (COX (1970,25)). Het verband tussen de statistische eigenschappen van  $\underline{t}$  en de parameter  $\lambda$  van het service-onderdeel is erg eenvoudig:

$$\rho_0 = \lambda, \quad (2.2)$$



omdat we maar één apparaat hebben.

## 2.2 Aantal apparaten op de markt: $n(t)$

Het aantal verkochte apparaten is een functie van de tijd,  $n(t)$ . Het service-onderdeel komt één keer voor in elk apparaat. In gebruik zijn dus  $n(t)$  stuks van het beschouwde service-onderdeel. Het is ten behoeve van dit aantal dat we service-onderdelen op voorraad willen leggen en het bestelniveau willen bepalen.

Het vervangingsproces ontstaat door optelling van  $n$  Poisson-processen. COX (1970,73) laat zien dat het resultaat daarvan ook een Poisson-proces is. In ons geval verandert het aantal onderdelen-in-bedrijf met de tijd. Het samengestelde vervangingsproces is daardoor een inhomogeen Poisson-proces met intensiteit

$$\rho(t) = \lambda n(t). \quad (2.3)$$

Voor  $N(t_1, t_2)$ , het aantal vervangingen in het interval  $(t_1, t_2)$ , geldt daarom (ROSS (1970,24)):

$$p_n(t_1, t_2) = P\{N(t_1, t_2) = n\} = \exp[-m(t_1, t_2)] [m(t_1, t_2)]^n / n! \quad (n \geq 0) \quad (2.4)$$

waarbij

$$m(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \rho(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

De stochastische functie  $N$  beschrijft het vraagproces achter de behoefte aan het service-onderdeel. Beginvoorraad en bestelniveau moeten we hieruit afleiden. Gemiddelde en variantie van  $N$  spelen daarbij ook een rol:

$$E\{N(t_1, t_2)\} = \text{Var}\{N(t_1, t_2)\} = m(t_1, t_2). \quad (2.6)$$

## 2.3 Beschikbaarheid van het service-onderdeel

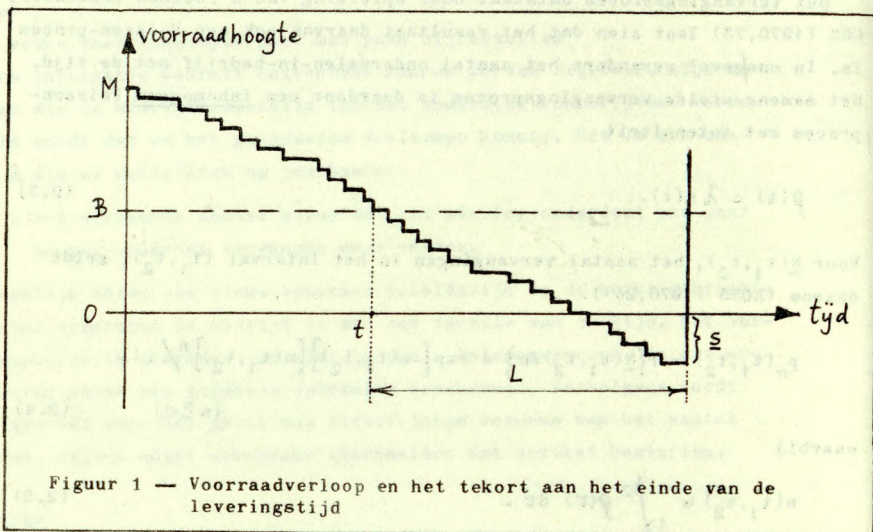
We wensen het bestelniveau  $B$  zo te kiezen dat de beschikbaarheidsgraad, een a priori maat voor de "service" van het voorraadsysteem, boven een bepaalde waarde blijft gedurende de periode waarvoor de beginvoorraad bedoeld is. Deze beschikbaarheidsgraad,  $A(t)$ , wordt op grond van overwegingen uit de praktijk gedefinieerd als

$$A(t) := 1 - [p_s(t) + \sigma_s(t)] / B, \quad (2.7)$$

waarbij  $\mu_s(t)$  en  $\sigma_s(t)$  het gemiddelde en de spreiding zijn van het tekort aan het service-onderdeel dat kan optreden aan het einde van de leveringstijd, juist voordat de bestelde voorraadaanvulling binnenkomt.

