

De regel van Cardano

In het Italië van de zestiende eeuw leefde één van de kleurrijkste geleerden uit de geschiedenis, Girolamo Cardano. Nu is hij bijna vergeten, alleen de zogeheten cardanische ophanging die naar hem is vernoemd maar niet door hem is uitgevonden, herinnert nog aan hem.

STEVEN TIJMS

Girolamo Cardano (1501–1576) was tijdens zijn leven een internationale beroemdheid. De erudiete geleerde las als een bezetene en schreef als een bezetene. Naast geleerde verhandelingen over onderwerpen uit de wiskunde, filosofie en natuurwetenschap schreef hij boeken over de meest uiteenlopende onderwerpen, van een boek over de interpretatie van dromen tot een lofzang op keizer Nero. Van al zijn werken heeft alleen zijn kleurrijke en zeer persoonlijke autobiografie *Over mijn leven* de eeuwen getrotseerd. Het is een klassieker geworden in het literaire genre van de autobiografie. In zijn autobiografie valt te lezen dat de geleerde een verwoed gokker was. Hij schreef er zelfs een boekje over, getiteld *Over kansspelen*, het eerste in zijn soort. In dit boekje introduceert hij een principe om verwachte winst en verwacht verlies gelijkelijk over de spelers te verdelen, de regel van Cardano. Deze regel is feitelijk een voorloper van de beroemde kansformule van Laplace.

Cardano's jonge jaren

Cardano was zijn leven lang een vechter. Als baby overleeft hij niet alleen een abortus, maar ook de pestepidemie van zijn geboortjaar. Minder fortuinlijk zijn de drie broers die hij heeft. Ze bezwijken allen aan de Zwarte Dood. Zijn vader is bevriend met Leonardo da Vinci, die in de jonge jaren van Cardano regelmatig over de vloer komt. Samen met vader Cardano bespreekt Leonardo dan de wiskun-

dige problemen die hem bezighouden. Vader Cardano is dan wel jurist, maar geeft eigenlijk meer om wiskunde en astrologie. Girolamo is amper twaalf wanneer zijn vader hem de eerste zes boeken van Euclides' *Elementen* laat bestuderen. Op zijn negentiende verlaat Girolamo het ouderlijk huis om medicijnen en filosofie te gaan studeren aan de universiteit in Pavia. Wiskunde is dan nog geen aparte, volwaardige studie zoals nu. Met het geven van bijlessen wiskunde aan medestudenten verdient hij er wat geld bij. Dan al maakt Cardano naam. Hij blinkt uit in universitaire debatten over de meest uiteenlopende vraagstukken. En in feestvieren!

Cardano en de Stotteraar

Eenmaal afgestudeerd leidt hij als arts aanvankelijk een armoedig bestaan. Samen met zijn briljante jonggestorven leerling Ludovico Ferrari (1522–1565) schrijft hij de *Ars Magna* (letterlijk vertaald 'De grote kunst'), een boek dat nog enige bekendheid geniet onder historici omdat het een overzicht biedt van de complete en meest recente kennis op het terrein van de algebra in zijn tijd. Het zou een kleine eeuw lang hét standaardwerk zijn. Het levert hem onder wiskundigen de eerste internationale erkenning op.

Het brengt hem ook de woede en haat van de Italiaanse wiskundige Niccolò Tartaglia (1499–1557), bijgenaamd De Stotteraar. Tartaglia had Cardano de door hem ge-



Girolamo Cardano. Gravure van Clemens Ammon, 1652



vonden methode om derdegraads vergelijkingen op te lossen onder geheimhouding in de vorm van een cryptisch gedicht toevertrouwd. Cardano had de formules van Tartaglia toch in zijn boek gepubliceerd.

