STAtOR

periodiek van de VvS+OR jaargang 18, nummer 3, oktober 2017

STAtOR
Jaargang 18, nummer 3, oktober 2017

STAtOR is een uitgave van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research (VvS+OR). *STAtOR* wil leden, bedrijven en overige geïnteresseerden op de hoogte houden van ontwikkelingen en nieuws over toepassingen van statistiek en operationele research. Verschijnt 4 keer per jaar.

Redactie
Joaquim Gromicho (hoofdredacteur), Annelieke Baller, Ana Isabel Barros, Joep Burger, Kristiaan Glorie, Caroline Jagtenberg, Guus Luijben (eindredacteur), Richard Starmans, Gerrit Stemerdink (eindredacteur) en Vanessa Torres van Grinsven. Vaste medewerkers: Johan van Leeuwaarden, Gerard Sierksma en Henk Tijms.

Kopij en reacties richten aan
Prof. dr. J.A.S. Gromicho (hoofdredacteur), Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde, afdeling Econometrie, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, telefoon 020-5986010, mobiel 06-55886747, <j.a.dossantos.gromicho@vu.nl>.

Bestuur van de VvS+OR
Voorzitter: prof. dr. Fred van Eeuwijk <president@vvs-or.nl>
Secretaris: dr. Laurence Frank <bestuur@vvs-or.nl>
Penningmeester: dr. Ad Ridder <penningmeester@vvs-or.nl>
Overige bestuursleden: prof. dr. Eric Cator (SMS), prof. dr. Jeanine Houwing-Duistermaat (BMS), Maarten Kampert MSc., prof. dr. Albert Wagelmans (NGB), dr. Michel van de Velden (ECS), dr. Jelte Wicherts (SWS), Kees Mulder (Young Statisticians).

Leden- en abonnementenadministratie van de VvS+OR
VvS+OR, Postbus 1058, 3860 BB Nijkerk, telefoon 033 - 2473408, e-mail <admin@vvs-or.nl>.
Raadpleeg onze website over hoe u lid kunt worden van de VvS+OR of een abonnement kunt nemen op *STAtOR*.

VvS+OR-website
www.vvs-or.nl

Advertentieacquisitie
M. van Hootegem <hootegem@xs4all.nl>
STAtOR verschijnt in maart, juli, oktober en december.

Ontwerp en opmaak
Pharos, Nijmegen

Uitgever

ISSN 1567-3383

De Toekomst

Een vaak aangehaalde uitspraak van de fysicus Niels Bohr is: ‘Voorspellen is moeilijk, zeker als het om de toekomst gaat.’ Toch wagen we ons aan voorspellingen, een groot deel van ons vakgebied leeft zelfs daarvan.

Regelmatig wordt gefilosofeerd over de rol die robots zullen gaan spelen in het toekomstige alledaagse leven. Daarbij komen zowel optimistische als zeer sombere perspectieven ter sprake. Dit nummer van *STAtOR* geeft wellicht aanleiding voor een dergelijke discussie. Thomas Moerland vertelt namelijk over zijn onderzoek naar de manier waarop een robot menselijke activiteiten kan herkennen. Hij heeft voor dit werk de VvS+OR Jan Hemelrijk Prijs 2017 mogen ontvangen.

Een andere uiting van menselijk handelen is het onderhandelen, hierover gaan twee artikelen. Dirk Sierag beschrijft de interactie tussen hotels en consumenten waarbij beide partijen een zo goed mogelijke keus willen maken. En Rutger Kerkkamp vertelt hoe verkopers door contracten te bundelen hun omzet kunnen verhogen.

Terug naar de toekomst: het CBS en de Universiteit Utrecht werken samen aan een onderzoek naar de manier waarop met de nieuwe technologie enquêtes kunnen worden gehouden of andere gegevens worden verzameld. Peter Lugtig, Vera Toepoel, Marike Haan en Barry Schouten vertellen hierover. Dit is overigens een goede illustratie van de uitspraak van Niels Bohr: als dit onderzoek 10 jaar geleden zou zijn gehouden zouden smartphones nog niet meegenomen zijn in deze studie!

Een groot deel van dit nummer is ook, helaas, gewijd aan het verleden: we herdenken onze overleden collega-redacteur en columnist Fred Steutel. In een tweetal In Memoriam’s en in artikelen van Frans Schurer en Klaas van Harn wordt uitgebreid ingegaan op de persoon en het werk van Fred. De foto die we hebben gekozen toont Fred terwijl hij een potlood aanscherpt: inderdaad, Fred was een scherpslijper in de best mogelijke betekenis.

Dit nummer bevat verder nieuws over de VeRoLog-competitie, mededelingen van de Young Statisticians en een aantal columns, waaronder een postume bijdrage van Fred Steutel. Nieuw als columnist is Gerard Sierksma, wij heten hem van harte welkom. Henk Tijms zal ook blijven bijdragen als columnist, maar zal de frequentie waarmee hij dat doet iets verminderen, vandaar dat u hem in dit nummer mist.

De redactie wenst u veel leesplezier (en dit is in de toekomende wijs gesteld).

De redactie

INHOUD

NIEUWHEIDSDETECTIE VOOR ACTIVITEITHERKENNING DOOR ROBOTS

Scène uit de film *Chappie* (2015) van Neill Blomkamp

Thomas Moerland

Robots zullen de komende jaren in toenemende mate ons dagelijks leven binnentreden. Zo lijken robots onder andere een veelbelovende rol te kunnen gaan spelen bij het verzorgen van ouderen. Echter, daar waar robots in de industrie in relatief gecontroleerde productie-omgevingen werken, zorgt het alledaagse leven voor een enorme variatie aan situaties. De robot moet functioneren in een zogeheten 'open' omgeving met veel verschillende woonkamers en de inherent onzekere interactie met mensen. Zo'n open omgeving stelt ons voor meerdere uitdagingen, waarvan we er in dit artikel een behandelen.

Menselijke activiteit

Een van de vereiste taken voor thuisrobots is het kunnen herkennen van menselijke activiteit. De robot heeft een camera die een continue stroom van hoog-dimensionale RGB-D (diepte)-beelden produceert. Het doel van activiteitherkenning is om te detecteren (classificeren) of een persoon voor de camera op dit moment aan het eten is, leest, of misschien zojuist gevallen is en er alarm geslagen moet worden. De gebruikelijke benadering van dit type problemen is via *machine learning*. We verzamelen een trainingsset van gelabelde voorbeeld-video's, en leren daarmee een (geparametriseerde) *predictor/classifier* die voorspellingen kan maken op nieuwe, ongelabelde data. Deze taak is onder meer uitdagend vanwege de dimensionaliteit van de inputdata en door de sterke temporele correlatie (een activiteit wordt vaak gedefinieerd door een tijdsafhankelijke serie van menselijke posities, en is zelden aan een los beeld te herkennen).

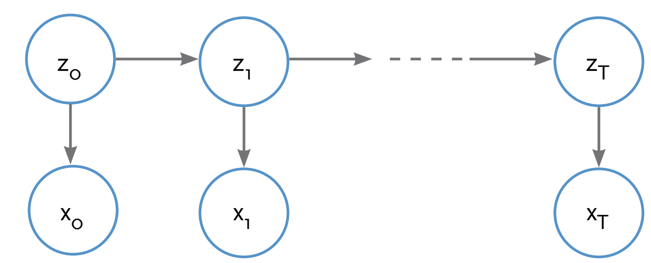
De 'open' omgeving van de thuissituatie schept echter nog een extra uitdaging. Stel dat het is gelukt om de bovengenoemde *classifier* te leren om nieuwe activiteiten te classificeren, dan nog zullen we 1. nooit alle menselijke activiteiten in de trainingsset hebben kunnen onderbrengen, en 2. bij verschillende robottoepassingen verschillende sets van activiteiten observeren. Een classifier die een activiteit uit een onbekende klasse toch toewijst aan de beste passende klasse uit de trainingsset zit per definitief fout. Dit probleem staat bekend als 'nieuwheidsdetectie', ofwel de detectie van data uit een onbekende en nieuwe klasse, en is tevens een eerste vereiste voor een zelflerend (zichzelf uitbreidend) systeem. In dit artikel bestuderen we nieuwheidsdetectie in de context van activiteitherkenning.

Activiteitherkenning

We beschrijven nu eerst een activiteit-classifier gebaseerd op het Hidden Markov Model (Baum & Petrie, 1966). De trainingsdata bestaan uit een set gelabelde video's $\{X_i,s_i\}_{i=1}^N$ voor videoklasselabels $s \in S = \{1,2,.., M\}$. Elke video X_i van lengte T_i bestaat uit een serie observatievectoren $x_{i,t}$ voor frame-index t. In de praktijk gebruiken we nog enkele voorbewerkingsstappen om de frame feature vector $x_{i,t}$ te krijgen (voor details zie Moerland, Chandarr, Rudinac & Jonker, 2016).

Om de temporele correlatie tussen de observatie vector te vatten gebruiken we de structuur van het Hidden Markov Model (HMM), een grafisch model zoals weergegeven in figuur 1. We gaan ervan uit dat de transities tussen de tijdsstappen te modelleren zijn op een discrete, latente laag. De latente laag variabele $z_{i,t}$ neemt waardes aan in een set van 'kernhoudingen' $W = \{w_1,w_2,... w_K\}$. Iedere kernhouding omschrijft een bepaalde positie van het lichaam in de observatievector. Het transitiemodel tussen de tijdsstappen is te beschrijven als een transitiematrix A van grootte K x K, waarbij $A_{k,l} = P(z_t = l \mid z_{t-1} = k)$. De relatie tussen de latente variabelen en de observatievector is gegeven door een diagonale Gaussiaans 'emissie verdeling' per klasse: $P(x_t|z_t=k) = \mathcal{N}(.|\mu_k,\Sigma_k)$. Het voorgaande definieert een generatief model van een video.

Om onderscheid te maken tussen videoklassen trainen we een aparte HMM per videoklasse. In praktijk laten we alleen de transitiemodellen verschillen, met A^s het transitiemodel voor klasse s. Een activiteit wordt



Figuur 1. Hidden Markov Model

daarbij als een serie van lichaamsposities gemodelleerd, waarbij voor verschillende activiteiten ook verschillende transities te verwachten zijn (welke we schatten uit de trainingsdata). De emissieverdelingen worden gedeeld tussen de klassen (het is aannemelijk dat bepaalde kernhoudingen voorkomen in meerdere activiteitklassen, en door deze gezamenlijk te schatten winnen we statistische efficiëntie). De volledige HMM parameters zijn daarmee gegeven door $\phi = \{\theta, \mu, \Sigma\}$, met $\theta = \{A^1,.. A^M\}$ de klassespecifieke transitiemodellen, en $\mu = \{\mu_1,..\mu_K\}$ en $\Sigma = \{\Sigma_1,..\Sigma_K\}$ de emissiemodellen per kernhouding.

De parameters van bovenstaand model zijn te schatten met maximum-likelihood. Het enige probleem is dat we de latente variabelen z niet geobserveerd hebben. We kunnen dit oplossen door toepassing van Expectation-Maximization (EM) (Dempster, Laird, & Rubin, 1977), waarbij we in de E-stap de parameters ϕ fixeren en de conditionele verwachting van alle $z_{i,t}$ variabelen berekenen, en in de M-stap deze z variabelen fixeren en maximaliseren ten opzichte van ϕ. Dit herhalen we tot convergentie van de parameters.

Voor een nieuwe video kunnen we nu de kans onder elke klasse s berekenen: $p(X|s)$. Voor classificatie gebruiken we vervolgens de maximum-a-posteriori (MAP) regel:

$$\begin{aligned} \hat{s} = \arg\max_{s \in \mathcal{S}} P(s|X) &= \arg\max_{s \in \mathcal{S}} \frac{p(X|s)p(s)}{p(X)} \\ &= \arg\max_{s \in \mathcal{S}} p(X|s) \end{aligned} \qquad (1)$$

In de laatste versimpeling nemen we de prior over de klassen, $p(s)$, uniform aan, en kunnen we de marginale videokans, $p(X)$, negeren omdat het de arg max niet beïnvloedt.

Nieuwheidsdetectie

We gaan nu verder met de nieuwheidsdetectie-methodologie, die verder bouwt op de MAP-beslissingsregel uit de vorige paragraaf. Een voor de hand liggend idee voor nieuwheidsdetectie is om de kans van de video gegeven de klasse, $P(X|s)$, 'af te kappen'. Als de geobserveerde video een lage kans heeft onder alle klassen dan is het waarschijnlijk dat we een nieuwe klasse hebben getroffen. Dit blijkt echter in de praktijk niet optimaal te werken, voornamelijk omdat het moeilijk is om op deze manier onderscheid te maken tussen een daadwerkelijk nieuwe klasse en een ruizige video van een bekende klasse.

Een theoretisch meer intuïtieve maat om af te kappen is de kans van de klasse gegeven de video, $p(s|X)$, zoals gegeven in (1). Hiervoor kunnen we de prior over de klassen $P(s)$ nog steeds uniform aannemen, maar hebben we een schatter van de marginale video kans $p(X)$ nodig. Voor een nieuwe klasse zal de $p(X)$ term relatief groot zijn, terwijl deze voor een ruizige video laag zal uitvallen.

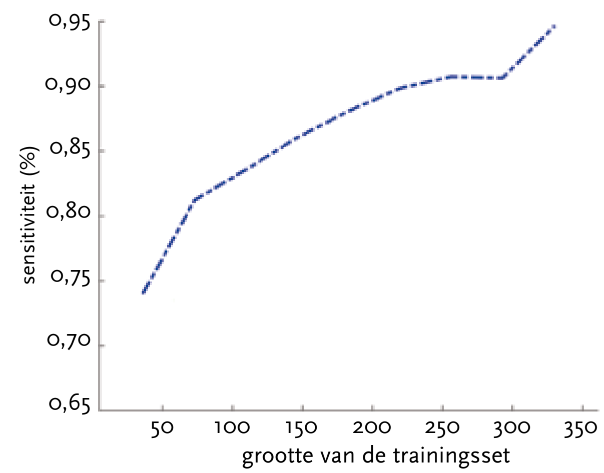
De marginale video kans is gegeven door $P(X) = \sum_G P(X|G)P(G)$, waarbij G de volledige modelruimte beschrijft, inclusief alle onbekende klassen. Probleem is echter dat we deze klassen juist niet geobserveerd hadden. Daarom introduceren we nu 'achtergrondmodellen'. Achtergrondmodellen zijn nieuwe HMM'en welke dezelfde trainingsset, kernhoudingen en emissiemodellen als de modellen uit de vorige paragraaf gebruiken. We zullen nu echter een nieuwe – mogelijke klassespecifieke – achtergrond transitiematrix $A^*_{(s)}$ trainen.

We beschrijven drie typen achtergrondmodellen. De eerste, het 'vul model', schat een nieuwe, generieke transitiematrix op alle data tezamen. Deze moet grofweg alle mogelijke menselijke transities (bewegingen) vatten, en is daarmee een goede kandidaat om $P(X)$ te benaderen. Het tweede type achtergrondmodel is het 'antimodel'. Dit is klasse-specifiek (elke klasse heeft zijn eigen antimodel), en wordt getraind op alle data die *niet* bij die klasse horen, herwogen naar de kans om verkeerd herkend te worden als de bewuste klasse. Daarmee zijn ze bedoeld om de regio rondom de ware kansregio van een klasse te modelleren, wat voor betere separatie zou kunnen zorgen. Als derde proberen we het 'vlakke model' dat de transitiematrix uniform initialiseert.

Uiteindelijk wordt een testvideo gedecodeerd onder de herkenningsmodellen uit de vorige paragraaf en onder de achtergrondmodellen in deze paragraaf om de (log) kans $\log p(s|X) = \log p(X|s) - \log p(X)$ te bepalen. Op deze statistiek wordt vervolgens een afkapwaarde τ bepaald op de trainingsset. Als $\log p(s|X) \geq \tau$ dan identificeren we de video als 'bekend' en gaan we verder met standaardclassificatie, en als $\log p(s|X) < \tau$ dan identificeren we de video als onbekend of nieuw.

Experimenten

We valideren onze methode met de publiek beschikbare Microsoft Research Action (MSRA) 3D-dataset, waaruit we 15 actieklassen selecteren (onder andere zwaaien, gooien, klappen, etc.) met in totaal 366 video's. Alle resultaten zijn gemiddeldes over 3 herhalingen van een drievoudige kruisvalidatie. Eerst testen we de sensitiviteit (accuraatheid) van de HMM-classifier in de standaard training/test set-up zonder onbekende klassen.



Figuur 2. Leercurve als functie van de grootte van de trainingsset; door de random split is de sensitiviteit iets lager dan beschreven in de tekst.

De leercurve voor verschillende dataset-groottes is te zien in figuur 2. In de optimale setting haalt het systeem ongeveer 96% classificatie-accuraatheid, wat rond de *state of the art* voor deze dataset ligt.

Voor nieuwheidsdetectie maken we een dubbele dataset-split, waarbij we eerst gerandomiseerd 3 klassen afscheiden als 'onbekend' en de video's van deze klassen niet gebruiken voor het trainen van de HMM'en. Op deze (moeilijker) classificatietaak, waarbij in de test set zowel bekende als onbekende klassen voorkomen, haalt het systeem zonder achtergrondmodel 71% sensitiviteit (juist toegewezen bekende klassen) en 57% specificiteit (juist gedetecteerde nieuwe klassen). De achtergrondmodellen verbeteren deze scores allemaal. De beste resultaten worden bereikt door een half-half gewogen combinatie van vlakke en anti-modellen, met een sensitiviteit/specificiteit van 78% / 78%.

Tabel 1 geeft dit resultaat nog gedetailleerder weer. We zien hoe we drie typen fouten kunnen maken. Allereerst op het nieuwheidsniveau, waar we bekend als nieuw (21%) of nieuw als bekend (22%) kunnen toewijzen. Echter, we kunnen ook een 'putatieve fout' maken, waarbij een video correct als bekend wordt geïdentificeerd, maar vervolgens aan de verkeerde klasse wordt toegewezen. Deze laatste fout komt maar zeer zelden voor (1%) als we achtergrondmodellen gebruiken, hetgeen aangeeft dat ze ook bruikbaar zijn om de robuustheid te vergroten in gesloten-setproblemen. Dat gaat dan wel ten koste van een aantal gevallen waarbij we weigeren te classificeren. (Voor meer gedetailleerde resultaten zie Moerland, Chandarr, Rudinac & Jonker, 2016).

