STAtOR

thema **TOEPASSINGEN VAN STATISTIEK EN OR IN HET ONDERWIJS**

Reactietijden in de examinering

Wiskundeonderwijs op maat

Roosteren op een middelbare school

Technisch lezen op de basisschool

De bruikbaarheid van Huygens' werk in het onderwijs

Het belang van modelleervaardigheden en implementaties in het OR-onderwijs

Onderzoeksmasters Toegepaste Statistiek & Masteropleidingen Besliskunde

periodiek van de VVS jaargang 11 nummer 3, oktober 2010

STAtOR
Jaargang 11, nummer 3, oktober 2010

STAtOR is een uitgave van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research (VVS). STAtOR wil leden, bedrijven en overige geïnteresseerden op de hoogte houden van ontwikkelingen en nieuws over toepassingen van statistiek en operationele research. Verschijnt 4 keer per jaar.

Redactie
Goos Kant (hoofdredacteur), Ana Isabel Barros, Johan van Leeuwaarden, Mirjam Moerbeek, Gerrit Stemerdink (eindredacteur), Hilde Tobi, Marnix Zoutenbier. Vaste medewerker: Fred Steutel

Kopij en reacties richten aan
Prof. dr. G. Kant (hoofdredacteur), Faculteit der Economische Wetenschappen van de Universiteit van Tilburg, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg, telefoon 013 - 4668234, mobiel 06-11045089, <G.Kant@uvt.nl>.

Bestuur van de VVS
Voorzitter: prof. dr. R. Gill <voorzitter@vvs-or.nl>
Secretaris: dr. C.G.H. Diks <c.g.h.diks@uva.nl>
Penningmeester: prof. dr. ir. C.A.G.M. van Montfort <kvmontfort@feweb.vu.nl>
Statistische dag: prof. dr. J.J. Meulman <jmeulman@math.leidenuniv.nl>
Namens de Bedrijfssectie (BDS):
prof. dr. R.J.M.M. Does <R.J.M.M.Does@uva.nl>
Namens de Biometrische Sectie (BMS):
prof. dr. A.H. Zwinderman <a.h.zwinderman@amc.uva.nl>
Namens de Economische Sectie (ECS):
dr. P.H.F.M. van Casteren <casteren@fee.uva.nl>
Namens het Ned. Genootschap voor Besliskunde (NGB):
prof. dr. ir. C.P.M. van Hoesel <s.vanhoesel@ke.unimaas.nl>
Namens de Sectie Mathematische Statistiek (SMS):
dr. P.J.C. Spreij <spreij@science. uva.nl>
Namens de Sociaal Wetenschappelijke Sectie (SWS):
prof. dr. J.K. Vermunt <j.k.vermunt@uvt.nl>

Leden- en abonnementenadministratie van de VVS
VVS, Postbus 244, 6700 AE Wageningen, telefoon 0317 - 419572, fax 0317 - 421364, <admin@vvs-or.nl>. Raadpleeg onze website over hoe u lid kunt worden van de VVS of een abonnement kunt nemen op STAtOR of op een van de andere periodieken.

VVS-website
www.vvs-or.nl

Advertentieacquisitie
Marieke Klein, p/a Vrije Universiteit, afdeling Econometrie & Operationele Research, De Boelelaan 1105, 1085 HV Amsterdam, <adverteren.stator@vvs-or.nl>. STAtOR verschijnt in maart, juni, september en december.