#### 2.4 Het tekort aan het einde van de leveringstijd

Op tijdstip  $t$  wordt het B-niveau bereikt. Men plaatst een bestelling die op tijdstip  $t+L$  aankomt. Onze aandacht richt zich nu op  $\underline{s}(t)$ , het mogelijk tekort net voor de bestelde goederen binnenkomen. Zie Figuur 1.



Het tekort bedraagt een geheel aantal stuks;  $\underline{s}$  heeft dus een discrete kansverdeling:

$$f_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \delta(s-n) \quad (2.8)$$

met

$$q_n(t) = P\{\underline{s}(t)=n\}. \quad (2.9)$$

De kansen  $q_n(t)$  kunnen uit het vraagproces worden afgeleid (zie Appendix A):

$$q_0(t) = \sum_{k=0}^B p_k(t, t+L), \quad (2.10)$$

$$q_n(t) = p_{B+n}(t, t+L) \quad \text{als } n > 0. \quad (2.11)$$



## 2.5 Gemiddelde en spreiding van het tekort

Voor de bepaling van  $\mu_s(t)$  en  $\sigma_s^2(t)$  definiëren we eerst een hulpfunctie:

$$S_j(t) := \sum_{k=0}^B k^j p_k(t, t+L) \quad (2.12)$$

met  $j=0,1$  of  $2$ . Hierin kunnen  $\mu_s(t)$  en  $\sigma_s^2(t)$  worden uitgedrukt via de definities:

$$\mu_s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} n q_n(t) \quad (2.13)$$

en

$$\sigma_s^2(t) := \sum_{n=0}^{\infty} [n - \mu_s(t)]^2 q_n(t). \quad (2.14)$$

We vinden (zie Appendix B voor details):

$$\mu_s(t) = m(t, t+L) - S_1(t) - B[1 - S_0(t)] \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(t) = m(t, t+L) + [B - m(t, t+L)]^2 - S_2(t) + 2BS_1(t) + \\ - B^2S_0(t) - \mu_s^2(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

waarbij  $m(t, t+L)$  door (2.5) is gegeven. Voor een gekozen  $B$  kunnen we met (2.7) de waarde van  $A(t)$  bepalen.

## 3. LINEAIRE TOENAME VAN HET AANTAL APPARATEN

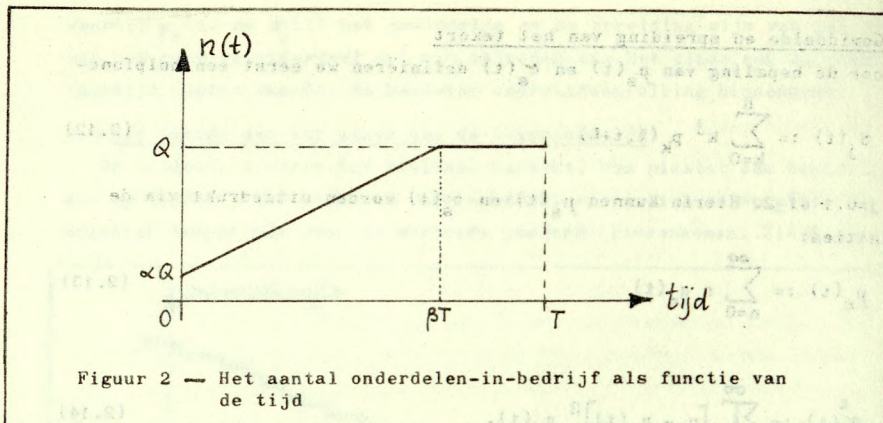
We nemen aan dat in het gedeelte  $\beta$  van de initiële periode  $T$  het aantal apparaten rechtlijnig toeneemt van  $\alpha Q$  tot  $Q$  en daarna constant blijft. De parameters  $\alpha$  en  $\beta$  zijn dimensieloos en voldoen aan