VOORSPELDE LABEL	WARE LABEL	
	bekend	nieuw
bekend (correct)	78%	22%
bekend (foutief	1%	–
nieuw	21%	78%

Tabel 1. Test set resultaten voor gewogen combinatie van vlakke en anti-modellen

Conclusie

Dit artikel beschrijft een nieuwe methode om de robuustheid van actieherkenning in open omgevingen te vergroten. Onze nieuwheidsdetectie procedure gebaseerd op achtergrondmodellen is in staat tot 78% van de nieuwe video's te filteren voordat ze foutief geclassificeerd worden. De methodiek is tevens geschikt voor andere velden (dan de hier beschreven activiteitherkenning) waar HMM classificatie van toepassing is.

In breder perspectief is onzekerheidskwantificering, van oudsher het domein van de statistiek, ook een cruciaal probleem binnen robotica en machine learning. Alternatieve methoden om onzekerheid te kwantificeren, zowel frequentistisch (e.g., de niet-parameterische bootstrap) als Bayesiaans (inferentie op modelparameters) van aard, vinden in toenemende mate toepassing binnen hoog-dimensionale machine-learning-problemen, en zouden ook op het hier beschreven probleem van toepassing kunnen zijn.

Literatuur

Moerland T.M., Chandarr A., Rudinac M., & Jonker P.P (2016). Knowing What You Don't Know: Novelty Detection for Action Recognition in Personal Robots. In *Proceedings of VISIGRAPP 2016, Vol. 4: VISAPP* (pp. 317–327).

Baum, L. E., & Petrie, T. (1966). Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics, 37*(6), 1554–1563.

Dempster, A.P., Laird, N.M., & Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society.* Series B (Methodological), *39*(1), 1–38.

Thomas Moerland studeerde af in wiskunde (summa cum laude) en geneeskunde (cum laude) aan de Universiteit Leiden. Hij is momenteel als promovendus verbonden aan de afdeling Kunstmatige Intelligentie van de Technische Universiteit Delft. Zijn onderzoek focust op sequentiële beslissingsproblemen, in het bijzonder op het snijpunt van *reinforcement learning* en Bayesiaanse inferentie in (diepe) neurale netwerken. Hij ontving de VvS+OR Jan Hemelrijkprijs 2017.
E-mail: T.M.Moerland@tudelft.nl

HET GEVECHT OM HOTELBOEKINGEN

betere resultaten met revenue management

Dirk Sierag

Consumenten gaan continu online op zoek naar informatie over een product of service voordat ze een aankoop doen. Online reviews zijn daarom van belang voor retailers, dienstverleners, merken en ook voor de verkoop van hotelkamers. Klanten hebben de mogelijkheid om hun ervaringen te delen met andere potentiële klanten via websites zoals Booking.com, Expedia of Tripadvisor. Het effect van de reviews op de inkomsten van hotels is tweeledig: aan de ene kant hebben reviews invloed op de vraag, en aan de andere kant heeft de perceptie van de prijs-kwaliteitverhouding van de klant invloed op de review of rating die hij of zij schrijft. Een complicerende factor is dat reviews een vertraagd effect hebben: door nu lagere prijzen te vragen om betere reviews te krijgen, en dus inkomsten op te offeren, kunnen de langetermijninkomsten worden verhoogd.

Uit onderzoek blijkt dat potentiële gasten van hotels sterk beïnvloed worden door de reviews en ratings van de hotels die onder andere online beschikbaar zijn (zie Sierag, 2017, voor een overzicht). Het is in het belang van het hotel om veel positieve reviews binnen te halen en zo weinig mogelijke negatieve. Een manier om dit te verwezenlijken is om simpelweg lage prijzen aan te bieden. Echter, door te lage prijzen te vragen, laat het hotel veel geld liggen. Bovendien hoeft een lagere prijs niet altijd een hogere rating te garanderen; de verwachtingen zijn hoger gespannen bij een duurdere hotelkamer en lager bij een goedkopere hotelkamer. Aan de andere kant, als het hotel alleen focust op de winst en de invloed van reviews op de toekomst negeert, zal het hotel kamers aanbieden met een te hoge prijs, zodat de rating van het hotel daalt en het negatievere reviews zal krijgen. Dit leidt tot een lagere vraag naar kamers en dus ook tot een suboptimale lange termijn winst. Hoe kan het hotel zijn langetermijnwinst optimaliseren door rekening te houden met dit tweezijdige effect van reviews?

Het vakgebied binnen de OR dat zich hiermee bezighoudt heet Revenue Management (RM). RM is een discipline waar wetenschap en *analytics* worden toegepast om de langetermijnwinst te vergroten door betere beslissingen te nemen. Klassieke voorbeelden waar RM wordt toegepast zijn vliegmaatschappijen en hotels. Zij streven ernaar om hun marktaandeel en winst te behouden of te vergroten door dynamisch te beslissen wanneer ze hun stoelen of kamers aanbieden, tegen welke prijs, op welk moment, en aan welke klanten. Dit alles afhankelijk van verschillende factoren en van beschikbare informatie zoals de voorspelling van de vraag, de prijssensitiviteit van de klanten, en de beschikbaarheid van stoelen en kamers. RM wordt ook aangewend door theaters, restaurants, cruiseschepen, golfbanen, bij autoverhuur en bij de verkoop van tv- en online-advertenties. Alle toepassingen hebben gemeen dat er een eindig aantal vergankelijke goederen verkocht wordt, zoals een stoel in een vliegtuig, een kamer in een hotel, of een tijdslot van een golfbaan. RM streeft ernaar deze kenmerken te benutten door dynamisch de prijs en beschikbaarheid van kamers aan te passen aan de hand van de vraag en de overgebleven capaciteit.

Revenue Management in de hotelbranche

Ter illustratie van de dynamiek van revenue managementmodellen voor hotels neem ik een hotel met een beperkt aantal identieke kamers. Verzoeken tot reserveringen arriveren aan de hand van een Poisson proces met parameter λ. Het hotel beslist welke *producten* het aanbiedt aan de klant, waarbij een product een combinatie is van een kamer, prijs, en eventuele voorwaarden, zoals een inbegrepen ontbijt en annuleringsvoorwaarden. De verzameling van aangeboden producten wordt aangeduid met S en kan op elk tijdstip door de manager worden aangepast. Afhankelijk van de aangeboden prijzen kiest een klant om een product $j \in S$ te kopen met kans $P_j(S)$, of om niets te kopen met kans $P_o(S)$. Als de klant besluit product j te kopen levert dat het hotel een bedrag r_j op. Echter, als de aankomstdatum nog niet verstreken is, kan de klant zijn reservering annuleren. Annuleringen zijn exponentiëel verdeeld met parameter γ. Zie figuur 1.

Succesvol RM toepassen is een complexe taak en het is van groot belang kennis te nemen van alle factoren die klanten motiveren om een kamer bij het hotel te huren. Enkele voorbeelden zijn de fysieke locatie van het hotel, de rating en reviews, en beschikbare faciliteiten, zoals een zwembad of een fitnesscentrum. Het hotel kan identificeren welke factoren in welke hoedanigheid invloed hebben op de vraag door data-analyses uit te voeren op bijvoorbeeld historische verkoopgegevens of online reviews. Het hotel kan de resultaten vervolgens implementeren in een optimalisatiemodel om de inkomsten te maximaliseren onder bepaalde voorwaarden. Veelgebruikte technieken uit de besliskunde zijn (niet)-lineaire programmering, Markov-beslissingsketens en dynamisch programmeren. Deze technieken zijn toelaatbaar en effectief om de stochastische aard van het probleem en de eindige voorraad van hotels of vliegtuigen te modelleren.

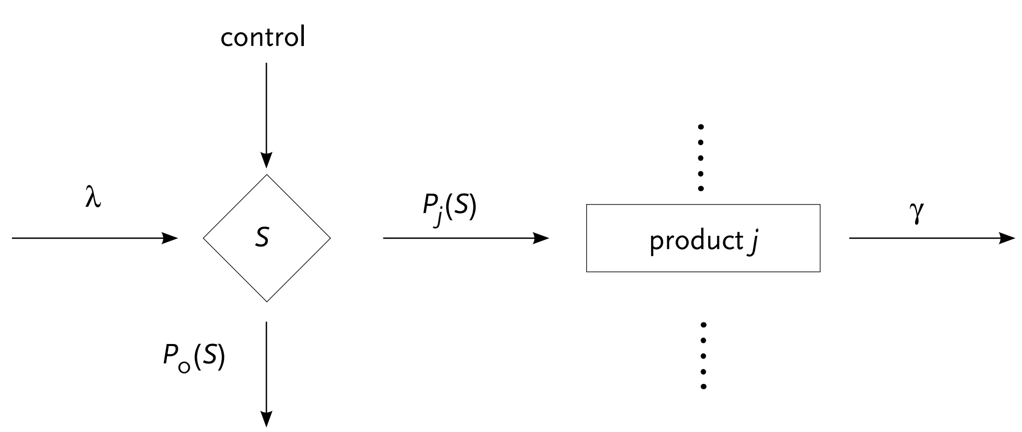
In mijn onderzoek pas ik deze methodologie toe om revenue-managementmodellen voor hotels te ontwikkelen waarbij rekening gehouden wordt met reviews en het gedrag van klanten (Sierag, 2017). Een belangrijk resultaat is dat het rekening houden met reviews in het beslissingsproces een grotere impact heeft als de vraag laag is dan wanneer de vraag hoog is. Dit is opvallend, want doorgaans is de impact van factoren juist groter als de vraag groter is, zoals bij annuleringen. Echter, dat dit fenomeen optreedt bij reviews kan als volgt worden verklaard. Als de vraag klein is dan heeft het zin om nu lagere prijzen te vragen, wat betekent dat het hotel inkomsten opoffert om betere reviews te krijgen om daarmee in de toekomst een grotere vraag en hogere inkomsten te verwerven. Als de vraag nu al groot is, dan heeft dit geen zin: zelfs als er nu een hogere prijs wordt gevraagd en dit zal leiden tot minder goede reviews zal er in de toekomst voldoende vraag overblijven om een stabiele vraag tegen hoge prijzen te garanderen.

Optimale prijsstrategie

Drie belangrijke factoren die het vinden van een optimale prijsstrategie voor hotels tot een ware uitdaging maken zijn:

1. het gedrag van klanten bij het maken van een keuze tussen verschillende kamers;
2. het feit dat klanten een reservering kunnen maken voor meerdere nachten;
3. de onzekerheid die komt kijken bij het schatten van parameters en de stochastische aard van de vraag en reviews.

Het modelleren van keuzegedrag van klanten is een moeilijke klus waarbij veel afwegingen gemaakt moeten worden. Een complex model geeft misschien wel de werkelijkheid goed weer, maar is te moeilijk om door te rekenen. Het hotel wil beslissen welke producten hij aanbiedt aan de klant. Stel dat het hotel een eindig aantal n producten tot zijn beschikking heeft, aangeduid met de verzameling N, en dat de keuze van de klant afhangt van de verzameling $S \subset N$ (een deelverzameling van alle producten) die het hotel aanbiedt. Dan zijn er 2^n mogelijke verzamelingen die het aan de klant aan kan bieden, exponentiëel in het aantal producten. Dit wordt dus al gauw onhandelbaar. Een voorbeeld waarbij het probleem wel oplosbaar is, is wanneer de klanten verdeeld worden in een aantal segmenten $|L|$, waarbij L de verzameling van segmenten is. Het hotel kiest dan een overwegingsverzameling $N_l \subset N$ van producten waaruit hij verzamelingen S_l kiest om aan te bieden aan segment $l \in L$. Verder wordt aangenomen dat de overwegingsverzamelingen elkaar niet overlappen, ofwel $N_l \cap N_k = \emptyset$, $k, l \in L$, $k \neq l$. In dat geval kan de complexiteit van het probleem drastisch gereduceerd worden door het op te splitsen in $|L|$ kleine subproblemen, en wordt het handelbaar (mits $|N_l|$ klein genoeg is voor alle $l \in L$ (zie b.v. Sierag, 2017; Liu & Van Ryzin, 2008)).



Figuur 1. Visualisatie van de dynamiek van het hotel-RM

Kleine en grote hotels

Een hotel heeft een eindig aantal kamers beschikbaar per nacht en een klant maakt doorgaans een reservering voor meerdere opeenvolgende nachten. Dit betekent dat het hotel een prijsstrategie voor alle dagen tegelijk zou moeten vinden. Het aantal mogelijke combinaties van aankomstdag en verblijfsduur is exponentieel in het aantal aankomstdagen. Een dynamische prijsstrategie, bijvoorbeeld aan de hand van dynamisch programmeren, ondergaat de *curse of dimensionality*: de dimensie van de toestandsruime is immers gelijk aan het aantal aankomstdagen waar het hotel over wil optimaliseren. Als het keuzegedrag van klanten mee wordt gemodelleerd is zelfs een deterministische benadering, bijvoorbeeld een lineair of geheeltallig programma waarbij aangenomen wordt dat de vraag en de reviews gelijk zijn aan hun verwachte waarde, onhandelbaar. Een aanpak die in zo'n geval toch een oplossing biedt is een *branch and price*-benadering (Barnhart e.a., 1998). Een *branch and price*-benadering bestaat uit de volgende aspecten:

1. een *vertakkende boom* om de geheeltallige variabelen aan te pakken;
2. een *kolom-generatie procedure*, uitgevoerd in elke knoop van de boom om te bepalen of er een tak moet worden toegevoegd of dat er gestopt moet worden in deze vertakking aan de hand van bepaalde beslissingsregels.

In de praktijk moeten parameters van wiskundige modellen geschat worden op basis van beschikbare data, wat met een zekere waarschijnlijkheid zal leiden tot schattingsfouten. Om rekening te houden met deze onzekerheid bij het schatten van parameters kan gebruik worden gemaakt van robuuste optimalisatie. Uit simulaties blijkt dat kleine hotels meer baat hebben bij het gebruik van robuuste optimalisatietechnieken dan grotere hotels. Grotere hotels kunnen zich hogere risico's veroorloven omdat ze grotere volumes hebben, en daarom leiden modellen die gemiddelde revenuen als doelstelling hebben tot hogere inkomsten dan de robuuste tegenhangers. Dat dit intuïtief logisch is, kan ook worden gezien aan de hand van het volgende getallenvoorbeeld. Beschouw een klein hotel met 34 kamers en een gemiddelde vraag van 27 kamers, en een groot hotel met 340 kamers en een gemiddelde vraag van 270 kamers. In de literatuur wordt vaak aangenomen dat aankomstprocessen Poison-verdeeld zijn, een aanname die ook wordt onderbouwd (Haensel & Koole, 2011; Sierag, 2017). Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de vraag voor het kleine hotel is gelijk aan [16,37], en voor het grote hotel gelijk aan [237,302]. In het meest ongunstige geval leidt dit tot 38% minder vraag dan het gemiddelde voor het kleine hotel, terwijl voor het grote hotel dit slechts leidt tot 12%. Kleine hotels zijn dus gevoeliger dan grote hotels.

LITERATUUR

Barnhart, C., Johnson, E.L., Nemhauser, G.L., Savelsbergh, M.W., & Vance, P.H. (1998). Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research, 46*(3), 316–329.

Haensel, A., & Koole, G. (2011). Estimating unconstrained demand rate functions using customer choice sets. *Journal of Revenue & Pricing Management, 10*(5), 438–454.

Liu, Q., & van Ryzin, G. (2008). On the choice-based linear programming model for network revenue management. *Manufacturing & Service Operations Management, 10*(2), 288–310.

Sierag, D. D. (2017) *Revenue Management in the Hotel Industry: from practice to theory* (Proefschrift). Vrije Universiteit Amsterdam.

DIRK SIERAG is wiskundige met een speciale interesse voor revenue management, operations research en financiële wiskunde. Dirk Sierag studeerde aan Leiden University en is gepromoveerd aan de Vrije Universiteit Amsterdam.
E-mail: d.sierag@gmail.com

Robuuste bundeling van contracten

Rutger Kerkkamp

Stel u bent een verkoper van een product en u heeft een potentiële klant. U kunt deze klant eenmalig meerdere offertes aanbieden en wilt uw verwachte winst maximaliseren. Een offerte beschrijft hoeveel de klant moet bestellen en tegen welke prijs. De klant zal echter niet blindelings een offerte accepteren. De voorgestelde combinatie van hoeveelheid product en prijs zal aantrekkelijk moeten zijn voor de klant, wil hij een offerte accepteren. Kortom, nadat u de offertes heeft aangeboden, zal de klant óf alle offertes afwijzen óf de voor hem meest aantrekkelijke offerte kiezen. In het eerste geval raakt u deze klant kwijt. Een bijkomende moeilijkheid is dat de klant uit strategisch oogpunt niet al zijn informatie met u deelt, waaronder zijn acceptabele verhoudingen van hoeveelheid product en prijs. Hoe kunt u nu offertes samenstellen zodanig dat uw verwachte winst gemaximaliseerd wordt?

Het hierboven beschreven probleem staat bekend als het principaal-agent-probleem. De principaal (de verkoper) wil dat de agent (de klant) een bepaalde actie neemt, terwijl de principaal niet alle informatie en controle over de agent heeft. Er is sprake van informatie asymmetrie: de agent heeft private informatie. In het beschreven probleem is de private informatie van de klant bijvoorbeeld zijn gewenste hoeveelheid product en zijn maximale budget. Om toch zijn doel te bereiken, kan de principaal een zogeheten mechanisme met stimulansen (*incentive mechanism*) ontwerpen om de agent te overtuigen een bepaalde actie te nemen. Zo'n mechanisme komt neer op een verzameling van offertes, waarbij de offertes aan zeer specifieke voorwaarden moeten voldoen en onderling op elkaar zijn afgesteld. Doorgaans moet een optimalisatieprobleem opgelost worden om een dergelijke verzameling van offertes te bepalen.