Ontwerp en opmaak
Pharos | M. van Hootegem, Nijmegen
Druk
Thieme MediaCenter Rotterdam
Uitgever
© Vereniging voor Statistiek en Operationele Research
ISSN 1567-3383

Inhoud

3 Redactioneel

4 Reactietijden in de examinering
Rinke Klein Entink & Jean-Paul Fox

9 Onderzoeksmasters Toegepaste Statistiek
Mirjam Moerbeek

13 Besliskunde gaat de wiskunde te boven – *column*
Frank van der Duyn Schouten

14 Wiskundeonderwijs op maat. Een onderzoek naar groepsspecifieke aanpak binnen het wiskundeonderwijs in de derde klas havo en vwo
Lotje Kruithof & Lanah Evers

19 Masteropleidingen Besliskunde
Lodewijk Kallenberg

24 Roosteren op een middelbare school
Gerhard Post, Henri Ruizenaar & Ronald Bannink

28 Beroemde statistici: Harald Cramér
Fred Steutel

29 Modelvakken voor mannen met baarden – *column*
Johan van Leeuwaarden

30 Technisch lezen op de basisschool. Het enorme effect van onderwijs op leesvaardigheid
Hans Luyten

36 De bruikbaarheid van Huygens' werk in het onderwijs
Gerrit Stemerdink

39 Het belang van modelleervaardigheden en implementaties in het OR-onderwijs
Jacob Jan Paulus

Onderwijsexperts

Terwijl u dit leest fietsen de (buurt)kinderen al weer dagelijks naar school en heeft u misschien zelf al weer lessen gegeven. Of u nu wel of niet voor de klas of de collegezaal staat, wij zijn eigenlijk allemaal onderwijsexperts in de zin van wat tegenwoordig zo gul ervaringdeskundige wordt genoemd. Wij hebben tenslotte allen in meer of mindere mate (van) onderwijs genoten. In dit themanummer rond onderwijs willen we laten zien dat onderwijs ook buiten de lesuren vele toepassingen van statistiek en OR worden benut. Om bij de basisschool te beginnen: Hans Luyten laat ons zien hoe statistiek kan worden toegepast bij het identificeren van de bijdrage van het onderwijs aan technische leesvaardigheid in het basisonderwijs. In het voortgezette onderwijs kunnen statistische methoden docenten handvaten bieden om achterblijvende groepen binnen de klas te motiveren voor wiskundeonderwijs, zoals Lotje Kruithof en Lanah Evers laten zien. Gerrit Stemerdink breekt een lans voor het gebruik van Huygens' eeuwenoude werk bij de introductie tot statistiek en kansrekening zoals we die kennen in de bovenbouw van het middelbaar onderwijs.

Elk jaar moet in datzelfde middelbare onderwijs een harde optimalisatienoot worden gekraakt: het rooster. Waar vroeger bij menig wiskundedocent de huiskamer 's zomers werd opgeluisterd met een kleurig roosterbord zijn nu commerciële roosterpakketten in zwang. Gerhard Post, Henri Ruizenaar en Ronald Bannink vertellen waarom en hoe zij een eigen roosterprogramma hebben ontwikkeld dat geschikt is voor de Nederlandse situatie. En natuurlijk hoort toetsen en examineren bij onderwijs. De trouwe lezer heeft al eerder het een en ander kunnen lezen over klassieke testtheorie en item-response theorie die gewoonlijk alleen kijken naar het goed of fout beantwoorden van een vraag. Rinke Klein Entink en Jean-Paul Fox onderzoeken in deze *STAtOR* juist reactietijden in de examinering, waarbij het verband tussen snelheid en accuraatheid ook aandacht krijgt.

Jacob Jan Paulus gaat, evenals onze twee columnisten van dienst, in op het hoger onderwijs. Zij verhalen elk over het belang van modelleervaardigheden in het OR-onderwijs, daarnaast benadrukt Frank van der Duyn Schouten vooral het belang van wiskunde in de besliskunde. En dames, laat de gewenste gezichtshaarloosheid u niet belemmeren: modelvakken zijn er ook voor mensen zonder baard, net als statistiekvakken overigens, wat Johan van Leeuwaarden daar ook over moge schrijven. Fred Steutel vertelt iets over Harald Cramér die een boek over statistiek heeft geschreven dat jarenlang tot de meest gebruikte leerboeken in ons vak behoorde.