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (3.1)$$

Als het beschouwde service-onderdeel één keer in elk apparaat voorkomt, ziet het aantal onderdelen-in-bedrijf waarvoor  $M$  en  $B$  bepaald moeten worden, eruit zoals geschetst in Figuur 2. Voor  $n(t)$  geldt:

$$\begin{aligned} n(t) &= Q \left\{ \alpha + (1-\alpha)t/\beta T \right\} & \text{als } 0 \leq t \leq \beta T \\ &= Q & \text{als } t > \beta T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uit de analyse is gebleken dat we voor de bepaling van de beschikbaarheidsgraad de functie



$$m(t, t+L) = \lambda \int_t^{t+L} n(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

moeten kennen. Uit (3.2) volgt

$$\left. \begin{aligned} m(t, t+L) &= \lambda QL \left[ \alpha + (1-\alpha)(2t+L)/2\beta T \right] & \text{als } t+L \leq \beta T, \\ &= \lambda Q(\beta T - t) \left[ \alpha + (1-\alpha)(\beta T + t)/2\beta T \right] + \lambda Q(t+L - \beta T) & \text{als } t \leq \beta T < t+L, \\ &= \lambda QL & \text{als } t > \beta T; \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

waarmee uit (2.4) de kans  $p_k(t, t+L)$  is te bepalen. Met de vergelijkingen (2.7), (2.12), (2.15) en (2.16) is tenslotte  $A(t)$  te berekenen.

In de praktijk gaat men soms als volgt te werk. Voor goedkope service-onderdelen neemt men als beginvoorraad de verwachte behoefte over de periode  $T$ :

$$M = m(0, T). \quad (3.5)$$

Dit is dan het "redelijke aantal" in de Inleiding genoemd. Uitwerken voor lineaire groei geeft:

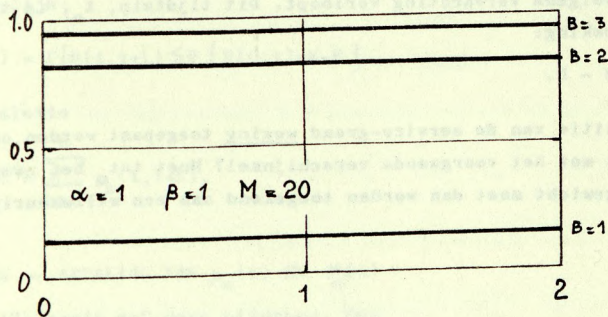
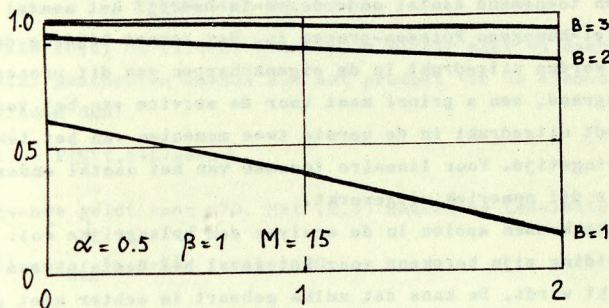
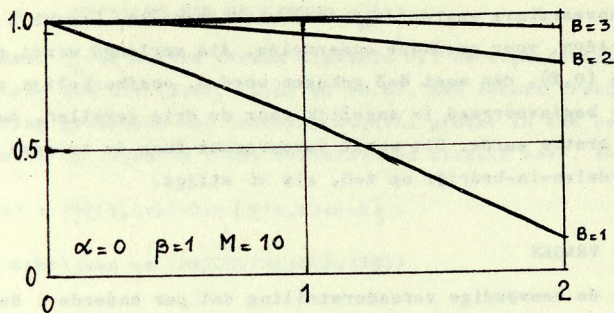
$$M = \lambda QT \left[ 1 - 0.5(1-\alpha)\beta \right]. \quad (3.6)$$