De modellering van het principaal-agent-probleem is cruciaal voor het resulterende mechanisme. Zo kunnen kleine variaties in het model het waarneembare keuzegedrag van de klant veranderen. Twee belangrijke modelleringsaspecten zijn de private informatie van de klant en het aantal offertes dat de verkoper de klant kan aanbieden. Hiervoor zijn twee klassieke aanpakken in de literatuur beschreven: een discrete modellering (van de private informatie) met een beperkt aantal offertes en een continue modellering met een onbeperkt aantal offertes. Recent is een derde aanpak in de literatuur beschreven die de twee klassieke aanpakken combineert: een continue modellering van de private informatie met een beperkt aantal offertes.

Wij zullen een eenvoudig principaal-agent-probleem beschouwen om de genoemde concepten te formaliseren en te illustreren. Voor dit probleem vergelijken we drie modellen gebaseerd op de genoemde modelleringsaanpakken: het discrete model, het continue model en het robuuste bundeling-model. Het gepresenteerde werk is gebaseerd op Kerkkamp et al. (2017). Hiernaar verwijzen we ook voor meer informatie over de methodiek en betreffende literatuur.

Het principaal-agent-probleem en mechanismen

We beschouwen het principaal-agent-probleem uit de inleiding met een verkoper en een potentiële klant die niet al zijn informatie deelt. De verkoper heeft één type product waarvoor de bestelhoeveelheid vastgelegd in een offerte niet geheeltallig hoeft te zijn. Omdat een offerte ook herhaaldelijke bestellingen gedurende een vastgelegde periode (een handelscontract) kan beslaan, zullen we spreken over contracten in plaats van offertes. Deze terminologie is gebruikelijker in de literatuur. Een contract bestaat uit de bestelling $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en de betaling $z \in \mathbb{R}$ aan de verkoper door de klant.

We nemen aan dat de klant zijn waarde van een bestelling kan kwantificeren en eenduidig kan vergelijken met de prijs. Deze waardering is echter afhankelijk van de private informatie van de klant. We beperken ons tot het geval waar de private informatie gecodeerd kan worden in een 1-dimensionale parameter $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Deze parameter wordt het klanttype genoemd en modelleert bijvoorbeeld de maximale prijs die de klant bereid is te betalen per product. Hoewel het klanttype onbekend is voor de verkoper, heeft hij vastgesteld dat het klanttype een bepaalde strikt positieve kansverdeling p volgt over een verzameling $\Theta \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Een klant met type $\theta \in \Theta$ heeft waarde $\phi(x|\theta)$ voor bestelling x. Soortgelijk is $\psi(x)$ de waarde voor de bestelling voor de verkoper. De netto waarde van een contract (x, z) is dus $\phi(x|\theta) - z$ voor de klant en $\psi(x) + z$ voor de verkoper. We nemen aan dat de klant een waarde 0 heeft als hij alle contracten afwijst. Deze waarde noemen we de participatiegrenswaarde aangezien de klant nooit een contract zal accepteren met een netto waarde onder deze grenswaarde. In de literatuur wordt de grenswaarde ook *reservation level* of *outside option* genoemd.

Gegeven deze situatie kan de verkoper een mechanisme met stimulansen als volgt ontwerpen om zijn verwachte winst te maximaliseren. De verkoper ontwerpt een aantal contracten en elk klanttype $\theta \in \Theta$ krijgt hierbij een contract $(x(\theta), z(\theta))$ toegewezen. Deze verzameling van contracten wordt een menu van contracten genoemd. Het ontwerp en de toewijzing van contracten moet dusdanig gebeuren dat aan de volgende twee voorwaarden voldaan wordt. Ten eerste moet het toegewezen contract acceptabel zijn voor het betreffende klanttype. Dat wil zeggen, de netto waarde moet niet slechter zijn dan de participatiegrenswaarde:

$$\phi(x(\theta)|\theta) - z(\theta) \geq 0 \quad \forall\, \theta \in \Theta. \tag{1}$$

Dit is de zogeheten participatievoorwaarde of *individual rationality constraint*. Ten tweede moet het toegewezen contract de meest aantrekkelijke keuze van alle contracten zijn voor het betreffende klanttype:

$$\phi(x(\theta)|\theta) - z(\theta) \geq \phi(x(\hat{\theta})|\theta) - z(\hat{\theta}) \quad \forall\, \theta, \hat{\theta} \in \Theta. \tag{2}$$

Deze voorwaarde heet de *incentive compatibility constraint* en zorgt voor onderlinge afstemming tussen de contracten.

Aangezien de klant zijn private informatie niet kenbaar zal maken, kan hij liegen over zijn klanttype θ. De klant zal of alle contracten afwijzen of het voor hem meest voordelige contract kiezen uit het menu. Door het ontwerp van het menu met voorwaarden (1) en (2) zal een klanttype θ echter altijd zijn toegewezen contact $(x(\theta), z(\theta))$ kiezen. Oftewel, het is niet in het voordeel van de klant om te liegen. Hierdoor kunnen we de verwachte winst van de verkoper direct relateren aan de kansverdeling van het klanttype. Onder de beschreven voorwaarden optimaliseert de verkoper het menu van contracten om zijn verwachte winst $E_\theta[\psi(x(\theta)) + z(\theta)]$ te maximaliseren.

We benadrukken dat in het beschreven mechanisme de verkoper altijd een geschikt contract voor de klant heeft ongeacht zijn klanttype. Dit noemen we robuustheid van het mechanisme.

In de bovenstaande omschrijving van het principaal-agent-probleem en het mechanisme hebben we de kansverdeling en het aantal contracten opengelaten. Dit zijn belangrijke modelleringskeuzes en hangen bijvoorbeeld af van de informatie die de verkoper over de klant heeft en van de mogelijkheden van de verkoper om het menu van contracten te communiceren. We bespreken drie modelleringsaanpakken in de volgende paragrafen. Deze modellen verschillen in de kansverdeling van het klanttype (continu of discreet)

TYPE MODEL		AANTAL CONTRACTEN	
		ONEINDIG	EINDIG
KANSVERDELING	CONTINU	Continu	Bundeling
	DISCREET	-	Discreet

Tabel 1. Varianten in contractmodellen

en het aantal contracten in het menu (oneindig of eindig). Tabel 1 geeft een overzicht van de modellen.

Twee klassieke modellen

Het eerste model dat we bespreken is het klassieke continue model. Hierbij is het klanttype continu verdeeld over een interval: $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Bovendien kan de verkoper een menu met oneindig veel contracten aanbieden. Het menu van contracten kan worden geïnterpreteerd als een functie van het klanttype, waarbij elk klanttype een eigen contract krijgt. Dit resulteert in het optimalisatiemodel weergegeven in formulering 1 (zie hieronder) dat opgelost moet worden om het optimale menu te bepalen.

We kunnen het continue model bijvoorbeeld als volgt gebruiken. De private informatie θ van de klant is de maximale prijs die hij bereid is om te betalen voor een enkel product en ligt in een bepaald interval. Een bijbehorende waardefunctie kan $\phi(x|\theta) = \theta x$ zijn, wat de directe monetaire waarde voor de klant representeert. De private informatie kan ook abstracter van aard zijn, bijvoorbeeld een parameter gerelateerd aan marktverzadiging. Een bijbehorende waardefunctie kan $\phi(x|\theta) = wx - \theta x^2$ zijn, waarbij w een algemeen gegeven marktwaarde voor een enkel product is. Deze concave waardefunctie modelleert bijvoorbeeld een situatie waarbij een teveel aan producten kosten met zich meebrengt.

Het tweede model is het klassieke discrete model, waarbij het klanttype een discrete kansverdeling heeft. Oftewel, $\Theta = \{\theta_1,...,\theta_K\}$ met bijbehorende kansen p_1, ..., p_K. De verkoper biedt K contracten aan de klant, evenveel als het aantal klanttypes. Het discrete model staat in formulering 2, waarbij het gebruikelijk is om de contracten weer te geven als (x_k, z_k) voor $k = 1, ..., K$.

In het discrete model is het klanttype doorgaans meer kwalitatief dan kwantitatief van aard. Het beschrijft bijvoorbeeld of de klant de voorkeur heeft om weinig of veel producten te kopen. Een waardefunctie voor de klant kan bijvoorbeeld qua vorm significant verschillen per klanttype.

De continue dan wel discrete aard van het model heeft ook een effect op de beschikbare oplossingstechnieken. Afhankelijk van de waardefuncties kan men optimale besturingstheorie (*optimal control theory*) gebruiken voor het continue model en de Karush-Kuhn-Tucker optimaliteitsvoorwaarden voor het discrete model. Ook kan voor een grote klasse van waardefuncties het model analytisch versimpeld worden, bijvoorbeeld door een veel voorkomende kortste pad structuur.

Het robuuste bundeling-model

Stel nu dat het klanttype continu verdeeld is over $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Het toepassen van het continue model zal in het algemeen leiden tot een complex menu van contracten, waarbij elk klanttype een ander contract toegewezen krijgt. Het is aannemelijk dat er situaties zijn waarbij het niet mogelijk of niet gewenst is om zo'n menu te gebruiken. Denk bijvoorbeeld aan hoe de verkoper zo'n menu kan communiceren aan de klant. Het is veel toegankelijker om slechts een beperkt aantal contracten aan te bieden. Kunnen we hiervoor het discrete model gebruiken (als benadering) of is een andere aanpak noodzakelijk?

Als we in deze situatie het discrete model gebruiken, moeten we het interval $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ discretiseren in een verzameling vertegenwoordigers $\{\theta_1,...,\theta_K\}$ met een bijbehorende discrete kansverdeling. Het probleem is nu dat de klanttypes die niet vertegenwoordigd zijn niet bestaan volgens het discrete model. Oftewel, het discrete model houdt geen rekening met de contractkeuze van deze niet vertegenwoordigde klanttypes. Dit heeft tot gevolg dat het resulterende mechanisme in het algemeen niet robuust is. Hierdoor kan het voorkomen dat de klant alle contracten zal afwijzen.

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{x,z} & \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} p(\theta)\Big(\psi(x(\theta)) + z(\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta & \\
\text{o.d.v.} & \phi(x(\theta)|\theta) - z(\theta) \geq 0 & \forall\,\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \\
& \phi(x(\theta)|\theta) - z(\theta) \geq \phi(x(\hat{\theta})|\theta) - z(\hat{\theta}) & \forall\,\theta, \hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \\
& x(\theta) \geq 0 & \forall\,\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]
\end{array}
$$

Formulering 1. Het continue model

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{x,z} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} p_k\Big(\psi(x_k) + z_k\Big) & \\
\text{o.d.v.} & \phi(x_k|\theta_k) - z_k \geq 0 & \forall\,k = 1,\ldots,K \\
& \phi(x_k|\theta_k) - z_k \geq \phi(x_l|\theta_k) - z_l & \forall\,k,l = 1,\ldots,K \\
& x_k \geq 0 & \forall\,k = 1,\ldots,K
\end{array}
$$

Formulering 2. Het discrete model

Een oplossing hiervoor is het robuuste bundeling-model, wat een combinatie is van het continue model en het discrete model. Om tot dit model te komen, moet de verkoper de volgende stappen doorlopen. Allereerst kiest de verkoper het maximum aantal contracten in het menu, aangeduid met K. Ten tweede partitioneert de verkoper het interval $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ in K subintervallen, voor het gemak in notatie weergegeven als $[\underline{\theta}_k, \bar{\theta}_k]$ voor $k = 1, ..., K$. Tot slot gebruikt hij een soortgelijk mechanisme als in de andere aanpakken om een menu van K contracten samen te stellen. Hierbij zal het k-de contract (x_k, z_k) de meest aantrekkelijke keuze zijn voor alle klanttypes in het k-de subinterval $[\underline{\theta}_k, \bar{\theta}_k]$. Oftewel, alle klanttypes in een subinterval worden gebundeld en kiezen hetzelfde contract. Zie formulering 3 voor het robuuste bundeling-model.

In tegenstelling tot het discrete model als een benadering modelleert het robuuste bundeling-model de contractkeuze van de klant wel correct. Zoals de naam al aangeeft, is het resulterende mechanisme robuust en leidt het tot een menu met een beperkt aantal contracten. Voor een grote klasse van waardefuncties kan men soortgelijke oplossingstechnieken gebruiken als voor het discrete model.

Partitiestrategieën

Bij het robuuste bundeling-model beslist de verkoper over de gebruikte partitiestrategie: het aantal contracten en de partitie van $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Bovendien kan de verkoper verschillende partitiestrategieën eerlijk evalueren, simpelweg door de resulterende doelfunctiewaarden te vergelijken. Daarnaast geeft het continue model een maximaal te behalen verwachte winst. We kunnen dus de gemiste verwachte winst vanwege het aanbieden van een beperkt aantal contracten kwantificeren. Gevoelsmatig zou voor veel principaal-agent-problemen een beperkt aantal contracten voldoende moeten zijn om nagenoeg alle mogelijke winst te behalen. Onze analyse van enkele concrete problemen in Kerkkamp et al. (2017) laat zien dat dit inderdaad het geval is: met slechts drie contracten wordt al tenminste 96% van de mogelijke winst behaald.

Een natuurlijke keuze voor de partitiestrategie is om voor een gegeven aantal contracten het interval te partitioneren in gelijkmatig verdeelde kwantielen. Voor de uniforme kansverdeling is dit de equidistante partitie, waarbij $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ gepartitioneerd wordt in subintervallen van gelijke lengte. Dit heeft tot gevolg dat elk contract met dezelfde kans gekozen wordt. Deze partitiestrategie is niet altijd optimaal, dat wil zeggen, het resulteert niet altijd in de hoogste verwachte winst. We hebben zowel problemen geanalyseerd waarbij deze strategie nooit optimaal is als een probleem waarbij deze voor een familie van instanties optimaal is.

Het optimaliseren van de partitie is echter niet eenvoudig. Het kan zelfs zijn dat het oplossen van het robuuste bundeling-model al gecompliceerd is voor een gegeven partitie. In veel gevallen zal men waarschijnlijk moeten uitwijken naar heuristieken voor de partitiestrategie, zoals de equidistante partitie.

Tot slot

Ten opzichte van de twee klassieke modellen onderscheidt het robuuste bundeling-model zich door de combinatie van een continue kansverdeling van het klanttype en het aanbieden van een beperkt aantal contracten. De toepassing van het robuuste bundeling-model op concrete problemen in Kerkkamp et al. (2017) laat zien dat nagenoeg alle mogelijke winst al te behalen is met een beperkt aantal contracten. Het is daarmee een waardevolle toevoeging op de klassieke modelleringsaanpakken. Het robuuste bundeling-model biedt genoeg vraagstukken om te onderzoeken, zoals de optimalisatie van partitiestrategieën. Bovendien zijn er in de literatuur variaties op de beschreven klassieke modellen, waarbij bijvoorbeeld de participatiegrenswaarde afhangt van het klanttype of er meerdere klanten zijn. Deze modelvariaties kunnen ook vertaald worden naar het robuuste bundeling-model.

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{x,z} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\Big(\int_{\underline{\theta}_k}^{\bar{\theta}_k} p(\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\psi(x_k) + z_k\Big) & \\
\text{o.d.v.} & \phi(x_k|\theta_k) - z_k \geq 0 & \forall\,\theta_k \in [\underline{\theta}_k, \bar{\theta}_k], k = 1,\ldots,K \\
& \phi(x_k|\theta_k) - z_k \geq \phi(x_l|\theta_k) - z_l & \forall\,\theta_k \in [\underline{\theta}_k, \bar{\theta}_k], k,l = 1,\ldots,K \\
& x_k \geq 0 & \forall\,k = 1,\ldots,K
\end{array}
$$

Formulering 3. Het robuuste bundeling-model

LITERATUUR

Kerkkamp, R.B.O., Heuvel, W. van den, & Wagelmans, A.P.M. (2017), *Robust Pooling for Contracting Models with Asymmetric Information*. Rotterdam: Econometric Institute Research Papers, Report EI2017-10.

RUTGER KERKKAMP is promovendus aan de Erasmus Universiteit Rotterdam en onderzoekt het ontwerpen van contracten in voorraadbeheermodellen als informatie asymmetrisch gedeeld wordt tussen de betrokken partijen.
E-mail: kerkkamp@ese.eur.nl

WIN

HET WAARNEEM INNOVATIE NETWERK

PETER LUGTIG, VERA TOEPOEL, MARIEKE HAAN & BARRY SCHOUTEN

In oktober 2016 zijn het Centraal Bureau voor de Statistiek en de afdeling Methodologie & Statistiek van de Universiteit Utrecht een intensieve samenwerking begonnen. In de komende jaren werken zij samen aan het integreren van smartphones binnen dataverzamelingsmethoden, zowel voor de interactie met respondenten als voor metingen via de sensoren in de smartphones van respondenten. Smartphones zijn wijd verspreid (Figuur 1) en de mogelijkheden van sensoren zijn eindeloos, maar hoe en onder welke condities zorg je ervoor dat nieuwe vormen van data officiële statistieken kunnen verbeteren of aanvullen?

Thema's

Het Waarneem Innovatie Netwerk (WIN) startte in oktober 2016 en omvat voor de komende jaren drie grote projecten: 1. het ontwikkelen van vragenlijsten zodat die optimaal via smartphones kunnen worden ingevuld, 2. het modulair ontwerpen van vragenlijsten en 3. het gebruik van sensordata die met smartphones kunnen worden verzameld. Dit artikel biedt inzicht in de grote veranderingen die er gaande zijn binnen de methoden van dataverzameling.

