



INVESTEREN EN WEDDEN MET KELLY

In zijn boek *A Mathematician Plays the Stock Market*, Basic Books, 2003, voert John Allen Paulos het volgende denkbeeldige scenario ten tonele. Een investeerder krijgt de gelegenheid om 52 weken lang elke maandagochtend geld te beleggen in een aandeel van een dotcom-bedrijf en het aandeel dan de vrijdagmiddag daarop te verkopen, waarna aan het begin van de week daarop weer een nieuw aandeel in een andere dotcom-bedrijf gekocht kan worden. Voor elke week geldt dat de prijs van het aangeschafte aandeel in die week 80% stijgt met kans 1/2 en 60% daalt met kans 1/2 onafhankelijk van het verloop van de markt in voorgaande weken. Dit betekent dat gemiddeld genomen de stijging van de waarde van het aangeschafte aandeel gelijk is aan $0,8 \times 0,5 - 0,5 \times 0,6 = 0,1$, ofwel een gemiddeld rendement van 10% per week. De investeerder, die een beginkapitaal van 10 duizend dollar heeft voor de investeringen in de komende 52 weken, aarzelt geen moment en besluit aan het begin van elke week zijn totale kapitaal in aandelen van een dotcom-bedrijf te steken. Na 52 weken blijkt dat de investeerder minder dan 2 dollar over heeft van zijn oorspronkelijke kapitaal van 10 duizend dollar. De investeerder staat perplex. Het beleg-

gingsresultaat is echter niet zo verrassend wanneer je beseft dat werken met gemiddeldes heel gevaarlijk kan zijn in situaties met onzekere factoren. In een meer dan gemiddeld 25 cm diep is, kun je nog steeds verdrinken.

In situaties met onzekere factoren moet je niet werken met gemiddeldes maar met kansen! Door te werken met kansen is het simpel in te zien dat met grote kans het beginkapitaal van 10 duizend dollar bijna helemaal verdampt als je elke keer je totale kapitaal investeert. Het meest waarschijnlijke pad dat zich in 52 weken zal ontwikkelen is een pad waarin het aandeel de helft van de tijd in waarde stijgt en de helft van de tijd in waarde daalt. In zo'n pad is het kapitaal na 52 weken gelijk aan $1,8^{26} \times 0,4^{26} \times \$ 10.000 = \$ 1,95$. Simuleren we 100 duizend keer de investeringen over de 52 weken, dan vinden we dat het eindkapitaal niet meer dan \$ 1,95 zal zijn met een kans van ongeveer 50%, terwijl de kans om met meer dan het beginkapitaal 10 duizend dollar te eindigen een schamele 5,8% is.

Misleid door de zonnig ogende gemiddeldes, belegde de investeerder elke keer zijn totale kapitaal. Blijkbaar was de hij niet op de hoogte van de Kelly-strategie. Deze

strategie investeert niet je gehele kapitaal, maar investeert elke keer eenzelfde vaste fractie van je beschikbare kapitaal. In bovenstaande situatie zou de Kelly-strategie voorgeschreven hebben om elke keer een fractie 5/24 van je beschikbare kapitaal te investeren. Bij deze strategie was de kans praktisch gesproken nul geweest om met minder dan \$ 1,95 te eindigen na 52 weken. De investeerder had dan na 52 weken met een kans van ongeveer 70% meer dan 10 duizend dollar gehad en met een kans van 44% meer dan 20 duizend dollar. De getalwaarde $f^* = 5/24$ volgt door in de beroemde Kelly-formule