Voor hen die de school- en collegebanken al even achter zich hebben biedt deze Stator een overzicht van de huidige statistiek- en OR-opleidingen. Die overzichten geven inzicht in de achtergronden van uw nieuwe (en toekomstige) collegae. Mocht u door dit nummer zelf weer zin hebben in onderwijs maar de collegebanken wat te hard vinden: houd u dan de VVS nieuwsbrief in de gaten, want er staan weer interessante en leerzame bijeenkomsten op de rol.

De redactie

REACTIETIJDEN IN DE EXAMINERING

Rinke Klein Entink & Jean-Paul Fox

In de sport worden prestaties afgemeten aan wie het snelst een zekere afstand aflegt, zoals Usain Bolt op de 100 meter. Een belangrijke vraag is dan 'Hoe snel kan Bolt de 100 meter lopen?'. Het niveau van de prestatie wordt bepaald door de snelheid en de tijd is de belangrijkste observatie. De observatie of Bolt inderdaad 100 meter kan hardlopen is van ondergeschikt belang, en deze vaardigheid voegt dan ook weinig toe aan de geleverde prestatie. In andere gevallen heeft de vaardigheid een veel groter aandeel in de geleverde prestatie. Zo wordt bijvoorbeeld het uitlopen van een marathon door velen gezien als een bijzondere prestatie.

Maar hoe zit dat eigenlijk bij het toetsen en examineren in een educatieve omgeving? Het lijkt erop dat je daar alleen maar 100 meter hoeft te kunnen lopen. Traditioneel wordt namelijk de geleverde prestatie op een examen toegeschreven aan de vaardigheid van de kandidaat. Waarbij de vaardigheid van een kandidaat gemeten wordt aan de hand van de geobserveerde antwoorden. De vraag is of snelheid ook kan bijdragen aan de geleverde prestatie, en wanneer dit het geval is. Verder bekijken we de mogelijkheden van het gebruik van snelheidsmaten bij een examen.

Het examen

Een examen heeft een duidelijk doel: te weten komen wat iemands niveau is met betrekking tot

een vaardigheid of kennis over een onderwerp. Het examen is een instrument om vaardigheid te meten. Veelal bestaat deze uit een set van vragen waarop de kandidaat het antwoord moet geven. Deze antwoorden geven de examinator dan de mogelijkheid de kandidaat te beoordelen. Een methode voor het scoren van studenten is de klassieke testtheorie, zoals die is beschreven door Lord & Novick (1968). Het klassieke 'ware score' model stelt dat