Gebruiksvriendelijkheid en lay-out

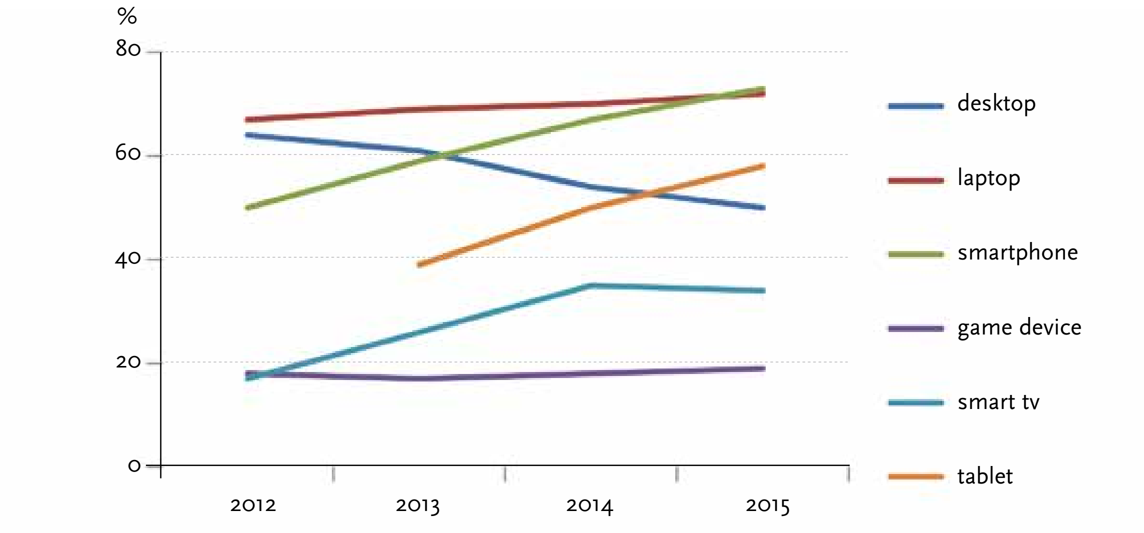
Het eerste thema waaraan wordt gewerkt is het ontwikkelen van een infrastructuur waarmee vragenlijsten gemakkelijk via smartphones kunnen worden ingevuld. Wat betreft de lay-out en gebruiksvriendelijkheid moeten vragenlijsten geschikt worden gemaakt voor smartphones omdat er aannemelijke risico's bestaan voor vertekeningen van statistieken. Ten eerste verschillen respondenten die ervoor kiezen om hun smartphone te gebruiken voor enquête-participatie van respondenten die andere apparaten gebruiken zoals een laptop (Antoun & Couper, 2013). Wanneer deze groep niet goed kan deelnemen aan enquêtes kan dit leiden tot dekkingsfouten. Ten tweede kan een smartphone-onvriendelijke vragenlijst ervoor zorgen dat de respons daalt. Ten derde kunnen er meet- en nonresponsfouten optreden wanneer een smartphone-gebruiker de vragenlijst niet goed kan invullen omdat deze niet geschikt is gemaakt voor dit apparaat.

Het WIN is recentelijk gestart met het testen van vragenlijsten op gebruiksvriendelijkheid met verschillende apparaten: desktop/laptop, tablet, en smartphone. De Gezondheidsenquête is hiervan een voorbeeld. Naast het vaststellen en oplossen van mogelijke problemen die zich kunnen voordoen bij het invullen van een vragenlijst op meerdere apparaten, willen we met dit onderzoek ook een verkenning doen van mogelijke apparaateffecten: zien we een ander invulgedrag bij invullers op de desktop/laptop, tablet en smartphone. Tijdens de eerste testen is het invulgedrag van respondenten met verschillende camera's vastgelegd. Zowel het klikgedrag met de muis als het invullen van de vragenlijst met vingers is geanalyseerd en er zijn interviews geweest met de respondenten om het invulgedrag en de gebruiksvriendelijkheid van de vragenlijst te bespreken. De resultaten van deze testen lieten zien dat teksten op een smartphone soms lastig te lezen zijn en dat het invullen van de vragenlijst op een smartphone langer duurde dan op de andere apparaten.

Deze inzichten hebben geleid tot de opzet van een experiment waarin twee designaspecten getest zullen worden: de grootte van de knoppen en het gebruik van een autoforwardtechniek in de smartphone vragenlijst. Ten eerste zullen we met dit experiment kunnen evalueren of de grootte van de knoppen het invulgedrag van de smartphone-respondent beïnvloedt. Het is mogelijk dat grotere knoppen leiden tot een kortere invultijd en minder uitval omdat responsmogelijkheden duidelijker leesbaar zijn. Ten tweede kunnen we onderzoeken wat het effect is van een autoforwardtechniek, waarbij respondenten automatisch naar een volgende vraag gaan na het invullen van een antwoord. We kijken daarbij naar het invulgedrag en het navigatiegedrag van de respondent. In de huidige versie van de Gezondheidsmonitor wordt genavigeerd met 'volgende' en 'vorige' knoppen. Deze knoppen nemen op smartphones erg veel ruimte in wat consequenties heeft voor de lay-out. 'Volgende' en 'vorige' knoppen vragen ook om een extra handeling van smartphone-respondenten bij het navigeren waardoor de invultijd langer wordt. Door het gebruik van een autoforwardtechniek zijn deze knoppen niet langer nodig. Met dit experiment zullen we bestuderen hoe respondenten navigeren door de vragenlijsten binnen de verschillende condities, waarbij we ook letten op mogelijke tussentijdse nonrespons en uitval.

Modulair ontwerp

Zelfs wanneer vragenlijsten goed in te vullen zijn via smartphones, is het de vraag of mensen bereid zijn om lange vragenlijsten in te vullen. De meeste onderzoeken



Figuur 1. Dekkingsgraad van online devices in Nederlandse huishoudens

die bijvoorbeeld het CBS doet kosten tussen de 10 en 60 minuten om in te vullen. Uit een recente overzichtsstudie van Couper et al. (2017) blijkt dat respondenten niet bereid zijn om zoveel tijd te besteden aan het invullen van vragenlijsten. Mobiele telefoons worden gebruikt voor korte interacties: iemand een bericht sturen, even sociale media bekijken zoals Facebook of Instagram, of het doen van financiële transacties. Niemand verstuurt een lange tekst of e-mail via een smartphone. Wanneer vragenlijsten langer zijn dan 10 minuten, resulteert dit in een hoge uitval op smartphones (Mavletova & Couper, 2015). Vermoed wordt dat nauwkeurige metingen via smartphones alleen mogelijk zijn als vragenlijsten korter worden. Dat inkorten komt met een prijs voor zowel dataverzamelaars als gebruikers en een belangrijke vraag is daarom onder welke condities dit acceptabel is.

Een van de manieren om vragenlijsten in te korten zonder al teveel informatie te verliezen is door het gebruik van matrix sampling, of een *planned missingness* design. Enquêtevragen worden ingedeeld in modules, en een willekeurig deel van die modules wordt aan een respondent voorgelegd. Door middel van imputaties of andere technieken kunnen vervolgens de ontbrekende data per persoon worden teruggeschat. *Planned missingness* designs bestaan al lang en worden bijvoorbeeld al toegepast in toetsing (*Computerized Adaptive Testing*), of in ontwikkelingspsychologie. Nieuw is dat dit soort designs wordt toegepast binnen de officiële statistiek.

Binnen WIN wordt een aantal simulaties en verkennende analyses gedaan naar modulaire ontwerpen van vragenlijsten. Vragen die daarbij aan bod komen zijn: hoe bepaal je welke enquêtevraag in welke module moet staan? Wat is de beste manier om ontbrekende waardes te schatten? En waar treden er mogelijk contexteffecten op? Doordat de vraagvolgorde voor verschillende respondenten anders wordt bestaat er een risico dat correlaties binnen de vragenlijsten veranderen. De simulaties zijn het startpunt voor verdere tests.

Een voorbeeld is de Veiligheidsmonitor, een vragenlijst waarin gevoelens van onveiligheid en slachtofferschap worden gemeten. In deze vragenlijst krijgen respondenten eerst een set vragen die gaan over hun tevredenheid met de woning en woonomgeving. Daarna volgen vragen over gevoelens van onveiligheid en vervolgens worden vragen over slachtofferschap gesteld. Als respondenten de vragen over tevredenheid met hun woonomgeving overslaan, leidt dit dan tot andere antwoorden op de vragen over onveiligheidsgevoelens? Uit eerder onderzoek weten we dat dit soort contexteffecten soms groot is. Voor het CBS is het echter belangrijk om op lange termijn veranderingen in bijvoorbeeld onveiligheidsgevoelens in kaart te brengen. Als blijkt dat die door een modulair ontwerp ineens hoger of lager worden, dan kan dat reden zijn af te zien van een modulair design dan wel om te zoeken naar methoden om trendschattingen te corrigeren.

Sensordata

Het thema Sensordata onderzoekt en implementeert mogelijkheden om vragenlijstdata aan te vullen, te verrijken of te vervangen met sensordata. Uit brainstorm sessies zijn zes onderwerpen naar voren gekomen die zijn gescoord op relevantie en uitvoerbaarheid: Verplaatsingen en tijdbesteding, Internetgebruik en -gedrag, Uitgaven en koopgedrag, Gezondheid en conditie, Leef- en werkomstandigheden, en Mentale en emotionele gesteldheid. Onder alle ontwikkeling van sensordata ligt vanzelfsprekend IT, methodologie voor het design van vragenlijsten die sensordata inzetten en methodologie voor benaderstrategieën.

Een basale set metingen via mobiele apparaten die voor de hand ligt is tijd-locatie metingen met een combinatie van GPS, WiFi, GSM en accelerometers. Dergelijke metingen geven verplaatsingen weer van personen en kunnen verrijkt worden met waarschijnlijk transportmiddel en geografische informatie. De metingen zijn een interessant startpunt voor veel statistieken. Hoewel de ervaringen met technische prestaties in het verleden hierin negatief waren, zien we mogelijkheid om die hindernissen te overwinnen. Daarom hebben we een app ontwikkeld die in staat is om een reeks tijdlocatiemetingen te produceren, het gebruik van batterijen te beperken door stopdetectie te gebruiken en een volledige reis op een geografische kaart te plaatsen. Daarnaast biedt de app twee extra functies: het clustert reizen op basis van stopdetectie criteria en het stelt de wijze van vervoer voor (geen activiteit, lopen, rennen, fietsen, auto, onbekend). De app kan relatief makkelijk toegepast worden binnen andere surveys, en biedt functionaliteit om vragen te integreren in de app.

Om sensorgegevens te kunnen vastleggen (in plaats van of naast vragenlijstgegevens) is het van essentieel belang dat respondenten bereid zijn een app te downloaden en de gegevens te uploaden. Uit recent onderzoek naar technologie door website Tweakers (Direct Research, 2016) bleek dat meer dan 75% van de respondenten zich ongemakkelijk voelde met het delen van metadata over communicatie, zoals met wie ze communiceren en wanneer. Ook het delen van andere informatie, zoals winkelgedrag, surfgedrag en locatie, was ongemakkelijk voor meer dan 50% van de respondenten. Couper & Singer (2013) vroegen respondenten in een web-enquête of ze toestemming gaven om gebruik te maken van de paradata die werden gegenereerd tijdens het voltooien van de enquête. In een reeks van drie experimenten onderzochten zij alternatieve manieren om de respondenten te informeren over het vastleggen van paradata en om toestemming te vragen voor het gebruik. In alle drie de experimenten verlaagde elke vermelding van paradata de bereidheid om deel te nemen aan de hypothetische enquêtes. Het is van cruciaal belang om een idee te hebben van de bereidheid van het publiek om (verschillende) sensorgegevens te meten en te delen. Daarbij is niet alleen de theoretische bereidheid van belang, maar ook het daadwerkelijke gedrag.

Aan WIN werken vanuit het CBS: Annemieke Luiten, Barry Schouten, Deirdre Giesen, Jeldrik Bakker, Myra Wieling, Ole Mussmann, Victor Verstappen en Vivian Meertens; vanuit Universiteit Utrecht: Bella Struminskaya, Marieke Haan, Peter Lugtig en Vera Toepoel.

Literatuur

Antoun, C., & Couper, M.P. (2013). *Mobile-mostly internet users and selection bias in traditional web surveys.* Paper presented at the annual meeting of the Midwest Association for Public Opinion Research, Chicago, IL, November 22–23.

Couper, M.P., & Singer, E. (2013). Informed Consent for Web Paradata Use. *Survey Research Methods*, 7, 57–67.

Couper, M.P., Antoun, C., & Mavletova, A. (2017). Mobile Web Surveys: A Total Survey Error Perspective. In Biemer, P. et al. *Total Survey Error in Practice* (pp. 133–154). New York: Wiley.

Direct Research (2016). Geraadpleegd op <http://www.directresearch.nl/nederlander-ongemakkelijk-bij-afgeven-metadata-telefoongesprekken-en-chatberichten>.

Mavletova, A., & Couper, M.P. (2015). A meta-analysis of breakoff rates in mobile web surveys. Mobile research methods. In D. Toninelli, R. Pinter & P. de Pedraza (Eds.), *Mobile research methods: Opportunities and challenges of mobile research technology* (pp. 81–98). London: Ubiquity Press.

Peter Lugtig is *associate professor* aan de Universiteit Utrecht en geïnteresseerd in survey methodologie en analyse van longitudinale survey data.
E-mail: p.lugtig@uu.nl

Vera Toepoel is *assistant professor* aan de Universiteit Utrecht en geeft onderwijs over en doet onderzoek naar survey methodologie.
E-mail: v.toepoel@uu.nl

Marieke Haan is postdoctoraal onderzoeker aan de Universiteit Utrecht en onderzoekt het communicatieproces van het survey-interview zowel online als offline.
E-mail: m.haan@uu.nl

Barry Schouten is senior methodoloog bij het Centraal Bureau voor de Statistiek, bijzonder hoogleraar aan de Universiteit Utrecht en geïnteresseerd in mixed-mode survey designs.
E-mail: jg.schouten@cbs.nl

1, 5, 17, 85

Hoewel ik het lang had zien aankomen werd ik onlangs, toch tot mijn verrassing, 85; de 58 leek nog maar kort geleden. De delers van 85 staan hier boven. Ik kan m'n leven dus indelen in perioden van één jaar, van vijf jaar, van 17 jaar en van 85 jaar. De eerste en laatste mogelijkheid komen eigenlijk op hetzelfde neer: je hele leven. Perioden van vijf jaar zijn te kort. Veel perioden in je leven zijn langer dan vijf jaar: je lagere schooltijd, je middelbare schooltijd, je studententijd of je eerste baan. Perioden van zeventien jaar zijn prima. Daarover straks meer. Ter zijde: de Heeren XVII (17) van de VOC waren in zekere zin de eerste statistici in Nederland.

Op mijn nulde jaar werd ik in Tubbergen geboren. Dat werd onlangs in Tubbergen gevierd. Een lokale journalist had mensen bij elkaar gezocht die niet alleen in Tubbergen geboren waren maar bovendien in het bezit waren van een doctorstitel. Aanleiding was het feit dat Herman Schaepman, voorvechter van de katholieke emancipatie, tot die categorie behoorde. Er kwamen zo'n 35 Tubbergense doctores opdagen, vaak met partners. Ik was de oudste, de jongste was een vrouw van 26. Er waren ongeveer evenveel mannelijke als vrouwelijke doctores.

Lang voor mijn zeventiende verjaardag verhuisde ik naar Haaksbergen. Daar maakte ik de tweede wereldoorlog mee, gemarkeerd door een bombardement op 24 maart 1945, waarbij mijn tweelingzus omkwam. Vanuit Haaksbergen ging ik naar school in Hengelo. Op mijn zeventiende verjaardag zat ik in de vierde klas van het gymnasium. Ik heb sinds een jaar of vijftien een regelmatige reünie met mijn eindexamenklas. Nog een stuk of tien van de ooit 16; sommigen verhuisd, sommigen overleden, sommigen niet geïnteresseerd.

Toen ik 34 werd, was ik wetenschappelijk medewerker aan de UT (toen nog Technische Hogeschool Twente) in Enschede. Van daaruit ging ik het collegejaar 1969 – 1970 naar de University of Texas in Austin. Mijn jaarsalaris bedroeg 12.500 dollar, toen 45.000 gulden; vond ik heel veel; veel meer dan mijn salaris in Enschede. Op mijn 51ste schreef ik een artikel met twee coauteurs met wie het tragisch is afgelopen. Daarna is er nog wel het een en ander gebeurd, maar niets om hier te vermelden. Ik was 68 toen *STAtOR* startte. Ik zat een korte tijd in de redactie; daarna schreef ik alleen nog columns.

Ik verwacht niet dat ik zes maal zeventien jaar zal worden. Ook dat is statistiek.

Fred Steutel was emeritus hoogleraar kansrekening aan de TU Eindhoven. Hij overleed op 1 juni 2017.

Fred stuurde zijn columns altijd ruim voor de deadline in. Dikwijls hadden we er zelfs een in voorraad. Zo ook ditmaal. Bovenstaande column stuurde hij in april van dit jaar om te gebruiken in nummer 2017-2. Maar enkele dagen later stuurde hij een column met gedachten over Hemelrijk met de opmerking dat we de eerdere column maar moesten laten liggen voor het volgende nummer. Vandaar dat we deze column nu postuum kunnen plaatsen. We mogen het beschouwen als een onvoltooide, want Fred was van plan nog een opmerking van Gerrit Stemerdink te verwerken. Die had gezien dat 85 op een elegante wiskundige manier te schrijven was: $\sum_{n=0}^{3} 2^{2n}$.

Fred vond dat leuk genoeg om toe te voegen, maar hij kwam er niet meer aan toe: nog geen twee weken later was hij overleden.

Foto: Rien Meulman

STAtOR gedenkt Fred Steutel

eloquent, inspirerend, humoristisch en wars van prietpraat

Na het nul-nummer van *STAtOR* van april 2000, dat door een ad-hoc redactie was samengesteld, werd een permanente redactie gevormd door iedere sectie te vragen een lid hiervoor te leveren. Op die manier leerde ik Fred Steutel kennen, hij werd redactielid namens de Sectie Mathematische Statistiek en ik namens de Sectie Statistische Programmatuur. Ik had Fred al eerder enkele malen terloops ontmoet op het kantoor van het ISI in Voorburg, hij leverde daar een bijdrage aan het tijdschrift *Statistical Theory and Methodology Abstracts* dat door het ISI werd uitgegeven. En natuurlijk kende ik Fred van de Problem Section in *Statistica Neerlandica*. Vanwege die functie had ik een heilig ontzag voor hem, hij moest wel héél knap zijn om al die problemen te vinden of zelf te bedenken en ze dan ook nog vaak zelf op te lossen. Meer dan met welke andere hoogleraar bracht dit mij er toe een beetje afstand te houden van Fred, hij behoorde voor mij tot een soort buitenaardse categorie. Maar na heel korte tijd samen in de redactie veranderde mijn beeld van Fred compleet. Hij bleek een ongelooflijk toegankelijke, aardige en humoristische persoon te zijn. Hoewel ik 10 jaar jonger was, beschouwden we onszelf als de senioren van de redactie en gedroegen we ons een enkele maal onbedoeld als de heren Statler en Waldorf uit Sesamstraat.