$$f^* = \frac{pr_1 + (1-p)r_2 - 1}{(r_1 - 1)(1 - r_2)}$$

de waarden $p = 0,5$, $r_1 = 1,8$ en $r_2 = 0,4$ te nemen. Deze formule heeft betrekking op de volgende algemene situatie. Stel je kunt herhaald weddenschappen afsluiten op een spel dat 'gunstig' voor je is, waarbij gunstig betekent dat de verwachtingswaarde van je winst per spel positief is. Voor elke dollar die je bij een uitvoering van het spel inzet, krijg je r_1 dollar terug met kans p en r_2 dollar met kans $1 - p$, waarbij $0 < p < 1$, $r_1 > 1$ en $0 \leq r_2 < 1$. De aanname is dat $pr_1 + (1 - p)r_2 > 1$, dat wil zeggen, het spel is gunstig voor je op de lange duur. Je begint met een gegeven kapitaal en aangenomen wordt dat je elke keer elk bedrag kan inzetten tot het maximum van je huidige kapitaal. Wil je de groeivoet van je kapitaal op de lange duur maximaliseren, dan vertelt de Kelly-formule je dat je elke keer dezelfde vaste fractie f^* van je beschikbare kapitaal moet inzetten. Voor het speciale geval dat $r_2 = 0$ wordt de Kelly-fractie gegeven door $f^* = (pr_1 - 1) / (r_1 - 1)$ en kan dan geïnterpreteerd worden als het quotiënt van de verwachte netto winst per ingezette dollar en de zogeheten odds van de uitbetaling.

De inzet onder de Kelly-strategie kan in bepaalde gevallen erg groot zijn waardoor het verloop van de hoogte van je kapitaal heel grote schommelingen kan vertonen, wat bij de meeste mensen niet bevorderlijk is voor de nachtrust. Bijvoorbeeld als $p = 0,95$, $r_1 = 2$ en $r_2 = 0$, dan wordt elke keer 90% van je kapitaal ingezet onder de Kelly-strategie en bij een verlies duikt je kapitaal dus dan met 90%. Vandaar dat in de praktijk veelal een fractionele Kelly-strategie wordt gebruikt. Onder zo'n strategie zet je elke keer een fractie $f = cf^*$ van je kapitaal in, waar-

bij c een getal tussen 0 en 1 is. Empirisch is gevonden dat onder de fractionele Kelly-strategie het lange-termijn rendement bij benadering met een factor $1 - c(2 - c)$ afneemt in vergelijking tot de Kelly-strategie. Een fractionele Kelly strategie $f = cf^*$ is minder risicovol en dit wordt tot uitdrukking gebracht door de benaderingsformule $(1 - b^{2/c-1}) / (1 - (b/a)^{2/c-1})$ voor de kans dat je kapitaal eerder boven de waarde aW_0 stijgt dan onder de waarde bW_0 daalt voor waarden van a en b met $0 < b < 1 < a$, waarbij W_0 je beginkapitaal is. Bijvoorbeeld, door elke keer de halve Kelly-fractie in te zetten in plaats van de volle Kelly fractie, geef je een kwart van je maximale lange-termijn rendement op maar vergroot je de kans van 0,67 tot 0,89 om tot een verdubbeling van je beginkapitaal te geraken zonder dat het eerst een keer gehalveerd is. Bij een fractionele Kelly-strategie met de in de praktijk veel gebruikte waarde $c = 0,3$ is de reductie van je maximale lange-termijn rendement ongeveer 49% en is de kans ongeveer 98% om tot een verdubbeling van je beginkapitaal te geraken zonder dat het eerst een keer gehalveerd is.

De Kelly-strategie werd voor het eerst gebruikt door de wiskundige Edward Thorp in casino's waar hij zijn winnende blackjacksysteem uitprobeerde. Later paste Thorp en met hem beroemde beleggers waaronder Warren Buffett, de Kelly-strategie succesvol toe op de aandelenmarkt. Tegenwoordig wordt een gegeneraliseerde versie van de Kelly-strategie veelvuldig gebruikt bij weddenschappen op sportevenementen zoals paardenrennen en voetbalwedstrijden waarin op hetzelfde evenement meerdere weddenschappen tegelijk kunnen worden afgesloten. De huidige toepassingen van het nu zogeheten Kelly systeem had John Kelly Jr. niet in gedachten toen hij in 1956 zijn beroemde formule ontwikkelde op het onderzoekslaboratorium Bell Labs. Zoals maar weer eens blijkt, fundamenteel onderzoek leidt vaak tot onvoorziene toepassingen.

HENK TIJMS is emeritus hoogleraar Operations Research aan de Vrije Universiteit en auteur van diverse leerboeken over operations research en kansrekening. Deze column is een verkorte Nederlandse versie van hoofdstuk 16 uit zijn net verschenen boek *Surprises in Probability; Seventeen Short Stories*, Chapman & Hall, 2018. E-mail: h.c.tijms@xs4all.nl