Tartaglia was woest en beschuldigde Cardano ervan de methode onder zijn eigen naam te hebben gepubliceerd. Dat was niet zo. Bovendien wist Cardano dat niet Tartaglia de eerste was die dit soort vergelijkingen wist op te lossen maar Scipione del Ferro (1465–1526), die er echter niets over had gepubliceerd. Desondanks ontspint er zich een lange en venijnige correspondentie tussen Tartaglia enerzijds en Cardano en Ferrari anderzijds, waarbij de wiskundigen elkaar aftroeven in sarcasme. Uiteindelijk culmineert de briefwisseling in een openbaar debat tussen Tartaglia en Cardano's leerling Ferrari. Ferrari is overduidelijk de meerdere van Tartaglia, die voortijdig de zaal verlaat. Tartaglia zou zijn leven lang volhouden dat niet 'het schepsel van Cardano' zoals hij Ferrari consequent noemt, maar hij de strijd heeft gewonnen. De rancune van De Stotteraar zou Cardano tientallen jaren achtervolgen. Het zou niet de enige keer zijn dat Cardano slachtoffer werd van de afgunst van collega's.

Op de toppen van zijn roem

Na de publicatie van nog enkele andere boeken groeit Cardano's bekendheid buiten de grenzen van Italië. Maar zijn carrière bereikt pas echt een duizelingwekkend hoogtepunt wanneer hij onverwachts het verzoek uit Schotland ontvangt om de aartsbisschop van St. Andrews, een belangrijk en machtig man, van zijn ernstige vorm van astma te genezen. Cardano reist naar Schotland en schrijft de geestelijke een regiem van rust, reinheid en regelmaat voor. En inderdaad, na jaren van astmatische aanvallen geneest de aartsbisschop! Het nieuws gaat als een lopend vuurtje langs de hoven van Europa. Verscheidene vorsten waaronder de koning van Frankrijk en keizer Karel V willen hem inlijven als hofarts, maar Cardano weigert. Hij wil geen partij kiezen tussen de machtige rivalen en heeft bovendien zijn persoonlijke vrijheid lief.

Donkere tijden

Cardano is nu overal een beroemdheid geworden en eenmaal thuis wordt de deur van zijn praktijk platgelopen door gefortuneerde en hooggeplaatste patiënten. Maar

ook de tegenslagen van de fortuin worden hem niet bespaard. Zijn ene zoon zwerft stelend en dobbelend door Italië – hij besteelt zelfs zijn eigen vader – en zijn andere zoon wordt berecht en onthoofd omdat hij in een vlaag van woede zijn vrouw heeft vergiftigd nadat zij op het kraambed had bekend dat hij van geen van zijn kinderen de vader was. Het zijn donkere tijden voor Cardano, maar het zou nog erger worden. Cardano wordt door de inquisitie gearresteerd en gevangen gezet. De redenen zijn nooit helemaal opgehelderd. Deels zal het zijn religieuze vrijzinnigheid zijn geweest, deels zal het de paus misnoegd hebben dat Cardano in het verleden de hoscroop van Jezus Christus had gepubliceerd. Door een goed woordje van twee bevriende kardinalen ontloopt hij de brandstapel en wordt hij na 77 loodzware dagen van gevangenschap op borgtocht vrijgelaten. In ruil voor de genade van de paus verplicht hij zich zijn leven lang niets meer te publiceren. Hij vestigt zich in Rome, in de nabijheid van zijn beschermheren. De inwoners van de stad zien de excentriek geklede en oud geworden geleerde dagelijks moeizaam door de straten en over de bruggen van Rome voortschuifelen. Thuis voltooit hij aan zijn schrijftafel nog juist voordat hij sterft, zijn autobiografie.

Een handboek voor gokkers

Cardano was een verwoed gokker. In perioden dat hij krap bij kas zat, of wanneer hij zijn verdriet wilde verdrijven, stortte hij zich met volle overgave op het gokken. Dag in, dag uit. Jarenlang. En Cardano zou Cardano niet zijn als hij niet ook over het gokken had geschreven. In het Latijn omdat het de internationale voertaal was waarin bijna alle geleerde en wetenschappelijke literatuur werd geschreven. Zo kon er ook buiten de eigen landsgrenzen kennis van worden genomen. Het boekje is geen wiskundige verhandeling. Het is eerder een geleerd handboek over gokken, het eerste in zijn soort. Lange tijd heeft het niet de waardering gekregen die het verdient. Dat heeft zowel te maken met Cardano's snelle manier van schrijven – fouten liet hij vaak staan te midden van latere correcties – als met het schijnbare gebrek aan enige interne logica in het boek. Men vond het maar een warboel van notities waarin geen enkele lijn viel te ontdekken. Maar die lijn is er wel degelijk.