We hebben samen ruim 17 jaar deel uitgemaakt van de *STAtOR*-redactie, al beperkte Fred zich de laatste jaren tot het leveren van zijn columns. Hij kende heel statistisch Nederland en veel suggesties voor mogelijke artikelen kwamen dan ook van zijn kant, over heel verschillende aspecten van ons vakgebied. Over veel zaken dachten we hetzelfde, de taal moest helder zijn en het onderwerp relevant. Artikelen die verkapte advertenties waren, werden door hem zonder meer afgekeurd. Fred was bijzonder alert op een correct taalgebruik en ik heb het dan ook als een enorme eer beschouwd dat ik op een gegeven ogenblik toestemming kreeg kleine correcties in zijn teksten aan te brengen zonder dat voorafgaand met hem te overleggen. Dit was kennelijk zo uitzonderlijk dat zijn echtgenote Vita het ternauwernood kon geloven toen ik haar dit vertelde.

Ik heb genoten van al die jaren met Fred in de redactie en ik zal hem dan ook erg missen.

Gerrit Stemerdink, eindredacteur vanaf 2000

Ik herken me volledig in de bovenstaande tekst van Gerrit. Freds vermogen om op een zeer begrijpelijke, onderhoudende en geestige wijze over statistische onderwerpen te schrijven, heb ik altijd erg gewaardeerd en bewonderd. Verder zijn ook zijn enorme gedrevenheid en betrouwbaarheid mij bijgebleven. Ik wil graag benadrukken hoe prettig en inspirerend het was om met Fred samen te werken.

Dick den Hertog, hoofdredacteur van 2000 - 2005

Ik had de eer om als hoofdredacteur van 2005 tot 2010 met Fred samen te werken en herken veel in de woorden van Gerrit. Fred was in die tijd zeer trouw in de vergaderingen en ons jaarlijkse etentje, waarbij hij veel waarde hechtte aan de kwaliteit van de eetlocatie. Al snel bewonderde ik Fred hoe hij met humor en puntige zinnen vlotte columns wist te schrijven. Bij Fred voelde ik me ter plekke een ongelooflijk jonkie met een netwerk van niks, gegeven de grote hoeveelheid internationale wiskundigen die hij kende en gekend had. Daarbij had hij een voorliefde voor de wiskundige vrouwen, getuige ook zijn *STAtOR*-column uit 2006 'Met Statistiek meer vrouwen in de politiek'. Daarnaast had Fred de kracht om van – in mijn ogen – kleine punten in een column toch een groot punt te maken. Fred was wars van alles wat commercieel rook en hij was dan ook het geweten in de redactie om de objectiviteit van de artikelen te waarborgen. Het was een grote eer om met Fred samen te werken, die ondanks zijn hoge 85-jarige leeftijd tot het laatst toe zijn bijdrage geleverd heeft.

Goos Kant, hoofdredacteur van 2005 – 2010

Als derde hoofdredacteur volgde ik Dick den Hertog en Goos Kant op. Beiden hebben altijd een *STAtOR* mét Fred gekend, ik moet nu een *STAtOR* zónder Fred leren kennen.

Gelukkig heb ik de eer gehad zeven jaar lang Fred mee te mogen maken. Een inspirerende man, die aan een onmetelijke kennis een uitzonderlijk lange en rijke actieve levenservaring paarde. Zelf ben ik gezegend met een vader die de leeftijd van 88 nadert met een gezond lichaam en een scherpe geest. Fred deed me vaak aan mijn vader denken. Nu weer. Ook Fred toont aan wat we allemaal weten: leven op aarde is eindig.

Fred wist tot zijn laatste moment zijn grote liefde voor wiskunde en in het bijzonder de statistiek te beoefenen. En in zijn columns kon hij uiting geven aan alle andere zaken die hem bezig hielden door die, altijd op een meesterlijke wijze, met de statistiek te verbinden. Het lukte hem diepzinnige en vaak moeilijke onderwerpen te verwoorden in taal die een kind zou begrijpen. Een zeldzame gave waar de wereld veel aan heeft. Fred zal het helaas niet meer doen, maar gelukkig voor *STAtOR* en al haar lezers heeft hij ons een rijk legaat aan columns geschonken.

Ik mocht Fred voor het laatst zien bij zijn uitvaart. Het was een bijzondere eer om zijn familie en vele vrienden te mogen vergezellen bij een zo aangrijpende gebeurtenis. Ook daar, in de gedachten die velen met de aanwezigen hebben gedeeld, herkende ik 'mijn' Fred. Klein van postuur maar groot van intellect, en altijd scherp. En bovendien, hoe gevoelig ook het gekozen onderwerp, altijd correct. Iemand die kon strijden met een ongekende eloquentie. Ook politici kunnen van hem leren.

Fred, veel dank voor de inspiratie die je me hebt gegeven.

Joaquim Gromicho, hoofdredacteur vanaf 2010

Fred Steutel (1931–2017)

Op 1 juni 2017 is Frederik Willem (Fred) Steutel, volstrekt onverwacht, vredig in zijn slaap overleden – media vita in morte sumus*. Wie was Fred Steutel? Dat is het onderwerp van het navolgende levensbericht waarin een schets wordt gegeven van zijn loopbaan als docent en wiskundige, zijn schrijverschap als columnist, de aard van zijn vriendschap en zijn sportactiviteiten.

Universitaire (voor)opleiding en wetenschappelijke carrière

Fred werd geboren in Tubbergen op 17 november 1931. Hij bezocht de lagere school in Haaksbergen en 'genoot' vervolgens – dat was gedurende het laatste oorlogsjaar; van het onderwijs kwam weinig terecht – één jaar Uitgebreid Lager Onderwijs aldaar. Na het behalen van het gymnasiumdiploma in Hengelo ging hij twee jaar in militaire dienst. Hij studeerde wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam (UvA); J. de Groot, hoogleraar topologie aldaar, beoordeelde zijn aanleg voor wiskunde als 'zeer goed, maar niet briljant', een kwalificatie waarin Fred zich, ook later, goed kon vinden. Na zijn kandidaatsexamen in 1956 – het doctoraal legde hij af in 1961 – was hij tot 1964 werkzaam bij de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, het huidige Centrum voor Wiskunde en Informatica.

In 1964 deed zich de gelegenheid voor terug te keren naar zijn geboortestreek en Fred werd, met een zevental anderen, onder wie ikzelf, op voorstel van I.W. van Spiegel benoemd tot wetenschappelijk medewerker aan de in november 1961 opgerichte Technische Hogeschool Twente (THT); de eerste colleges, oefeningen en practica werden gegeven in september 1964. Na Van Spiegel werden, in de beginjaren, achtereenvolgens benoemd de hoogleraren A.J.W. Duijvestijn (numerieke wiskunde), T.J. Terpstra (stochastiek), E.M. de Jager (mathematische fysica) en P.J. Zandbergen (toegepaste wiskunde). Allengs werden de medewerkers over de leerstoelen verdeeld en Fred – dat lag voor de hand – werd toegevoegd aan die van Terpstra. Het is wellicht interessant te vermelden dat de wiskundigen bestuurlijk waren ondergebracht bij één der afdelingen Elektrotechniek, Chemische Technologie en Werktuigbouwkunde, en niet, zoals in de beginjaren van Delft en Eindhoven, een onderafdeling waren van de afdeling Algemene Wetenschappen.

Op de THT heb ik Fred dus voor het eerst ontmoet. Onze gezinnetjes woonden vlak bij elkaar in het mooie Park de Kotten, op fietsafstand van de campus. Destijds was ik bezig met mijn dissertatie en bij het afronden daarvan heb ik veel profijt gehad van Freds grondige kennis van de analyse. Ik wist hem te interesseren voor problemen in de approximatietheorie en van die tijd dateert onze samenwerking. Samen hebben we, door de jaren heen, naast een aantal rapporten ook dertien artikelen geschreven. Centraal daarin staat de bepaling van de *graad van approximatie* van continue functies met welomschreven gladheidseigenschappen door algebraïsche polynomen, waaronder die van de Russische wiskundige S.N. Bernstein (1880–1968) (Schurer & Steutel, 1977). Voor continue 2π-periodieke functies met analoge eigenschappen hebben we soortgelijk onderzoek verricht en dan met name voor singuliere integralen, genoemd naar de Amerikaanse wiskundige Dunham Jackson (1888–1946) (Schurer & Steutel, 1967). De operatoren die in de genoemde approximatiemethoden als intermediair fungeren, i.e. die aan de beschouwde functie de bijbehorende benadering toevoegen, zijn, behalve lineair, positief: het beeld van een niet-negatieve functie is ook weer niet-negatief op het beschouwde interval. Dergelijke operatoren zijn, vanwege hun elegante eigenschappen, sinds de jaren vijftig van de vorige eeuw diepgaand bestudeerd in de approximatietheorie. Dit onderwerp afsluitend, de jaren van onze samenwerking overziende, stel ik vast dat Fred, naast mijn promotor P.C. Sikkema en de Amerikaanse hoogleraar E.W. Cheney (door zijn groot netwerk wel eens '*the smoothest operator in approximation theory*' genoemd) in belangrijke mate heeft bijgedragen aan mijn wetenschappelijke ontwikkeling.

Gedurende het studiejaar 1969–1970 doceerde en studeerde Fred aan de University of Texas at Austin. Deze keuze was niet geheel toevallig: ik was daar twee jaar eerder geweest, dankzij een NATO Science Fellowship van de in 1950 opgerichte Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek. In 1973 werd Fred, mede op voorspraak van de hoogleraren Roel Doornbos en Jaap Wessels, benoemd aan de Technische Hogeschool Eindhoven tot lector in de wiskunde, in het bijzonder kansrekening en statistiek; in 1980 werd hij hoogleraar. Intussen (1971) was hij gepromoveerd aan de UvA op een proefschrift over oneindige deelbaarheid van kansverdelingen (Steutel, 1970); J.Th. (Theo) Runnenburg was zijn promotor. Gaandeweg ontwikkelde Fred zich tot een vooraanstaand wetenschapper; zo was hij gedurende de zomers van 1970 (aansluitend op het verblijf in Austin) en 1974 'research associate' in Rochester en in 1979 gasthoogleraar aan de Johns Hopkins University in Baltimore. In 2004 verscheen, met zijn eerste promovendus Klaas van Harn als coauteur, de lijvige monografie (Steutel & Van Harn, 2004) over oneindige deelbaarheid; het boek lijkt intussen te zijn uitgegroeid tot het standaardwerk over dit onderdeel van de kansrekening.

In 1996 ging hij met emeritaat. In zijn afscheidscollege *Laatste kansen* (Steutel, 1996), een terugblik op de afgelegde weg, legt hij onder andere verantwoording af over zijn bijdragen aan onderwijs, onderzoek en bestuur. Hoewel Fred in veel commissies binnen en buiten de faculteit heeft gezeten, stelt hij – ik denk zonder spijt – vast dat hij zich niet tot een bestuurder heeft ontwikkeld. Over zijn functioneren als docent is hij niet bijzonder tevreden (Steutel, 1996, p. 17) en dat geldt dan met name het geven van grootschalig onderwijs; inderdaad, door zijn niet vérdragende en soms wat haperende stem, door zijn bescheidenheid en zich wars te betonen van toneel en theater, was hij minder geschikt voor colleges voor grote aantallen studenten. Toch gaf hij graag onderwijs. Zonder twijfel lag Freds grootste kracht in het onderzoek en hij heeft, ook in samenwerking met anderen (voor wie hij vaak een stimulans was), daaraan veel vreugde en voldoening ontleend. Zijn wetenschappelijk werk omvat ongeveer zeventig artikelen, congresverslagen en rapporten; verder heeft hij een groot aantal voordrachten gehouden, in Oberwolfach natuurlijk, maar ook in exotische plaatsen als Hanoi in Vietnam, Isfahan in Iran en Tashkent in Oezbekistan. Na Van Harn heeft Fred nog drie andere promovendi gehad en hij was vier keer tweede promotor.

Fred hield van 'sommetjes maken'; hij was lid van de roemrijke Eindhovense groep O.P. Lossers, twaalf jaar redacteur van de Opgavenrubriek in *Statistica Neerlandica*, het tijdschrift van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research – in 2008 werd hij benoemd tot erelid – en nadien redacteur van de soortgelijke rubriek in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Een talent voor schrijven

Bij het samenstellen van dit herdenkingsartikel, tevens bedoeld als eerbetoon aan Fred, heb ik zijn afscheidscollege nog weer eens geraadpleegd. Het verging mij daarbij als bij het herlezen van sommige boeken van Willem Elsschot, *Lijmen* en *Het been* bijvoorbeeld. De rede heeft nog niets aan frisheid ingeboet, is, door de fijnzinnige humor en de puntige formuleringen, een genot om te lezen, bovendien voor mij een feest der herkenning omdat we in Twente en in Eindhoven tot dezelfde faculteit behoorden. Hier openbaarde zich een gave van Fred: de kunst om lenig proza te schrijven, ontdaan van opsmuk, beknopt, boeiend, met verrassende wendingen. Dat hij goed kon schrijven, dat hij daar plezier in had, was eerder al gebleken: regelmatig kwam men bijdragen van hem tegen in *de Volkskrant* en in *NRC Handelsblad*. Maar de drempel om een ingezonden brief in die kranten geplaatst te krijgen is hoog; hij had behoefte aan een vast podium. Zo nu en dan schreef hij ook stukjes in *Cursor*, de TU/e-periodiek, en rond de eeuwwende kreeg hij een eigen rubriek.

Fred behandelde – zijn belezenheid hielp hem daarbij – een breed scala aan onderwerpen: politiek, taal en literatuur, onderwijs en onderzoek, de opmars van het Engels in het wetenschappelijk onderwijs, waarvan hij een fervent tegenstander was, en 'Effe zeuren' was jarenlang een sieraad voor het blad. Van één zijner columns wil ik hier iets zeggen, ook al omdat het Freds bedrevenheid in het maken van limericks illustreert; het rijmpje heeft betrekking op een vermaard wiskundige. Ter inleiding het volgende. In het begin van de jaren tachtig werd door W.J. Deetman, minister van Onderwijs en Wetenschappen, de pensioengerechtigde leeftijd van hoogleraren verlaagd van 70 naar 65 jaar. Ongeveer twintig jaar later, in 2005, komt Fred daarop terug. In de bewuste column (Konings & Span, 2011) hekelt hij het benoemen tot hoogleraar aan onze universiteiten van Bekende Nederlanders die niet of nauwelijks op wetenschappelijke prestaties kunnen bogen – 'de pronkprofessor verkleutert het hoogleraarsambt' – en plaatst daartegenover het gedwongen terugtreden van prominente wetenschappers die nog lang niet uitgedoofd zijn en

graag hun onderwijs en onderzoek aan de universiteit willen voortzetten. Fred had hier met name – hoewel, niet letterlijk: in het stukje is sprake van ene professor De Wit – N.G. (Dick) de Bruijn (1918–2012) op het oog, die als gevolg van Deetmans oekaze met tegenzin in 1984 met emeritaat ging. Nu de limerick:

Geen vis in de wiskundevijver
betwistte zijn inzicht en ijver.
Nu, door Deetman genept,
op het droge geschept,
moet 'ie weg, maar het is toch een blijver.

Een blijver, inderdaad: De Bruijn was nog jarenlang na zijn terugtreden, samen met Fred en anderen, onder wie ikzelf, een trouw bezoeker van Huize Avondrood, de ruimte die de faculteit genereus ter beschikking stelde aan haar oud-medewerkers. Enkele jaren nadat hij zijn rubriek bij *Cursor* kreeg, werd Fred medewerker van *STAtOR*; zijn eerste column verscheen in december 2002.

Een talent voor vriendschap

Naast een grote aanleg voor wiskunde en affiniteit met taal, had Fred *le talent de l'amitié* en volgens Adriaan Roland Holst (1888–1976), in een stukje (Roland Holst, 1975, p. 84) over de dichter en essayist Jan Greshoff, is dat een gave die zeldzamer is dan meestal wordt verondersteld; spottenderwijs noemt hij vriendschap de centrale verwarming van de ziel. Wat me bij Fred opviel was dat zijn vriendschap zo volstrekt *onbaatzuchtig* was, zo gespeend van mogelijk eigenbelang. Jan Hendrik Leopold (1865–1925), wel eens Neerlands 'meest verstilde dichter' genoemd, heeft een vriend – het vers is treffend van toepassing op Fred – als volgt gekarakteriseerd (Leopold, 1977, p. 206):

Een vriend is niet, die u aan 't hart wil sluiten
in uw geluksuur en zich niet genoeg doen kan,
maar die den balling bij zich binnen roept en dan
de deur toeslaat tegen de wolven buiten.

Ik memoreer in dit verband hier ook de bezoeken die hij bracht aan Theo Runnenburg tijdens diens laatste moeilijke en eenzame levensjaren; hart- en zielverwarmend en een illustratie van de *milk of human kindness* waarvan Fred zo veel in zich had.

Een passie voor sport

We hebben samen aan wiskunde gedaan, maar ook veel aan sport; medewerkers van universiteiten staan daartoe uitstekende faciliteiten ter beschikking. Fred hield van schaatsen op de kunstijsbaan in Eindhoven en als er natuurijs was, van tochten maken met Klaas van Harn op de Ankeveense Plassen en de Gouwzee, van tennissen (dat heeft hij tot op hoge leeftijd gedaan), maar joggen deed hij het liefst. Met z'n tweeën hebben we duizenden kilometers gelopen, in de middagpauze vanuit het Studentensportcentrum Eindhoven rondjes om de Karpendonkse Plas, halve marathons, trainen voor de eerste marathon in Eindhoven in oktober 1982 (Fred was toen bijna 51 jaar). Die liep hij in de uitstekende tijd van 3.16.01 uur; nadien heeft hij er nog vier gelopen. Aan dat samen joggen, ruim twee decennia lang, hebben we ongelooflijk veel plezier beleefd.