Voor de duurdere onderdelen stelt men zich uiterst voorzichtig op, om overbodige voorraden te vermijden. Men kiest daar, bijvoorbeeld,

$$M = B+1, \quad (3.7)$$

hetgeen betekent dat elke binnengekomen vraag direct wordt omgezet in een bestelling. De grootte  $B$  wordt zo gekozen dat over het hele inter-



BESCHIKBAARHEIDSGRAAD,  $A(t)$ 

 TIJD,  $t$ , IN JAREN

Figuur 3 — De beschikbaarheidsgraad als functie van de tijd  
 ( $T=2$  jaar;  $L=1$  maand;  $\lambda=10^{-4}$  vervangingen/jaar;  
 $Q=10^4$  stuks;  $\alpha=0, 0.5$  en  $1$ ;  $\beta=1$ )

val  $(0, T)$  een aanvaardbare waarde voor  $A(t)$  wordt bereikt. Figuur 3 geeft een paar voorbeelden, voor goedkope onderdelen. Als verlangd wordt dat  $A(t) \geq 0.95$  is in  $(0, T)$ , dan moet  $B=3$  gekozen worden, onafhankelijk van de waarde van  $\alpha$ . De beginvoorraad is ongelijk voor de drie gevallen, en neemt toe als  $\alpha$  groter wordt. Dit wordt veroorzaakt door de toename van het aantal onderdelen-in-bedrijf op  $t=0$ , als  $\alpha$  stijgt.

#### 4. CONCLUSIES EN VRAGEN

Uitgaande van de eenvoudige veronderstelling dat per onderdeel de tijd tussen twee vervangingen negatief-exponentieel verdeeld is, volgt dat voor een groot en toenemend aantal onderdelen-in-bedrijf het aantal vervangingen een niet-homogeen Poisson-proces is. Het tekort tijdens de leveringstijd kan worden uitgedrukt in de eigenschappen van dit proces. De beschikbaarheidsgraad, een a priori maat voor de service van het voorraadsysteem, wordt uitgedrukt in de eerste twee momenten van het tekort tijdens de leveringstijd. Voor lineaire toename van het aantal onderdelen-in-bedrijf is dit numeriek uitgewerkt.

Voorwaardelijke kansen spelen in de analyse een belangrijke rol: gemiddelde en spreiding zijn berekend voor het geval het bestelniveau op tijdstip  $t$  bereikt wordt. De kans dat zulks gebeurt is echter niet gelijk voor elke waarde van  $t$ : het meest waarschijnlijke tijdstip volgt als de voorraadafname volgens verwachting verloopt. Dit tijdstip,  $t_0$ , is te vinden uit de betrekking:

$$m(0, t_0) = M - B. \quad (4.1)$$

Moet in de definitie van de service-graad weging toegepast worden om rekening te houden met het voorgaande verschijnsel? Moet  $t=t_0$  het zwaarste wegen? En welk gewicht moet dan worden toegekend aan een willekeurig tijdstip?

#### 5. LITERATUUR

- D. Cox, Renewal theory (Methuen, London, 1970).
- A. Papoulis, Probability, random variables and stochastic processes (McGraw-Hill, New York, 1965).
- S.M. Ross, Applied probability models with optimization applications (Holden-Day, San Francisco, 1970).