Kritiek op het gokken

Er was door de eeuwen heen nogal wat kritiek op het gok-

ken. In de eerste plaats van de zijde van de kerk, maar ook de antieke Griekse filosoof Aristoteles (384–323 v.Chr.) veroordeelde al het gokken in zijn boek over het ware geluk, de *Ethica Nicomachea*. De filosoof noemt gokkers in één adem met dieven en rovers. De gokker is hebzuchtig en slechts uit op schaamteloos winstbejag. Cardano pareert in een apart hoofdstuk de kritiek van Aristoteles. Dat is misschien verbazingwekkend. De Griekse filosoof was immers al zo'n tweeduizend jaar eerder gestorven. Maar Aristoteles was niet zomaar een criticus. Aristoteles was in de traditionele filosofie die aan de universiteiten werd onderwezen verreweg de best bekende filosoof uit de Oudheid en gold als gezaghebbend. Zijn *Ethica Nicomachea* was in de tijd van Cardano een veel gelezen boek en Cardano was één van de meest belezen geleerden van zijn tijd.

Fair play

In de ogen van Cardano, zelf immers een fervent gokker, bestond er wel degelijk een eerlijke vorm van gokken. Namelijk wanneer er volkomen gelijkwaardigheid bestaat tussen beide spelers. 'Gelijkwaardigheid,' schrijft hij, 'is het allerbelangrijkste beginsel van het gokspel.' Het is de rode draad in zijn boek. Cardano schetst een aanschouwelijk beeld van hoe het er tijdens het gokken in de praktijk aan toeging. Partijdige toeschouwers die zich luidruchtig met het gokken bemoeien, meningsverschillen die ont-aarden in slaande ruzies, list en bedrog, onevenwichtige dobbelborden en valse dobbelstenen. In al deze gevallen – de keuze van je tegenspeler, de toeschouwers, de omstandigheden van de locatie, het geld waarom gespeeld wordt, de dobbel tafel en ook de dobbelsteen zelf – zou gelijkwaardigheid moeten heersen.

Maar Cardano gaat nog een stap verder. Niet alleen de omstandigheden moeten voor elk van beide spelers gelijk zijn, gelijkwaardigheid moet ook een eigenschap van het spel zelf zijn! Dat wil zeggen dat geen van beide spelers in het voordeel mag zijn. Alleen, hoe bereik je deze gelijkwaardigheid in het dobbelspel? Als Cardano daar eenmaal een antwoord op had gevonden, kon hij de kritiek van Aristoteles pareren dat gokken niets anders is dan oneerlijk winstbejag. Het antwoord vindt hij verrassenderwijs bij Aristoteles zelf, in dezelfde *Ethica Nicomachea*.

Gelijkwaardigheid volgens Aristoteles

Het vijfde deel van de *Ethica Nicomachea*, een klassieke

tekst in de filosofie van het recht, gaat over rechtvaardigheid. Rechtvaardigheid tussen mensen, schrijft de filosoof, is gebaseerd op gelijkwaardigheid. Niet toevalligerwijs precies het criterium van Cardano voor een eerlijk spel. Volgens Aristoteles kan je op twee manieren gelijkwaardigheid bereiken. Beide manieren geven een eerlijke verdeling. Allereerst is er een gelijkwaardigheid die in verhouding staat tot de verdiensten van mensen. Als iemand bijvoorbeeld twee keer zoveel werk heeft geleverd als een ander, dan heeft hij ook recht op een twee keer zo grote beloning. Dus als er 30 muntstukken te verdelen zijn, krijgt de één er 20 en de ander 10. Deze eerlijke verdeling zou je 'proportionele gelijkwaardigheid' kunnen noemen.

De tweede vorm van gelijkwaardigheid geldt als mensen gelijke rechten hebben. Stel dat twee personen recht hebben op hetzelfde bedrag aan geld, maar dat de één onterecht winst heeft gemaakt ten koste van de ander. Dan tel je, schrijft de filosoof, eerst de bedragen van beiden bij elkaar op en daarvan neem je het midden, d.w.z. de helft van het totaal. Stel ze hebben samen 30 muntstukken, de één 20, de ander 10. Om gelijkwaardigheid te verkrijgen krijgt de benadeelde nu dus 5 muntstukken en verliest de ander hetzelfde bedrag zodat beiden op het 'midden', 15 muntstukken uitkomen. Deze vorm van een eerlijke verdeling zou je 'evenwichtige gelijkwaardigheid' kunnen noemen. Cardano zelf noemt het de methode van het midden.