Uit het bovenstaande moge duidelijk zijn dat Frederik Willem Steutel – wiskundige, columnist, ingezonden brievenschrijver en sportman – begiftigd was met grote gaven, en dat hij daar anderen in ruime mate deelachtig aan heeft laten zijn. Zijn heengaan is een onherstelbaar verlies voor Vita, naar eigen zeggen dé vrouw in zijn leven, en hun twee kinderen, maar ook vele anderen zullen hem node missen. Ik verloor een dierbare vriend.

Frans Schurer

* Titel en eerste regel van een middeleeuwse antifoon.

Literatuur

Konings, J.L., & Span, B.E.M. (Red.). (2011). *Alle 80 goed! 17 november 2011 – Fred Steutel 80 jaar*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.

Leopold, J.H. (1977). *Verzen*. Amsterdam: G.A. van Oorschot.

Roland Holst, A. (1975). *In den verleden tijd*. Amsterdam: Boelen.

Schurer, F., & Steutel, F.W. (1967). On linear positive operators of the Jackson type. *Mathematica (Cluj)*, *9*(32), 155–184.

Schurer, F., & Steutel, F.W. (1977). The degree of local approximation of functions in $C_1[0,1]$ by Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory, 19*, 69–82.

Steutel, F.W. (1970). *Preservation of infinite divisibility under mixing, and related topics.* Amsterdam: Mathematisch Centrum (Mathematical Centre Tracts 33).

Steutel, F.W. (1996). *Laatste kansen*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.

Steutel, F.W., & Harn, K. van (2004). *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*. New York: Marcel Dekker (Pure and applied mathematics 259).

De navolgende artikelen over Oneindige Deelbaarheid en Bernstein-polynomen horen bij dit levensbericht en gaan in detail in op het daarin aangestipte onderzoek.

FRED STEUTEL EN 'ZIJN' ONEINDIGE DEELBAARHEID

KLAAS VAN HARN

Op 1 juni 2017 overleed, 85 jaar oud, Fred Steutel, emeritus hoogleraar aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Zijn wiskundige interesse betrof vooral de kansrekening, maar ook binnen de analyse heeft hij waardevolle bijdragen geleverd, met name op het gebied van de approximatietheorie; zie hiervoor het separate In Memoriam van Frans Schurer. Binnen de kansrekening raakte Fred gaandeweg steeds meer geïnteresseerd in de zogeheten oneindige deelbaarheid van kansverdelingen, een in feite heel eenvoudig concept, dat echter tot vele uitdagende vragen aanleiding geeft en vaak onverwacht in andere delen van de kansrekening opduikt. In het onderstaande wil ik iets hiervan duidelijk maken; dat doe ik niet alleen als oudste wetenschappelijke 'zoon' van Fred – ik was zijn eerste promovendus – maar ook als jarenlange co-auteur en vriend. Ik hoop dat mede hierdoor Fred nog lang in herinnering zal blijven, niet alleen als 'man van de oneindige deelbaarheid', maar ook als iemand die altijd de samenwerking zocht en anderen liet meeprofiteren van zijn brede kennis en inzichten.

Oneindige deelbaarheid: definitie en elementaire eigenschappen

Voor $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$ wordt een stochastische variabele X op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *n-deelbaar* genoemd indien

$$(1) \qquad X \overset{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_n,$$

met $Y_1, \ldots, Y_n$ onafhankelijk en gelijkverdeeld. Hierbij betekent $\overset{d}{=}$ gelijkheid in verdeling; ook de kansverdeling $\mathbb{P}_X$ van een *n*-deelbare X wordt *n*-deelbaar genoemd. Als ik me goed herinner heeft Fred ooit in de opgavenrubriek van *Statistica Neerlandica* gevraagd te bewijzen dat, enigszins verrassend, de *homogene* verdeling op [0, 1] *niet* 2-deelbaar is; dat is niet eens zo eenvoudig. We merken verder op dat bijvoorbeeld de *binomiale* verdeling met parameters 3 en (willekeurige) p ook niet 2-deelbaar is, maar natuurlijk wel 3-deelbaar.

Veronderstel dat we de totale schadeclaim X die jaarlijks bij een verzekeringsmaatschappij binnenkomt stochastisch willen modelleren. Omdat we X kunnen opdelen in de achtereenvolgende schadeclaims per maand ligt het voor de hand van X te eisen dat deze 12-deelbaar is. Maar men kan ook wekelijkse en zelfs dagelijkse claims beschouwen en eisen dat X ook 52- en 365-deelbaar is. Omdat $(n+1)$-deelbaarheid geen n-deelbaarheid impliceert, is het vervolgens veel praktischer te eisen dat X n-deelbaar is voor iedere n. Deze eigenschap van X wordt in de literatuur aangeduid als *oneindige deelbaarheid*. We blijven bij deze benaming, ook al is het mijns inziens beter te spreken van *onbeperkte* deelbaarheid; het is niet de bedoeling stochasten X te beschouwen die in verdeling gelijk zijn aan een oneindige som van onafhankelijke, gelijkverdeelde variabelen.

Behalve het praktische belang van oneindige deelbaarheid in modellering – ook bij bijvoorbeeld regenval of landopbrengst – is er een meer theoretisch belang in andere delen van de kansrekening. Voor we hiervan in de volgende sectie twee voorbeelden geven, richten we ons op enkele elementaire eigenschappen. Direct is duidelijk dat als X oneindig deelbaar is, dan ook aX voor iedere $a \in \mathbb{R}$, en dat $X + Y$ oneindig deelbaar is als X en Y onafhankelijk zijn en beide oneindig deelbaar. Anders gezegd: oneindige deelbaarheid van kansverdelingen wordt behouden onder schaalverandering en onder (eindige) convoluties. Minder triviaal, maar heel voor de hand liggend, is de eigenschap dat oneindige deelbaarheid ook behouden blijft onder limieten. Ten slotte merken we op:

> *Een begrensde stochastische variabele X kan niet oneindig deelbaar zijn, tenzij deze een ontaarde verdeling heeft.*

Een bewijs is snel gegeven: Neem in (1) maar varianties, merk op dat $|Y_1| \leq a/n$ als $|X| \leq a$, en laat $n \to \infty$. Hiermee zien we bijvoorbeeld (nog eens) dat de *homogene* en de *binomiale* verdeling *niet* oneindig deelbaar zijn. In zekere zin is het verrassend dat vele andere bekende verdelingen, indien voorzien van een onbegrensde drager, wel oneindig deelbaar zijn. Voor de *normale*, de *Cauchy*-, de *Laplace*-, de *gamma*-, de *negatief-binomiale* en de *Poisson*-verdeling is dit onder gebruikmaking van welbekende eigenschappen niet moeilijk te bewijzen. Voor bijvoorbeeld de *Gumbel*-verdeling – dan is $X \overset{d}{=} -\log Y$ met Y standaard-exponentieel verdeeld – is het al lastiger; maar omdat het hier om een zogeheten extreme-waarde-verdeling gaat, is oneindige deelbaarheid in dit geval toch op elementaire wijze aan te tonen. Dat ligt geheel anders voor de in de financiële wiskunde populaire *log-normale* verdeling – dan is $X \overset{d}{=} e^Y$ met Y standaard-normaal verdeeld –; we komen hier op terug.

Twee toepassingsgebieden in de kansrekening

Het begrip 'oneindige deelbaarheid van kansverdelingen' werd in 1929 geïntroduceerd door De Finetti en in de jaren dertig verder bestudeerd door bekende kansrekenaars als Kolmogorov, Lévy en Khintchine. Als aanleiding kan hiervoor gezien worden de behoefte aan een continue-tijd analogon van een *stochastische wandeling*, dit is een (discrete-tijd) proces $(S_n)_{n \in Z_+}$ van opvolgende partieelsommen bij een rij van onafhankelijke, gelijkverdeelde grootheden (de stappen van de wandeling). Uiteindelijk kwam men voor dit analogon uit op een *proces met stationaire en onafhankelijke aangroeiingen*, ook wel *Lévy-proces* genoemd. Dit is, per definitie, een proces $(S(t))_{t \geq 0}$ met de volgende eigenschappen:

$$\begin{cases} S(t),\ S(t+u)-S(t),\ S(t+u+v)-S(t+u), \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \text{onafhankelijk voor } t,u,v,\ldots > 0, \\ S(t+u)-S(t) \overset{d}{=} S(u) \text{ voor } t,u > 0. \end{cases}$$

Het is niet moeilijk te bewijzen dat, onder een milde regulariteitsvoorwaarde, de eindig-dimensionale verdelingen van zo'n proces volkomen bepaald worden door de verdeling van $X := S(1)$ en dat deze 'generator' X van het proces *oneindig deelbaar* is. Lévy-processen zijn belangrijke ingrediënten van financieel wiskundige modellen; wanneer men in dit verband de bovengenoemde log-normale verdeling wil hanteren, zal deze verdeling dus oneindig deelbaar moeten zijn.

Een tweede toepassingsgebied betreft het zogeheten *Centrale Limietprobleem*, waaraan ook in de jaren dertig veel aandacht is besteed. In de eenvoudigste variant zijn we, onder andere, geïnteresseerd in de mogelijke *limietverdelingen* van geschikt genormeerde partieelsommen S_n bij een rij van onafhankelijke, gelijkverdeelde grootheden. Wanneer deze grootheden een eindige variantie hebben, is er volgens de Centrale Limietstelling eigenlijk maar één mogelijkheid: na standaardisatie van S_n krijgen we in de limiet een standaard-*normale* verdeling. Maar in het algemeen worden op deze wijze de zogeheten *zwak stabiele* verdelingen verkregen. We beperken ons tot (strikte) stabiliteit, die als volgt kan worden gedefinieerd: een stochastische variabele X heeft een *stabiele* verdeling indien voor zekere $\gamma \in (0, 2]$, de *exponent* van de verdeling, geldt dat

$$(2) \qquad X \overset{d}{=} \frac{1}{n^{1/\gamma}}\,(X_1 + \cdots + X_n) \qquad [n \in \mathbb{N}],$$

met $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijk en $\overset{d}{=} X$. Behalve de standaard-normale verdeling (stabiel met exponent $\gamma = 2$) treedt nu bijvoorbeeld ook de standaard-*Cauchy*-verdeling op als limietverdeling; deze is stabiel met exponent $\gamma = 1$. Wanneer we toestaan dat de (gemeenschappelijke) verdeling van de voor S_n te sommeren grootheden van n afhangt, krijgen we de *oneindig deelbare* verdelingen als mogelijke limietverdelingen. De stabiele verdelingen zijn dus alle oneindig deelbaar; maar dat volgt natuurlijk ook direct uit de definities rond (1) en (2). Wanneer we in het voorgaande, onder andere, de eis van gelijke verdeling laten vallen, kunnen we uitkomen bij de zogeheten *zelf-ontbindbare* verdelingen; voor een X met een dergelijke verdeling geldt per definitie dat

$$(3) \qquad X \overset{d}{=} \alpha X + X_\alpha \qquad [0 < \alpha < 1],$$

met in het rechterlid X_α onafhankelijk van X. De zelf-ontbindbare verdelingen 'interpoleren' tussen de stabiele en de oneindig deelbare in de zin dat

$$(4) \qquad \{\text{stabiele } \mathbb{P}_X\} \subset \{\text{zelf-ontbindbare } \mathbb{P}_X\} \subset \{\text{oneindig deelbare } \mathbb{P}_X\}.$$

Bovendien zijn de zelf-ontbindbare verdelingen alle *absoluut-continu* en *unimodaal*: ze hebben een eentoppige kansdichtheid. Onder andere vanwege deze eigenschap zijn de zelf-ontbindbare verdelingen heel aantrekkelijk in allerlei modelleringssituaties.

Criteria; mengsels van exponentiële verdelingen

Het is natuurlijk van belang precies te kunnen aangeven welke verdelingen oneindig deelbaar zijn. In principe wordt dit probleem opgelost door de in de jaren dertig afgeleide *canonieke voorstellingen* voor hun karakteristieke functies. Maar bij het vaststellen of een gegeven verdeling oneindig deelbaar is, helpen deze voorstellingen doorgaans niet. Pas in de jaren zestig werden er nuttige criteria voor oneindige deelbaarheid geformuleerd in termen van de kansverdelingen zelf, en werden er aantrekkelijke deelklassen van oneindig deelbare verdelingen, anders dan die in (4), geïdentificeerd.

Een belangrijk resultaat in dit verband is het Goldie-Steutel theorema; deze stelling zegt dat alle verdelingen op $(0, \infty)$ met een compleet monotone dichtheid oneindig deelbaar zijn. Hierbij wordt een functie f op $(0, \infty)$ *compleet monotoon* genoemd indien f alternerende afgeleiden heeft:

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \qquad [x > 0;\, n \in \mathbb{Z}_+].$$

Anders dan Charles Goldie maakte Fred gebruik van het feit dat, volgens de zogeheten stelling van Bernstein, een compleet monotone dichtheid op te vatten is als een *mengsel van exponentiële dichtheden* en van het feit dat een exponentiële dichtheid f voldoet aan de functionaalvergelijking

$$(5) \qquad x f(x) = \int_{[0,x]} f(x-y)\, dK(y) \qquad [x > 0],$$

voor een rechts-continue, niet-dalende functie K met $K(x) = 0$ voor $x < 0$. Al eerder had hij aangetoond dat de functionaalvergelijking in (5) de (continue) oneindig deelbare kansdichtheden op $(0, \infty)$ karakteriseert. Freds aanpak gaf aanleiding tot vele aanvullende resultaten en generalisaties; zie zijn proefschrift [6] uit 1970 en ons 'oneindig deelbaar boek' [8] uit 2004. Zo kan voor dichtheden f op geheel $\mathbb{R}$ bewezen worden dat f oneindig deelbaar is zodra zowel $x \mapsto f(x)$ als $x \mapsto f(-x)$ compleet monotoon is op $(0, \infty)$.

Er is een discreet analogon van (5): een kansverdeling $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ op $\mathbb{Z}_+$ met $p_0 > 0$ is oneindig deelbaar als en alleen als $r_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_+$, waarbij deze r_n-en recursief gedefinieerd worden door

$$(6) \qquad (n+1)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k r_{n-k} \qquad [n \in \mathbb{Z}_+].$$

Met behulp hiervan heeft Fred laten zien dat een *log-convexe* verdeling (p_k), waarvoor $p_k^2 \leq p_{k-1}\, p_{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, oneindig deelbaar is en, door discretisatie, dat ook een *log-convexe* kansdichtheid f op $(0, \infty)$ – dan is $\log f$ convex; algemener dan complete monotonie – oneindig deelbaar is. Aldus geldt voor kansdichtheden op $(0, \infty)$:

$$(7) \qquad \{\text{compleet monotone } f\} \subset \{\text{log-convexe } f\} \subset \{\text{oneindig deelbare } f\}.$$

Het is, voor zover ik weet, nog een open probleem of een dichtheid f op $\mathbb{R}$ oneindig deelbaar is zodra de functies $x \mapsto f(x)$ en $x \mapsto f(-x)$ beide log-convex zijn op $(0, \infty)$.

Discrete stabiliteit en zelf-ontbindbaarheid

In de wetenschap is *serendipiteit* een veel voorkomend verschijnsel: men is op zoek naar iets, maar vindt al zoekende iets geheel anders, dat vaak nog interessanter is. Iets dergelijks overkwam Fred en mij toen we in het kader van mijn promotie-onderzoek (zie [3]) voor $\alpha \in [0,1]$ de klasse C_α van kansverdelingen (p_k) op $\mathbb{Z}_+$ beschouwden waarvoor er $r_n(\alpha) \geq 0$ met $n \in \mathbb{Z}_+$ zijn zó dat

$$(8) \qquad (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k r_{n-k}(\alpha) \qquad [n \in \mathbb{Z}_+].$$

Merk op dat C_1 wegens (6) de klasse is van álle oneindig deelbare verdelingen op $\mathbb{Z}_+$; we wilden aantonen dat C_α monotoon afhangt van α. Dat dit uiteindelijk lukte, was een doorbraak in mijn onderzoek, maar veel belangwekkender was dat een en ander leidde tot een karakterisering van oneindige deelbaarheid op $\mathbb{Z}_+$ die in termen van getransformeerden veel weg heeft van de definiërende gelijkheid (3) voor zelf-ontbindbaarheid. Dat bracht Fred op het lumineuze – en, naar later bleek, zeer vruchtbare – idee om op zoek te gaan naar *geheelwaardige fracties* van geheelwaardige stochastische variabelen X. Weliswaar had de door C_α geleverde kandidaat nog niet de gewenste eigenschappen van een vermenigvuldiging, maar eenmaal op dit spoor was het niet moeilijk meer een goede, en eenvoudige, keuze te maken: voor $\alpha \in [0, 1]$ en $\mathbb{Z}_+$-waardige stochasten X wordt $\alpha \odot X$ gedefinieerd als

$$(9) \qquad \alpha \odot X := Z_1 + \cdots + Z_X,$$

met $Z_1, Z_2, \ldots$ onafhankelijk, ook onafhankelijk van X, en alle alternatief (α) verdeeld op $\{0, 1\}$. Merk op dat voor $n \in \mathbb{Z}_+$ de fractie $\alpha \odot n$ geen constante (meer) is, maar een binomiaal (n, α) verdeelde stochast; de operatie $\odot$ werd daarom door anderen later wel *binomial thinning* genoemd. Merk verder op dat $\alpha \odot X$ een verwachting heeft zoals gewenst, namelijk gelijk aan $\alpha\, \mathbb{E}X$.