# APPENDIX A — BEPALING VAN DE KANSEN $q_n(t)$

De kansen  $q_n(t)$  moeten worden afgeleid uit de eigenschappen van het vraagproces, dus uit (2.4), (2.5) en (2.6). Een tekort treedt op als de totale vraag gedurende het interval  $(t, t+L)$  groter is dan het bestelniveau, mits op tijdstip  $t$  dat bestelniveau bereikt werd. In formule:

$$q_n(t) = P\{\underline{N}(t, t+L) = B+n \mid \underline{N}(0, t) = M-B\}. \quad (A.1)$$

Hiervoor schrijven we (PAPOULIS(1965, 179))

$$q_n(t) = \frac{P\{\underline{N}(t, t+L) = B+n, \underline{N}(0, t) = M-B\}}{P\{\underline{N}(0, t) = M-B\}}. \quad (A.2)$$

De intervals  $(0, t)$  en  $(t, t+L)$  overlappen elkaar niet en daarom mag de teller in (A.2) geschreven worden als het produkt van de afzonderlijke kansen. We vinden dus:

$$q_n(t) = P\{\underline{N}(t, t+L) = B+n\}. \quad (A.3)$$

Het voorgaande geldt voor  $n > 0$ . Met (2.4) kunnen we tenslotte schrijven:

$$q_n(t) = p_{B+n}(t, t+L) \quad \text{als } n > 0. \quad (A.4)$$

Voor de bepaling van  $q_0(t)$  is het vertrekpunt iets anders, maar de uitwerking gelijk:

$$q_0(t) = P\{\underline{N}(t, t+L) \leq B \mid \underline{N}(0, t) = M-B\}, \quad (A.5)$$

zodat tenslotte

$$q_0(t) = \sum_{k=0}^B p_k(t, t+L). \quad (A.6)$$

# APPENDIX B — BEPALING VAN $\mu_s(t)$ EN $\sigma_s^2(t)$

In (2.13) geeft  $n=0$  geen bijdrage. Dus

$$\mu_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n q_n(t). \quad (B.1)$$

Met (2.11) wordt dit

$$\mu_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{B+n}(t, t+L). \quad (B.2)$$

Stel nu  $k = B+n$ . Dan krijgen we

$$\mu_s(t) = \sum_{k=B+1}^{\infty} k p_k(t, t+L) - B \sum_{k=B+1}^{\infty} p_k(t, t+L). \quad (B.3)$$

Als de ondergrens  $k=0$  was in plaats van  $k=B+1$ , dan gaf de eerste som als uitkomst het gemiddelde van alle mogelijke waarden die de vraag kan aannemen, dus  $m(t, t+L)$ , terwijl de tweede term in (B.3) de waarde  $B$  zou opleveren. We kunnen daarom schrijven:

$$\mu_s(t) = m(t, t+L) - \sum_{k=0}^B k p_k(t, t+L) - B \left[ 1 - \sum_{k=0}^B p_k(t, t+L) \right]. \quad (B.4)$$

Met de hulpfunctie  $S_j(t)$ , gedefinieerd door (2.12), wordt dit:

$$\mu_s(t) = m(t, t+L) - S_1(t) - B[1 - S_0(t)]. \quad (B.5)$$

\*

Vergelijking (2.14) is gelijkwaardig met

$$\sigma_s^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n(t) - \mu_s^2(t). \quad (B.6)$$

We stellen weer  $k=B+n$  en vinden:

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(t) = & \sum_{k=B+1}^{\infty} k^2 p_k(t, t+L) - 2B \sum_{k=B+1}^{\infty} k p_k(t, t+L) + \\ & + B^2 \sum_{k=B+1}^{\infty} p_k(t, t+L) - \mu_s^2(t). \end{aligned} \quad (B.7)$$

Vervangen we  $k=B$  in de eerste term door  $k=0$ , dan krijgen we:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(t, t+L) = m(t, t+L) + m^2(t, t+L), \quad (B.8)$$

zodat (B.7) tenslotte geschreven kan worden als

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(t) = & m(t, t+L) + [B - m(t, t+L)]^2 - S_2(t) + 2B S_1(t) + \\ & - B^2 S_0(t) - \mu_s^2(t). \end{aligned} \quad (B.9)$$