Cardano's methode van het midden

Cardano zegt het niet met zoveel woorden, maar een eerlijk spel is duidelijk een spel waarbij geen van beide spelers in het voordeel is. Dat is het geval wanneer de verwachte winst en het verwachte verlies evenwichtig tussen beide spelers zijn verdeeld. Het lijkt op het eerste gezicht dus logisch om van een *evenwichtige verdeling* uit te gaan. En dat is inderdaad ook de strategie die Cardano aanvankelijk kiest. Een simpel voorbeeld kan Cardano's methode van het midden illustreren.

Stel je speelt met zijn tweeën een spel met één dobbelsteen. Het is een zuivere dobbelsteen zodat de zes mogelijke uitkomsten allemaal even goed mogelijk zijn. Stel je gokt op de uitkomst zes en je zet elk van beiden eenzelfde bedrag in. Dan heb je bij één worp maar één mogelijke uitkomst die winst geeft. Namelijk een zes. Gooi je nu drie keer dan heb je drie keer de mogelijkheid





om een zes te gooien. En dat is precies het berekende midden van het aantal mogelijke uitkomsten. Dus als je een weddenschap afsluit om in drie worpen ten minste één keer zes te gooien, zo redeneert Cardano in het voetspoor van Aristoteles, is de verwachte winst en het verwachte verlies voor beide spelers gelijk verdeeld. Alleen, klopt de methode van het midden wel? Nee!

De fout van Cardano

Om makkelijker in te zien wat er scheelt aan Cardano's methode van het midden, vertalen we zijn redenering in kansen. Cardano kende het begrip kans nog niet. Daarom moeten we hem de fout die hij maakt ook niet te sterk aanrekenen. Als je nog niets van kansrekening weet, dan is je eerste ingeving misschien ook wel om de kansen evenredig met het aantal worpen op te tellen. In één worp heb je een kans van 1 op 6 ofwel $1/6$ om zes te gooien. Als je nog een keer gooit heb je weer een kans van $1/6$ om zes te gooien. Wat is er dan logischer dan te denken dat voor de kans om in twee worpen een zes te gooien je alleen maar de twee gevonden kansen hoeft op te tellen? En voor de kans om in drie worpen een zes te gooien daar nogmaals $1/6$ bij op te tellen? Je komt dan op een kans van $3/6$ ofwel $1/2$. Precies het midden dat Cardano zoekt. Alleen, het is fout. Je kunt kansen of, zoals Cardano deed, mogelijke uitkomsten niet zomaar evenredig aan het aantal worpen optellen. Dat leidt tot vreemde resultaten. Stel dat je zes keer zou werpen, dan zou de kans om een zes te gooien zes keer $1/6$ zijn ofwel 1 (100%). Je zou er dan zeker van zijn dat je in zes worpen een zes gooit. Maar iedereen weet wel dat je best zes keer kan gooien zonder dat er ook maar één keer een zes valt. Bovendien, wat voor zes geldt, geldt ook voor de andere mogelijke uitkomsten van de dobbelsteen. Het zou dus als je zo redeneert zeker zijn dat in zes worpen elke uitkomst één keer voorkomt. De conclusie kan alleen maar luiden dat kansen niet evenredig aan het aantal worpen toenemen, ook al leek dat intuïtief zo logisch.