Een zelf-ontbindbare verdeling is noodzakelijk absoluut-continu, zodat een $\mathbb{Z}_+$-waardige stochastische variabele X niet zelf-ontbindbaar kan zijn in klassieke zin. Maar met de gevonden geheelwaardige fractie kunnen we *discrete stabiliteit* en *discrete zelf-ontbindbaarheid* van X definiëren door een simpele aanpassing van de gelijkheden in (2) en (3):

$$(10) \qquad X \stackrel{d}{=} \frac{1}{n^{1/\gamma}} \odot (X_1 + \cdots + X_n), \qquad \text{respectievelijk } X \stackrel{d}{=} \alpha \odot X + X_\alpha.$$

De discreet zelf-ontbindbare verdelingen op $\mathbb{Z}_+$ blijken, analoog aan het continue geval, te interpoleren tussen de discreet stabiele en de oneindig deelbare; bovendien zijn ze unimodaal. Deze en andere basiseigenschappen zijn, behalve in [3] en [8], te vinden in een artikel [7] in de *Annals of Probability* van 1979, dat ontzettend veel vervolgonderzoek heeft gegenereerd. Fred hield graag de citatiescore van het artikel bij; volgens Google Scholar staat het aantal artikelen dat naar het onze verwijst nu op 491. Een van die artikelen suggereert dat de discreet stabiele verdelingen op $\mathbb{Z}_+$ (waaronder de Poisson-verdeling; neem $\gamma = 1$) een rol (kunnen gaan) spelen in de statistische mechanica van zwarte gaten en in een nieuwe theorie voor de werking van de zwaartekracht.

In de jaren tachtig hebben we de geheelwaardige fracties gegeneraliseerd door middel van compositie-halfgroepen van kansgenererende functies zoals die voorkomen bij sub-kritische vertakkingsprocessen en op allerlei gebieden toegepast. Dit gebeurde soms in samenwerking met Wim Vervaat en met Jim Wolfe, die overigens beiden een tragisch levenseinde hebben gekend. In die tijd waren er ook stimulerende contacten met Freds promotor Theo Runnenburg en met Piet Holewijn, Guus Balkema en Laurens de Haan.

Een extreem geval van de inspectieparadox

Jarenlang heeft Fred in zijn onderwijs aandacht besteed aan vernieuwingstheorie. Maar pas vlak voor hij in 1996 met emeritaat ging, werd duidelijk welke bijzondere rol oneindige deelbaarheid speelt in dit deel van de kansrekening. Het schrijven van het 'oneindig deelbaar boek' [8], met de nodige aandacht voor ordening en detaillering, heeft zeker bijgedragen aan deze wederzijdse bevruchting van onderwijs en onderzoek, waar Fred naar eigen zeggen veel plezier aan heeft beleefd.

In de vernieuwingscontext gaan we uit van onafhankelijke, niet-negatieve stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots$, de *levensduren* (van achtereenvolgens ingeschakelde onderdelen), die alle dezelfde verdeling hebben, zeg $\stackrel{d}{=} X$; we beperken ons hier tot het geval waarin X absoluut-continu verdeeld is met dichtheid f en een eindige verwachting μ heeft. Zij $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, het *n-de vernieuwingstijdstip*, en beschouw voor $t > 0$ het *aantal vernieuwingen* voor of op tijdstip t:

$$N(t) := \#(\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}),$$

welke grootheid eindig is met kans 1 wegens de sterke wet van grote aantallen. Inspecteer nu, voor $t > 0$, het onderdeel dat ten tijde t in bedrijf is; voor de levensduur hiervan, de *momentane levensduur* $L_X(t)$ *ten tijde* t, geldt:

$$L_X(t) = X_{N(t)+1}.$$

Men zou kunnen vermoeden dat deze (weliswaar speciale) levensduur dezelfde verdeling heeft als alle andere (gewone) levensduren: $L_X(t) \stackrel{d}{=} X$, maar dat is *niet* het geval; dit fenomeen staat bekend als de *inspectieparadox,* die ook wel *wachttijdparadox* wordt genoemd omdat levensduren ook als wachttijden kunnen worden opgevat. Een en ander wordt nog concreter wanneer $t \to \infty$; men kan bewijzen dat dan $L_X(t) \stackrel{d}{\to} L_X$, waarbij L_X absoluut-continu verdeeld is met dichtheid g gegeven door

$$(11) \qquad g(x) = \frac{1}{\mu}\, x f(x) \qquad [x > 0].$$

In de statistiek staat de verkregen verdeling wel bekend als de *length-biased* verdeling. Uit (11) volgt dat L_X stochastisch groter dan (of gelijk aan) X is in de zin dat voor alle a: $\mathbb{P}(L_X > a) \geq \mathbb{P}(X > a)$, en men zou zich kunnen afvragen voor welke levensduren X geldt dat

$$(12) \qquad L_X \stackrel{d}{=} X + Y \text{ met } X \text{ en } Y \geq 0 \textit{ onafhankelijk}.$$

Door de gelijkheid hierin in termen van dichtheden weer te geven en het resultaat te vergelijken met de functionaalvergelijking in (5), waarin noodzakelijk $\lim_{x \to \infty} K(x) = \mu$, concluderen we dat (12) geldt als en alleen als X *oneindig deelbaar* is! Ook de vernieuwingstheorie is dus een deelgebied van de kansrekening waarin oneindige deelbaarheid onverwacht opduikt.

Maar dit is nog niet alles. Neem voor de generieke levensduur X in het voorgaande de variabele $X(t)$ met $t > 0$, waarbij $(X(t))_{t \geq 0}$ een Lévy-proces is zoals hierboven gedefinieerd; behalve de generator $X(1)$ is ook $X(t)$ dan oneindig deelbaar. Dat betekent dat voor de momentane levensduur $L_{X(t)}$ de volgende decompositie geldt:

$$(13) \qquad L_{X(t)} \stackrel{d}{=} X(t) + Y(t) \text{ met } X(t) \text{ en } Y(t) \geq 0 \text{ onafhankelijk.}$$

Nu doet zich echter het opmerkelijke (en niet zo moeilijk te bewijzen) feit voor dat de 'additionele component' $Y(t)$ niet afhangt van t: $Y(t) = Y$ voor alle t. Laat nu $t \downarrow 0$, dan gaat de (gewone) levensduur $X(t)$ naar 0: $X(t) \stackrel{d}{\to} 0$, en men zou verwachten dat de momentane levensduur, hoewel stochastisch groter, dan ook naar 0 gaat. Dat is echter *niet* het geval:

$$(14)\qquad L_{X(t)} \xrightarrow{d} Y \qquad [t \downarrow 0].$$

Ingeval $X(1)$ exponentieel verdeeld is, blijkt Y dat ook te zijn; door dan $t = 1/(n-1)$ te nemen wordt duidelijk dat de inspectieparadox in dit geval een 'onbeperkt', en daarmee extreem, aspect krijgt:

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een levensduur X zó dat de corresponderende momentane levensduur L_X als onafhankelijke componenten n gewone levensduren heeft.

Voor meer informatie verwijzen we naar [4], en naar [8], waar ook enige aandacht aan discrete-tijd vernieuwingstheorie wordt besteed, met daarin een rol voor de geheelwaardige fractie van hierboven.

Het 'oneindig deelbaar boek'

Het voorgaande heeft slechts een aantal interessante aspecten van oneindige deelbaarheid kunnen aanstippen; enkele belangrijke bijdragen van Fred, min of meer in chronologische volgorde, stonden daarbij centraal. Een beter beeld van het onderwerp kan men natuurlijk krijgen door kennis te nemen van een goed geschreven boek. Maar behalve de proefschriften van Fred [6] en mij [3], en die van Freds promovendi Björn Hansen [2] en Roel Wilms [9] – zijn promovendus Aegle Hoekstra behandelde een ander onderwerp –, waren er eind jaren negentig eigenlijk maar twee toegankelijke werken beschikbaar met substantiële aandacht voor oneindige deelbaarheid: de monografie [1] van Lennart Bondesson over gegeneraliseerde gamma convoluties en die van Ken-iti Sato [5] over Lévy-processen. Met deze beide auteurs heeft Fred overigens samengewerkt en gepubliceerd.

Intussen was Fred echter door de redactie van uitgever Marcel Dekker (New York) benaderd om in de bekende serie 'Pure and Applied Mathematics' een monografie te schrijven over zijn onderzoek. Fred stemde met enige aarzeling toe en haalde mij over aan dit project mee te doen met de woorden: 'we schrijven wat leuke dingen op waar we iets van af weten.' Maar al snel stelden we onze doelen bij en streefden we naar een zo volledig mogelijke behandeling van de oneindig deelbare kansverdelingen op $\mathbb{R}$. Het was echter een gigantisch werk om de ontwikkelingen van vooral de laatste 25 jaar te ordenen en te verwerken in een toegankelijke tekst. Het aanvankelijk beoogde aantal van dertien hoofdstukken werd teruggebracht tot een zevental, waarbij nog steeds zoveel mogelijk gekozen werd voor een gescheiden behandeling van kansverdelingen op $\mathbb{R}$, die op $\mathbb{R}_+$ en die op $\mathbb{Z}_+$, met in elk van de drie gevallen aandacht voor canonieke voorstellingen, 'closure properties', momenten, drager, staartgedrag, log-convexiteit, stabiliteit, zelf-ontbindbaarheid, samengestelde verdelingen (met name samengesteld-Poisson en samengesteld-exponentieel) en mengsels. Van verreweg de meeste resultaten werden volledige bewijzen gegeven; maar bijvoorbeeld bij de behandeling van de gegeneraliseerde gamma convoluties werd voor een aantal (zeer) technische details (o.a. betreffende analytische voortzettingen van complexe functies) verwezen naar het boek van Bondesson. Overigens interpoleren de gegeneraliseerde gamma convoluties tussen de stabiele en de zelf-ontbindbare verdelingen, en bevatten zij de interessante klasse van verdelingen met een zogeheten *hyperbolisch compleet monotone* dichtheid. Slechts hiermee kan worden aangetoond dat de in het begin genoemde *log-normale* verdeling oneindig deelbaar is! Dit is maar een van de ruim honderd concrete voorbeelden die in zes van de zeven hoofdstukken voorkomen. Uiteindelijk heeft dit project zo'n twaalf jaar geduurd, eigenlijk veel te lang. Maar in 2004 verscheen dan toch een monografie [8] van ruim 550 pagina's. Het boek wordt veelvuldig aangehaald; volgens Google Scholar staat de citatiescore nu op 392.

Fred en ik hebben over het algemeen, vooral de laatste paar jaren, met veel plezier aan het boek gewerkt. Over de aanpak waren we het niet altijd eens, maar we kwamen er door goed overleg en respect voor elkaars kwaliteiten altijd uit. Aanvankelijk reisde ik vaak naar Eindhoven, waar Freds vrouw Vita mij bij de talloze lunches bij hen thuis altijd hartelijk en belangstellend ontving. Later, na zijn pensionering in 1996, kwam Fred veelal naar Amsterdam, waar mij, ook door de prettige samenwerking met Piet Holewijn, alle ruimte werd geboden het oneindig deelbare project af te ronden. Fred heeft zo zijn wetenschappelijke carrière op een bevredigende wijze kunnen afsluiten; het was een voorrecht daarbij betrokken te zijn. Zoals in de wandelgangen vaak van het 'oneindig deelbaar boek' werd (en wordt) gesproken, zo zou men ook kunnen spreken van een 'oneindig deelbare Fred', met de extra betekenis van een schier onbeperkt aantal mensen met wie Fred zijn kennis en inzichten – al dan niet gevraagd – wilde delen.

Literatuur

[1] Bondesson, L.(1992). *Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities.* Berlin: Springer (Lecture Notes in Statistics, 76).

[2] Hansen, B.G.(1988). *Monotonicity properties of infinitely divisible distributions.* Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven.

[3] Harn, K. van (1978). *Classifying infinitely divisible distributions by functional equations.* Amsterdam: Mathematisch Centrum (Mathematical Centre Tracts 103).

[4] Harn, K. van, & Steutel, F.W. (1995). Infinite divisibility and the waiting-time paradox. *Stochastics Models, 11(3)*, 527–540.

[5] Sato, K.(1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge: Cambridge University Press (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 68).

[6] Steutel, F.W. (1970). *Preservation of infinite divisibility under mixing, and related topics.* Amsterdam: Mathematisch Centrum (Mathematical Centre Tracts 33).

[7] Steutel, F.W., & Harn, K. van (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Annals of Probability 7*, 893–899.

[8] Steutel, F.W., & Harn, K. van (2004). *Infinite divisibility of probability distributions on the real line.* New York: Marcel Dekker (Pure and applied mathematics 259).

[9] Wilms, R.J.G. (1994). *Fractional parts of random variables: limit theorems and infinite divisibility.* Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven.

Bernstein-polynomen en beste approximatieconstanten

Frans Schurer

Zij $C_1[0,1]$ de verzameling van functies die gedefinieerd en continu-differentieerbaar zijn op het interval $[0,1]$. In [4] wordt de graad van approximatie onderzocht van functies in $C_1[0,1]$ met behulp van Bernstein-polynomen, gedefinieerd door

$$(1)\qquad (B_nf)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad \big[x \in [0,1];\ n \in \mathbb{N},\big];$$

uit het rechterlid van (1) blijkt dat B_n een *positieve* lineaire operator is. De polynomen (1) zijn door Bernstein [1] in 1912 gebruikt om een elegant en constructief bewijs te geven van de beroemde approximatiestelling (1885) van Weierstrass (1815–1897). De resultaten in [4] – de bepaling van beste approximatieconstanten en het asymptotisch gedrag daarvan – zijn vergelijkbaar met die van Sikkema [5] en Esseen [2], die rond 1960 soortgelijk onderzoek hebben verricht voor continue functies. Bij de introductie van de approximatieconstanten hebben we de continuiteitsmodulus ω_1 van de afgeleide van f nodig, gedefinieerd als volgt:

$$\omega_1(f;\delta) := \sup_{|x-y|\le\delta} \left|f'(x)-f'(y)\right| \qquad \big[x,y \in [0,1];\ \delta>0\big].$$

Zij nu

$$\begin{cases} c_n := \sup\limits_{f\in C_1[0,1]} \max\limits_{0\le x\le 1} \dfrac{n^{1/2}\left|(B_nf)(x)-f(x)\right|}{\omega_1(f;\,n^{-1/2})}, \\ c^{(j)} := \sup\limits_{n\ge j} c_n \qquad [j=1,2], \\ c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n. \end{cases}$$

Stelling. De constanten $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ en c hebben de volgende waarden:

$$(2)\qquad c^{(1)} = \frac{1}{4},$$

$$(3)\qquad c^{(2)} = c_5 = \frac{2\cdot 5^{1/2}-1}{16} \doteq 0.217008,$$

$$(4)\qquad c = (2\pi)^{-1/2}\left(\tfrac{1}{2}+\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2j^2}\right) - 2\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} j\left(1-\Phi(2j)\right) \doteq 0.207969,$$

waarbij $\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$ voor $x \in \mathbb{R}$.

Opmerkingen bij de stelling. Eerder is door Lorentz ([3], p.21) bewezen dat $c^{(1)} \le 3/4$. Het is wellicht instructief (2) te herformuleren in de volgende vorm: voor alle $f \in C_1[0,1]$ geldt

$$(5)\qquad \max_{0\le x\le 1}\left|(B_nf)(x)-f(x)\right| \le \frac{1}{4}\,\omega_1(f;\,n^{-1/2})\,n^{-1/2} \qquad [n\in\mathbb{N}],$$

waarbij de constante 1/4 in het rechterlid van (5) best mogelijk is, i.e. niet verder verscherpt kan worden. Bij het bewijs van (2) speelt de positiviteit van de operator B_n een essentiele rol. De afleiding van (3) is uiterst complex, vergelijkbaar met die in [5]. Bij het bewijs van (4) is gebruik gemaakt van de Berry-Esseen-versie van de Centrale Limietstelling.

Literatuur

[1] Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications of the Kharkov Mathematical Society* 2, Series XIII No 1, 1–2.

[2] Esseen, C.G. (1960). Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen. *Numerische Mathematik, 2*(1), 206–213.

[3] Lorentz, G.G. (1953). *Bernstein polynomials.* Toronto: University of Toronto Press.

[4] Schurer, F., & Steutel, F.W. (1977). The degree of local approximation of functions in $C_1[0,1]$ by Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory, 19*(1), 69–82.

[5] Sikkema, P.C.(1961). Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen. *Numerische Mathematik, 3*(1), 107–116.

Downtown Vancouver. Foto: Magnus Larsson (CC)

CUTTING STOKBROOD

Waarom mij gisteren mijn grootste academische teleurstelling te binnen schoot weet ik eigenlijk niet. Zo maar? Wel heb ik net voor de zoveelste keer mijn vliegreis naar Vancouver geboekt. In oktober zal het zijn. Dan loop ik rond op de campus van UBC en ruik weer de frisse zee- en maplegeuren van de Pacific North West.

Teleurstelling dus. Zo'n twintig jaar geleden inmiddels al weer. Ik zoek op Google naar 'Paul Gilmore'. In die tijd was hij al directeur van het computercentrum van UBC. Zou hij nog steeds actief zijn? Of ...? Mijn eerste hit is '*PC Gilmore Computer Center*'. PC zijn zijn initialen: Paul Carl. Het computercentrum op UBC heeft dus zijn naam gekregen.

Met Han Hoogeveen, indertijd student-assistent, werkte ik aan 'speciale gevallen' van het *Traveling Salesman Problem,* in de OR-mond TSP. Ik schrijf dit nog altijd met hoofdletters en in de mannelijke versie en in het Engels. Dus niet 'handelsreizigersprobleem' en ook niet *salesperson*. 'Opgelost' betekende dat je een *poly time* algoritme voor dat probleem had gevonden. Inderdaad ja: poly time. 'Speciaal' betekende dat de afstandenmatrix van dat probleem heel erg speciaal was. Onze afstandenmatrices voldeden aan de, toentertijd zeer bekende, Demidenko-condities. Maar zelfs ik weet nu niet meer wat die inhouden. De uitdrukking poly time roept, ook heden ten dage nog, bij menig *computer-science*-wiskundige warme gevoelens op. Vrijwel alle bekende speciale TSP-gevallen waren poly time. Echter, het geloof-in-het-bestaan van een poly time algoritme voor niet-speciale TSP's kende een snel slinkende stoet aanhangers. Voor het Demidenko-TSP was die hoop volop aanwezig: het mooie bewijs ontbrak. Totdat Han het licht zag.