Halverwege hoofdstuk veertien van zijn boek heeft Cardano echter een moment van inzicht. De kansen om een zes te gooien in drie worpen zijn helemaal niet fifty-fifty verdeeld! Want als je driemaal met een dobbelsteen gooit, dan zijn er in totaal 216 verschillende mogelijke uitkomsten. Alle zes de mogelijke uitkomsten van de eerste worp kun je combineren met elk van de

zes mogelijke uitkomsten van de tweede worp. En de 36 mogelijke combinaties die je zo krijgt vallen op hun beurt weer te combineren met elk van de zes mogelijke uitkomsten van de derde worp. Ofwel bij drie worpen zijn er 216 verschillende mogelijke uitkomsten. Maar als je goed telt en rekent, zijn er onder deze 216 mogelijke uitkomsten niet 108 (de helft) maar slechts 91 mogelijke uitkomsten waarbij je ten minste één zes gooit. Er zijn namelijk 75 mogelijke uitkomsten met precies één zes. De zes kan immers elk van de 3 worpen verschijnen, terwijl er voor elk van de overgebleven twee worpen dan 5 mogelijke uitkomsten overblijven. Verder zijn er 15 mogelijke uitkomsten met twee zessen. Want er zijn drie manieren waarop je in drie worpen twee zessen kan gooien, terwijl er voor de resterende worp dan nog 5 mogelijke uitkomsten overblijven. En tenslotte kan je op één manier drie zessen gooien. Als je deze aantallen bij elkaar optelt, kom je dus aan 91 mogelijke uitkomsten waarbij je tenminste één keer zes gooit. En dus zijn er $216 - 91 = 125$ mogelijke uitkomsten waarbij je géén zes gooit. Ofwel de gunstige en ongunstige uitkomsten verhouden zich helemaal niet fifty-fifty maar als 91 staat tot 125 (Cardano gebruikt het Latijnse woord *proportio* dat 'verhouding' betekent; in het Engels zou je zeggen *the odds*). De methode van het midden kan dus niet goed zijn.

Cardano's regel

Hoe nu verder? Cardano zoekt zijn toevlucht tot Aristoteles' andere vorm van een eerlijke verdeling: proportionele gelijkwaardigheid. De geleerde gokker legt het in zijn boek uit. Eerst stel je vast hoeveel uitkomsten er in totaal mogelijk zijn. Vervolgens hoeveel daarvan gunstig voor jou zijn. Dit laatste aantal vergelijk je met het aantal mogelijke uitkomsten dat overblijft, ofwel de ongunstige uitkomsten. Die krijg je vanzelfsprekend door het aantal gunstige uitkomsten af te trekken van het totaal aantal mogelijke uitkomsten. Cardano's regel is nu dat elk van beide spelers overeenkomstig de zo gevonden verhouding een bedrag moet inzetten. Anders gezegd, de hoogte van de geldelijke bijdragen van beide spelers moet in dezelfde verhouding staan als de *odds*. Dan zijn het verwachte verlies en de verwachte winst voor elk van de twee spelers gelijk en kan het spel eerlijk worden genoemd. Een simpel voorbeeld kan dit illustreren.

Stel je gokt dat je in twee worpen tenminste één keer een zes gooit. Wat is dan het aantal mogelijke uitkomsten waarbij je wint? Je kunt op verschillende manieren

tenminste één zes in twee worpen gooien: 1 6, 6 1, 6 6, 6 3, enzovoort. Als je deze bij elkaar optelt, zal je zien dat er 11 verschillende mogelijkheden zijn waarbij je wint. Het totaal aantal mogelijke uitkomsten bij twee worpen is 36 (6×6). Je vindt het aantal ongunstige uitkomsten door het gevonden aantal gunstige uitkomsten af te trekken van het totale aantal mogelijke uitkomsten. In ons geval is het aantal ongunstige uitkomsten dus gelijk aan $36 - 11$, dat is 25 (of zoals we nog makkelijker hadden kunnen berekenen: 5×5). Het aantal gunstige mogelijke uitkomsten verhoudt zich dus tot het aantal ongunstige mogelijke uitkomsten als 11 staat tot 25. Dat wil zeggen dat je verwacht gemiddeld in 11 van de 36 gevallen te winnen en in 25 van de 36 gevallen te verliezen.

Cardano's regel zegt nu dat je de gezochte gelijkwaardigheid bereikt als de ingezette bedragen zich net zo verhouden als deze *odds*. Dat is het geval wanneer jij om 11 muntstukken wedt dat je ten minste één zes gooit en je tegenstander om 25 muntstukken van niet. Aangezien je gemiddeld 11 van de 36 keer wint, is jouw verwachte winst in 36 worpen gelijk aan 11×25 muntstukken = 275 muntstukken. En aangezien je gemiddeld 25 keer van de 36 verliest, is de verwachte winst van je opponent gelijk aan 25×11 muntstukken, ofwel ook 275 muntstukken. Verwachte winst en verlies zijn zo precies in evenwicht en dus is er sprake van een eerlijk spel.

Een eerlijke manier van gokken

Je zou Cardano's boekje kunnen lezen als een fictief debat waarin hij de handschoen opneemt tegen Aristoteles. Cardano is dan de terechte winnaar. Hij heeft de grote filosoof met zijn eigen wapens verslagen. Hij heeft laten zien dat er een eerlijke vorm van gokken bestaat. Als je je maar aan zijn regel houdt, dan zijn de verwachte winst en het verwachte verlies voor beide spelers aan elkaar gelijk. Niet alle gokkers vallen dus over één kam te scheren met dieven en rovers.

Cardano presenteert zijn vondst als een nieuw inzicht. In een tijd waarin niemand nog over kansen sprak, was deze verdeling van de inzetten overeenkomstig de berekende *odds* heel wat minder vanzelfsprekend dan nu. Cardano wil, zo schrijft hij, zijn ontdekking niet geheim houden. Wat natuurlijk een steek onder water is aan Niccolò Tartaglia. Veel mensen die Aristoteles niet begrijpen, gaan de fout in – namelijk doordat ze zich met oneerlijke weddenschappen inlaten – en verliezen op die manier veel geld. En daar wil hij naïeve gokkers voor behoeden.

Een klassieke kansformule



Cardano's regel is een algemene regel. Gokkers die de odds kennen, kunnen nu eerlijke weddenschappen aangaan. Of, als ze minder goede bedoelingen hebben, van deze kennis profiteren. Cardano is de eerste die verder kijkt dan individuele gokspelen. Belangrijker nog, hij had alle ingrediënten in handen om een algemene formule voor kansen te formuleren! Als hij het aantal gunstige mogelijke uitkomsten had gedeeld door het totaal aantal mogelijke uitkomsten, had hij een formule voor de kans op winst gehad. In ons voorafgaande voorbeeld om ten minste één keer zes te gooien met twee dobbelstenen, is die kans dus $11/36$ ofwel een kans van ongeveer 30,6%. Deze bekende kansformule vind je terug bij diverse latere wiskundigen. De klassieke verwoording is afkomstig van het wiskundige genie Pierre-Simon Laplace (1749–1827). De formule heet daarom ook wel de kansregel van Laplace. Laplace noemt de formule het eerste beginsel van de kansrekening en schrijft dat de kans op een gebeurtenis (bijvoorbeeld een zes gooien in drie worpen) gelijk is aan het aantal gunstige mogelijke uitkomsten gedeeld door het totaal van alle mogelijke uitkomsten. Op voorwaarde natuurlijk dat alle mogelijke uitkomsten dezelfde waarschijnlijkheid bezitten om plaats te vinden. De uitdrukkingen 'gunstige uitkomst' en 'ongunstige uitkomst' zijn in de kansrekening standaardtermen geworden, al gaat het tegenwoordig al lang niet meer alleen om dobbelspele en weddenschappen aan de goktafel.

De vraag is waarom Cardano, als hij daar zo dicht bij was, niet rekende met kansen in plaats van met wat de Engelsen de *odds* noemen. Met kansen kun je namelijk een stuk eenvoudiger rekenen. Bovendien zijn ze veel makkelijker onderling te vergelijken. Maar Cardano's boek was niet voor wiskundigen bedoeld, maar voor gokkers. En gokkers gaan weddenschappen aan. En dan zijn *odds* heel inzichtelijk en een makkelijke manier om je bijdrage aan de pot te berekenen. Waarom zou je dan nog eens de gevonden *odds* delen door het totaal aantal mogelijke uitkomsten? Het is nog steeds gebruikelijk om bij weddenschappen van de *odds* uit te gaan, denk maar aan paardenraces. Anders gezegd, *odds* zijn zo'n slechte keuze nog niet.

STEVEN TIJMS heeft Wiskunde en Klassieke Talen gestudeerd. Dit artikel is een bewerkte versie van een hoofdstuk uit zijn boek *Toeval is altijd logisch* dat in 2018 bij VU University Press verschenen is. E-mail: stijms@gmail.com