Bloednerveus belde ik professor Gilmore op om hem te vertellen over dat 'poly time algoritme voor een aan Demidenko-condities gehoorzamend TSP'. Hij was direct enthousiast en nodigde me uit voor een voordracht erover. Ik achtte zijn enthousiasme hoog. Was hij niet de man van hoofdstuk vier? Moet ik ook even uitleggen.

Hoofdstuk vier betrof het vierde hoofdstuk uit het iconische TSP-boek onder redactie van vier operations researchgrootheden, waaronder onze landgenoten Lenstra en Rinnooy Kan. Paul Gilmore was een van de auteurs van hoofdstuk vier, dat de 'speciale gevallen' behandelde. Inderdaad, ook dat 'onopgeloste' Demidenko-probleem. Wij hadden dus Lenstra en Rinnooy Kan, maar de Canadezen hadden Gilmore, de man van hoofdstuk vier, maar meer nog de oplosser van het *Gilmore-Gomory Cutting Stock Problem*. Ook een probleem met speciale condities, en met een poly time algoritme.

Nerveus dus. Bloednerveus. Ik ging in Vancouver bewijzen dat Demidenko, net als *cutting stock* poly time is. De colloquiumzaal van het UBC-computercentrum zat vrijwel vol. Na de eerste vijf minuten werd ik onderbroken door een op de vierde rij zittende scherpogende jongeman van ongeveer mijn leeftijd met de vraag of ik in het bewijs wel rekening hield met ... Na al die jaren voel ik nog hoe de moed verhuisde van mijn hart naar de schoenen en het bloed naar mijn hoofd. Daar hadden we dus geen rekening mee gehouden. Stilte.

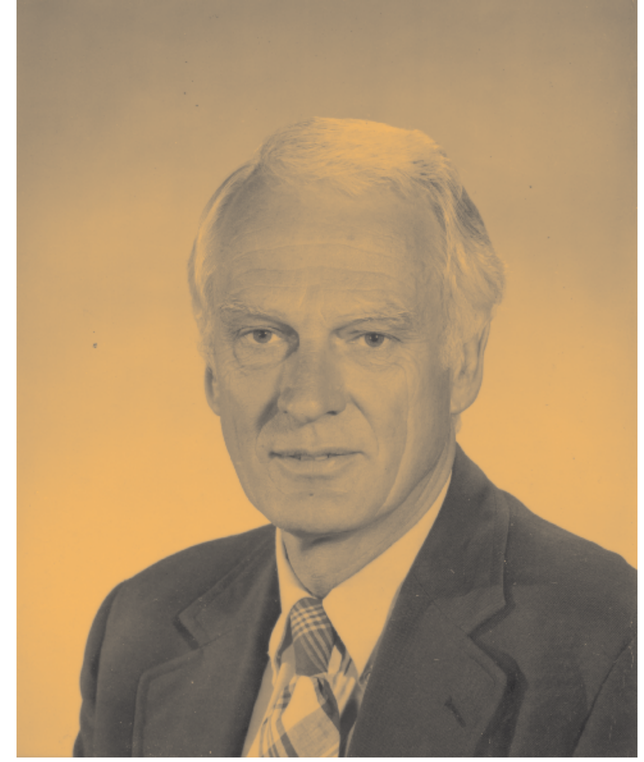
Ik keek naar Paul. Hij ging staan. Reeds grijzend, maar ook rijzig. Ik zag alleen zijn contouren in het tegenlicht van het raam met in de verte de wolkenkrabbers van de skyline van Vancouver. In niets deed hij denken aan de doorsnee morsige wiskundige van die tijd. Ik mompelde cut met k. Gilmore nam het woord in goed en duidelijk Nederlands, alleen bestemd voor mij: 'Ga door met je verhaal. Laat zien waar de omissie zit. Dat is ook interessant.' En vervolgens tot iedereen: 'Gerard continues his talk. Let's see where he misses something. And maybe we have ideas for repairing.' De fout stond op het laatste sheet. De reparatie bleef uit. Applaus.

Gilmore vond het eigenlijk wel spannend, vertelde hij me later. De vragensteller David Kirkpatrick was 'one of my smartest students'. Hij bood me een lunch aan in hartje Vancouver. Een dik half uur rijden langs trolleybussen en ruime, meestal beige-gele houten huizen. Door de voorruit leken de wolkenkrabbers van downtown imposanter en kleurrijker. Zelfs als we zaten leek hij een kop groter dan ik, al viel zijn gestalte in het niet tussen de skyscapers van hartje Vancouver. Hij heeft geloof ik niet gezien dat ik even heb zitten janken.

Zodra het verkeerslicht groen werd staakte ons gesprek vanwege de zes rijen dik voortrazende auto's met uitzicht op twee simultaan tegen elkaar in bewegende gevelliften. In zijn benenrichting had ik voorts uitzicht op een miniatuur van het Castle of Coevorden met poffertjeskraam. Inderdaad, Vancouver = Coevorden.

'Je mag wel Paul zeggen.' 'En jij wel Gerard' was mijn grapje. Dat Nederlands had hij van zijn Hollandse vrouw geleerd. Zijn lange benen drapeerde hij niet onder maar naast de tafel.

Paul bestelde een flinke homp stokbrood belegd met ham, tomaat, olijf en sla. Aan beide zijden stak het stokbrood ver over de bordrand. En toen gebeurde het. Paul pakt het mes en vouwt de openstaande homp dicht. Zijn benen staan loodrecht op het mes en dus ook op de snijrichting. De vork plaatst hij op ongeveer eenderde van een stokbrooduiteinde en dient als *fixed point*. Is het mes nou zo stomp, of het stokbrood zo weerbarstig? Geen idee. Wat ik wel weet, is dat duwen-zagen niet goed combineert met stokbroodsnijden. Tweederde deel schiet van bord en tafel. Een tot dan toe niet gespotte herdershond hapt toe en verdwijnt met het stuk stokbrood om de hoek van West Georgia Street. We hebben het nakijken. Paul mompelt 'cut'. Ik denk met een k. Zo werd Paul Gilmore onderdeel van mijn teleurstelling, die inmiddels een hilarisch randje had gekregen. Han heeft Demidenko alsnog opgelost. Mijn tweede Google-hit geeft aan dat Paul Carl Gilmore is overleden in april 2015. Als ik straks in Vancouver ben, bestel ik een stokbroodlunch met een scherp mes.



Paul Carl Gilmore

P.S. Een lezer van een eerdere versie van dit verhaal heeft me geattendeerd op de ongeloofwaardigheid van de door mij geëtaleerde scherpte van mijn geheugen. Echter, het schijnt wetenschappelijk te zijn bewezen dat een herinneringsscherpte zich kan handhaven over zeer vele jaren indien de omgeving waarin die herinnering zich afspeelt met voldoend hoge frequentie wordt bezocht. In een volgende column hoop ik wat dieper in te gaan op de waarde van die frequentie en het verschil tussen de concepten 'bewijs' en 'wetenschappelijk bewijs'.

GERARD SIERKSMA is emeritus hoogleraar Kwantitatieve Logistiek en Sportstatistiek aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mail: g.sierksma@rug.nl

‘Een van de beste wedstrijden’

De ORTEC VeRoLog Solver Challenge

Caroline Jagtenberg & Joaquim Gromicho

ORTEC had de eer om de derde editie van de VeRoLog Solver Challenge te organiseren. Deze wedstrijd daagt experts wereldwijd uit om de strijd aan te gaan op het gebied van complexe routeringsproblemen. De wedstrijd duurde van juni vorig jaar tot juli 2017, toen de winnaars bekend werden gemaakt op de conferentie van VeRoLog[1] op de VU, Amsterdam. De laatste drie conferenties werden gecombineerd met een *solver challenge* waarbij deelnemers in een origineel, nieuw routeringsprobleem konden duiken.

Om de wedstrijd op te zetten selecteerde ORTEC zorgvuldig een case van een van haar logistieke klanten. Deze klant voorziet melkboerderijen door heel Nederland van testapparatuur. Elke boerderij dient een verzoek in voor een of meerdere apparaten, binnen een bepaald tijdsvenster. De apparaten moeten dan enkele dagen bij de boer blijven, voor ze weer mogen worden opgehaald. Merk op dat de apparaten kunnen worden opgehaald op een boerderij, en bezorgd bij de volgende boerderij, *in dezelfde route*. Een van de uitdagingen in dit probleem is dat deze apparaten typisch, erg kostbaar, en dus schaars zijn. Het is daarom nodig om niet alleen te letten op een korte route, maar ook na te denken over slimme combinaties van halen en brengen.

In totaal deden er 28 teams wereldwijd mee aan de wedstrijd. De teams konden van december tot juli prijzen winnen door oplossingen in te dienen voor de realistische problemen. Hiervoor werd in totaal meer dan 8.000 oplossingen aangedragen, en op de website was continu te zien hoe de prestaties vorderden. De tot dan toe bestbekende oplossing leverde elke week een klein bedrag op. Daarnaast werd er een grote prijs uitgereikt aan de teams die een algoritme in wisten te dienen dat het best presteerde op *verborgen* probleeminstanties. Negen teams belandden in de halve finale, waaruit ORTEC uiteindelijk drie winnaars koos.

De 28 deelnemende teams; rood de drie winnaars

Martin Geiger[3] en Ahmed Kheiri wonnen uiteindelijk de eerste en tweede prijs. Beiden zijn ervaren deelnemers aan vergelijkbare competities en hebben een wezenlijke bijdrage geleverd aan het vinden van de grenzen waarbinnen dit probleem (dat onrealistisch is om optimaal op te lossen binnen redelijke tijd) in de praktijk kan worden geoptimaliseerd.

De deelnemers omschreven de case als ‘een grote bijdrage aan de wetenschappelijke gemeenschap’. ‘Het verdient veel erkenning’ en ‘zonder twijfel is dit een van de beste wedstrijden waar ik ooit aan mee heb gedaan’. ‘Hartelijk dank voor het organiseren van zo een prachtige competitie.’

Het succes van deze *solver challenge* en de vele positieve reacties van de deelnemers hebben ORTEC geïnspireerd om de volgende VeRoLog Solver Challenge ook te organiseren. Deze wedstrijd zal van start gaan in 2018, en onderzoekers uit zowel de wetenschappelijke wereld als het bedrijfsleven worden aangemoedigd om deel te nemen. Het winnen levert een geldbedrag en ook een grote eer op. De prijsuitreiking zal in de zomer van 2019 plaatsvinden, tijdens de VeRoLog-conferentie in Sevilla, Spanje.

Voor informatie over de solver challenge 2016-2017, zie verolog.ortec.com. Hou deze pagina ook in de gaten voor de aankondiging van de *challenge* van volgend jaar!

Noten

1. VeRoLog is de werkgroep voor Vehicle Routing and Logistics Optimization binnen EURO, de Association of the European Operational Research Societies.
2. Dullaert, W., Gromicho, J., Hoorn, J. van, Post, G. & Vigo, D. The VeRoLog solver challenge 2016–2017. *Journal on Vehicle Routing Algorithms*, 2017. https://doi.org/10.1007/s41604-016-0001-7
3. www.hsu-hh.de/logistik/index_Eshzohxw7wXQPBFI.html

Caroline Jagtenberg is wiskundige en deed haar PhD-onderzoek aan het CWI over wiskundige modellen voor ambulance-logistiek. Bij ORTEC is ze consultant *Transportation, Retail & Express*. Ze is redacteur van *STAtOR*.
E-mail: c.j.jagtenberg@gmail.com

Joaquim Gromicho is *Scientific and Education Officer* bij ORTEC en hoogleraar Toegepaste Optimalisatie aan de VU in Amsterdam. Hij is hoofdredacteur van *STAtOR*.
E-mail: joaquim.gromicho@ortec.com

Let op je woorden

Taal kan lastig zijn, het Nederlands is daarop geen uitzondering. Er zijn om te beginnen vaak inconsequenties zoals het woord wolkbreuk dat niet aangeeft dat de bewolking breekt, integendeel, in dat laatste geval breekt de zon door! Daarnaast veranderen woorden van betekenis in de loop van de tijd. Zo zag ik onlangs een aankondiging in een krant van 1906 waarin een lezing wordt afgelast vanwege ongesteldheid van de spreekster. Ik heb geen idee welk woord toen gebruikelijk was voor de menstruatie, maar ongesteldheid zal het niet geweest zijn. En natuurlijk hebben dezelfde woorden een andere betekenis in verschillende contexten. Een boer en een wiskundige denken aan heel andere zaken bij een wortel, en dan heb ik het nog niet eens over een theoloog die de wortel van het kwaad tracht te beschrijven.

Uniek voor het Nederlands is de ei/ij verwisseling die een woord een andere betekenis geeft, een peiler kan best proberen de pijlers van onze samenleving te ondervragen, maar dan zal hij zijn pijlen op de juiste personen dienen te richten om zijn onderzoek enig peil te geven. Als we dan ook nog quasi-Engels gaan gebruiken krijgen we een stijltang: dat ding wordt weliswaar gebruikt om krullend haar steil te maken om aan een hedendaagse stijl te voldoen, maar het woord is een verbastering van het Engelse styling dat niets met stijl of steil van doen heeft.

Ook in ons vakgebied vol cijfers is taal belangrijk. Ik heb bijna dertien jaar gewerkt bij een instituut voor onderzoek van het onderwijs. Vrijwel alle onderzoekers daar waren afkomstig uit Brabant of Limburg. Dat was best gezellig en ze spraken prima verstaanbaar Nederlands, maar soms kwam daarin toch een taaleigen voor dat niet geheel conform ABN was. Een van mijn werkzaamheden was het controleren van opzet en uitvoering van vragenlijsten en ik heb regelmatig moeten adviseren een vraag iets anders te formuleren omdat deze door een docent uit het westen van het land wel eens verschillend gelezen zou kunnen worden.

Soms komt een misverstand uit een onverwachte hoek. In die tijd van het onderwijsonderzoek deed ik de dataverwerking voor een groot project naar de invloed van dialectgebruik op schoolprestaties. Om de taalvaardigheid van kinderen te meten werd onder andere een test gebruikt waarbij men zo snel mogelijk aanvullingen moest geven op uitspraken als ‘sneeuw is …’, ‘bloed is…’ etc. Tot verbazing van de onderzoekers bleken kinderen soms ‘groen’ te zeggen bij ‘roet is…’. Ik heb toen die vragen apart geanalyseerd voor de verschillende groepen dialectsprekers die in het onderzoek waren opgenomen en daarbij bleek dat groene roet alleen bij kinderen uit de Achterhoek voor te komen. Gelukkig ben ik zelf een geboren Achterhoeker en spreek het dialect vloeiend. Daarom begreep ik meteen wat er aan de hand was: in de Achterhoek is roet het dialectwoord voor onkruid! Een slonzige boer met veel onkruid op zijn akkers wordt daar een roetboer genoemd. In de tijdstress die bij die test hoorde dachten Achterhoekse kinderen soms eerder aan onkruid dan aan schoorsteenroet.

Een laatste voorbeeld: mijn echtgenote werkte als operatieverpleegkundige in het Radboud ziekenhuis. Daar vroeg een Limburgse collega haar een fles met een fysiologische zoutoplossing om te schudden. Enig onbegrip, daar valt niets aan te schudden, die vloeistof is helder als water. Bedoeld werd echter of ze wat van die vloeistof in Petrischaaltjes wilde uitschenken. Tja, in Zuid-Limburg zegt men *sjuuten* voor inschenken, een woord dat van het Duitse *schütten* komt. En in de stress tijdens een operatie kan een Limburgse dan gemakkelijk denken dat het Nederlandse woord daarvoor schudden is.

Taal blijft boeiend. Laat me besluiten met een zin waarmee ik al vele computerprogramma’s voor taalanalyse compleet in de war heb gebracht: ‘In voorkomende gevallen kan ik, dankzij mijn voorkomend voorkomen, voorkomen dat mijn zaak moet voorkomen.’

Gerrit Stemerdink is eindredacteur van *STAtOR*.
E-mail: gjstemerdink@hotmail.com

THE YOUNG STATISTICIANS

REFLECTION AND INSPIRATION

Think of

The Young Statisticians Board used this summer for a moment of reflection. We can look back at a year with well visited events. We visited Shell and Delta Lloyd and learned about the way these organisations use statistics and data analysis to improve their products and services. The Statistics Cafés covered the important role of causality in statistics, data journalism and statistical checking of scientific papers. They were visited by many statisticians, students and other interested people and nice conversations took place while having drinks at Bar Beton. Furthermore, there were workshops, pub quizzes, hackatons and many more interesting events. We were happy to experience the enthusiasm of the visitors during our events and are grateful for all people that helped us organizing these events.

Upcoming

The reflection of the past academic year gives us the energy and inspiration to put all our effort in the upcoming events. During the summer break, we discussed the planning of the coming academic year. We want to organize new company visits to organisations that use data and apply statistics in innovative ways. At the arrival time of this edition of the *STAtOR*, we visited Alliander, an energy network company with a focus on sustainability. Furthermore, we want to organize a Statistics Café about sports and statistics. Data are currently used to improve individual achievement, to analyse the strength of opponents and to visualize the weaknesses of teams. For example, the Dutch soccer ladies (since this summer European Champion) used data visualization of the distribution of ball possessions of their opponents in collaboration with Leiden University. Finally, we want again to organize drinks, pub quizzes, workshops and a hack- or statathon. Moreover, we want to attract more members and visitors by promoting the Young Statisticians at the start of the new academic year at several universities.

Board

Finally, we found a new board member: Elian Griffioen will be the new secretary. Elian is a second year student of the research master Methodology and Statistics for the Behavioural, Biomedical and Social Sciences at Utrecht University. He will write his master thesis at the Utrecht Medical Centre (UMC) and Sanguin on modelling the yield of donor's anti-D immunoglobins. Elian likes the debates on frequentist and Bayesian statistics and subjective or objective priors, although he has no clear preference. Elian likes to improve society by applying statistics and is interested in the use of data and statistics in sports.

All in all, we are looking forward to the next period of events and are happy to organize several events for the future statisticians in the Netherlands. For updates on activities, subscribe to our mailinglist, visit www.youngstatisticians.nl, or like our Facebook page! We will keep you updated!