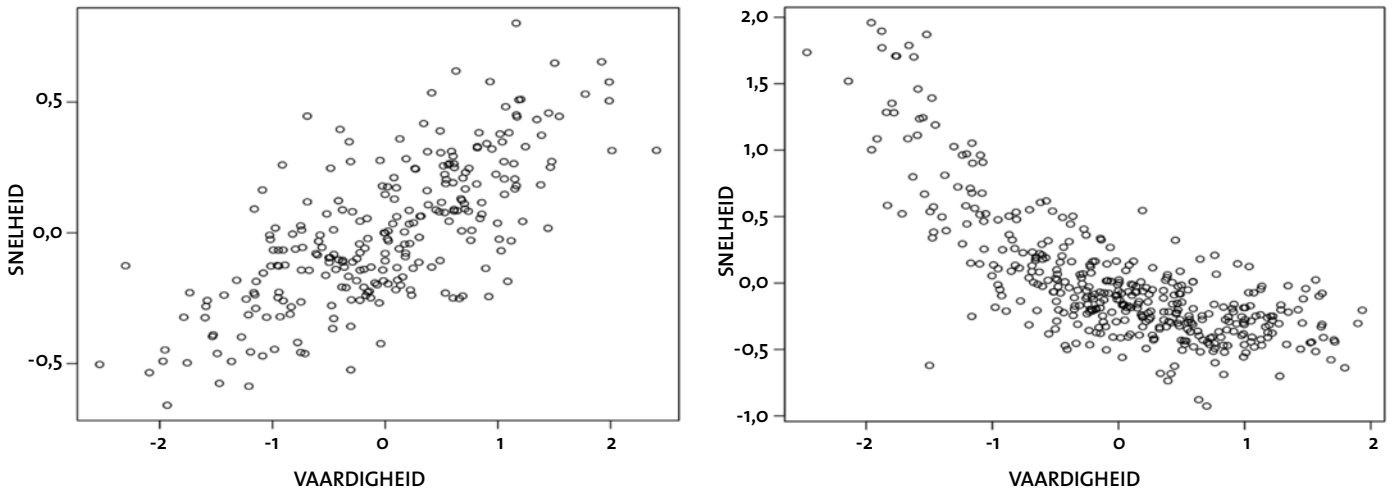
$$X = \theta + E$$

oftewel, de geobserveerde score X op een examen van vaste lengte is een stochast die afhangt van de ware score θ van de kandidaat en een toevallige fout E. De geobserveerde score X is dan een zuivere schatter voor de vaardigheid van een kandidaat. De scores op een examen geven ons de mogelijkheid om de kandidaten te rangschikken naar hun vaardigheidsniveau. Wie is de vaardigste van de groep en wie moet er nog een tijdje studeren.

Stel dat de snelheid van werken tijdens het examen van een kandidaat ook gemeten wordt. Het is dan mogelijk om niet alleen de verdeling van vaardigheden in de steekproef te bekijken, maar ook de bivariate verdeling van de vaardigheden en de snelheden van werken. Twee voorbeelden ziet u in figuur 1. Daarbij is de absolute schaal even niet relevant, maar wel de trends voor de twee situaties. Duidelijk is dat in de linker figuur het verband tussen snelheid en vaardigheid positief is, dus de sneller werkende personen zijn over het algemeen ook vaardiger, terwijl precies het tegenovergestelde opgaat in de figuur rechts.

Snelheid bij examens

Voordat dieper ingegaan kan worden op de relatie tussen snelheid en vaardigheid moet eerst beantwoord worden (1) wat die snelheid nu eigenlijk is en (2) hoe die gemeten kan worden.



Figuur 1. Twee voorbeelden van de bivariate verdeling van vaardigheid en snelheid uit de praktijk. (NB. Het gaat hier om verschillende populaties en verschillende toetsen).

Een voor de hand liggende definitie van de snelheid van werken is het aantal beantwoorde vragen per tijdseenheid. We gebruiken het klassieke testtheoriemodel om snelheid te meten door te stellen dat:

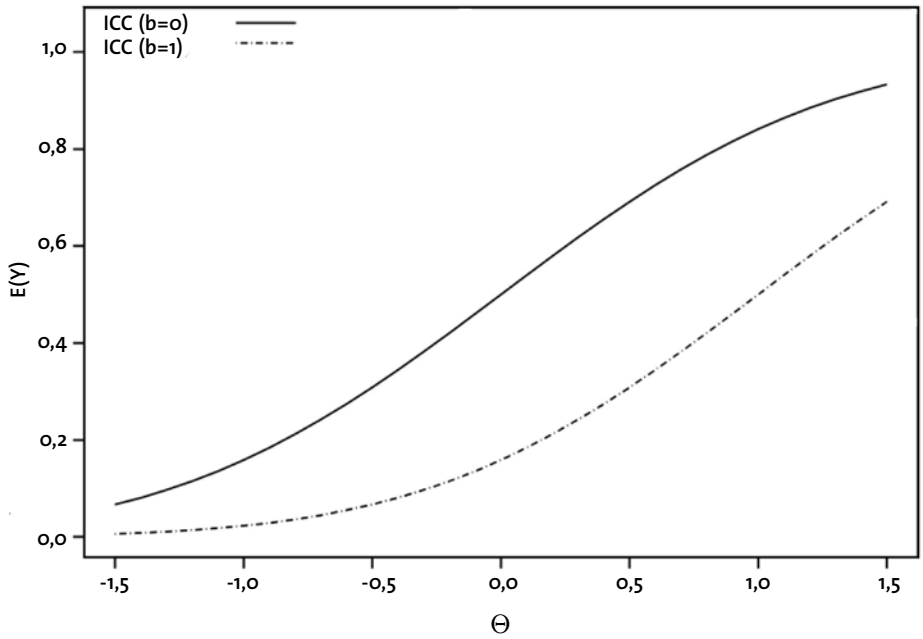
$$T=\zeta+E$$

oftewel, de geobserveerde tijd op een examen van vaste lengte is een random variabele die afhangt van de ware tijd ζ en een willekeurige fout. Een zuivere schatter voor de verwachtte (ware) tijd van een kandidaat is dan gelijk aan de geobserveerde tijd. Net als bij de 100 meter kan de snelheid worden bepaald als het afgelegde gedeelte van het examen gedeeld door de ware tijd.

Met behulp het klassieke model kunnen we tevens evalueren of twee testen die voldoen aan het betrouwbaarheidscriterium met betrekking tot de toetsscores tevens betrouwbaar zijn met betrekking tot snelheid. Dit is relevant wanneer we een kandidaat op zowel vaardigheid als snelheid beoordelen. Een eenvoudig voorbeeld is wanneer twee personen beide een 7 scoren op een wiskundetoets, maar de eerste deed dat in een uur, terwijl de tweede persoon 3 uur nodig had. Indien een toets op zowel nauwkeurigheid als snelheid gescoord wordt, dan dient de test ook betrouwbaar te zijn met betrekking tot beide aspecten.

Echter, er werd in het klassieke model (impliciet) aangenomen dat elke vraag evenveel tijd kost. Bijvoorbeeld bij een examen voor tekstbegrip is een dergelijke aanname erg onrealistisch en alleen te handhaven als het om dezelfde tekst en dezelfde vragen, dus om dezelfde test, gaat. Wanneer persoon 1 een tekst krijgt van 100 woorden en daar een minuut over doet, en persoon 2 krijgt een tekst van 200 woorden en doet daar 1 minuut 50 over, zouden we, uitgaande van het klassieke meetmodel voor snelheid, zeggen dat persoon 1 sneller was dan persoon 2. Er ontbreekt dus iets aan het klassieke meetmodel voor snelheid dat rekening houdt met verschillen tussen de vragen.

Een dergelijk probleem werd eerder al genoemd door Arnout Fischer in *STAtOR* van september 2009 (Fischer, 2009). Voor de analyse van surveyschalen dient er onderscheid gemaakt te worden tussen vragen naar moeilijkheid en relevantie. Item Response Theorie (IRT) is precies met dat



Figuur 2. Item Characteristic Curve.

doel ontwikkeld (van der Linden & Hambleton, 1997). IRT beschrijft statistische modellen voor het meten van een construct (vaardigheid/attitude) op basis van een vragenlijst. Het IRT-model houdt hierbij rekening met de karakteristieken van de vragen. Een bekend IRT-model is het Rasch model dat de kans op een correct antwoord beschrijft als functie van de latente vaardigheid van een persoon, q, en de moeilijkheid van de vraag, b. Daarbij wordt verondersteld dat de kans op een correct antwoord stijgt met een toename in de vaardigheid. Deze relatie, bekend als de item characteristic curve (ICC), ziet eruit zoals in figuur 2, waarbij op de horizontale as de latente vaardigheid staat, en op de vertikale as de kans op een goed antwoord. Voor een moeilijke vraag (b=1) is de kans op succes lager dan die van een makkelijke vraag (b=0) aangezien de ICC van de moeilijke vraag boven de ICC van de makkelijke vraag ligt. In formulevorm

$$P(Y=1) = \Phi(\theta - b)$$

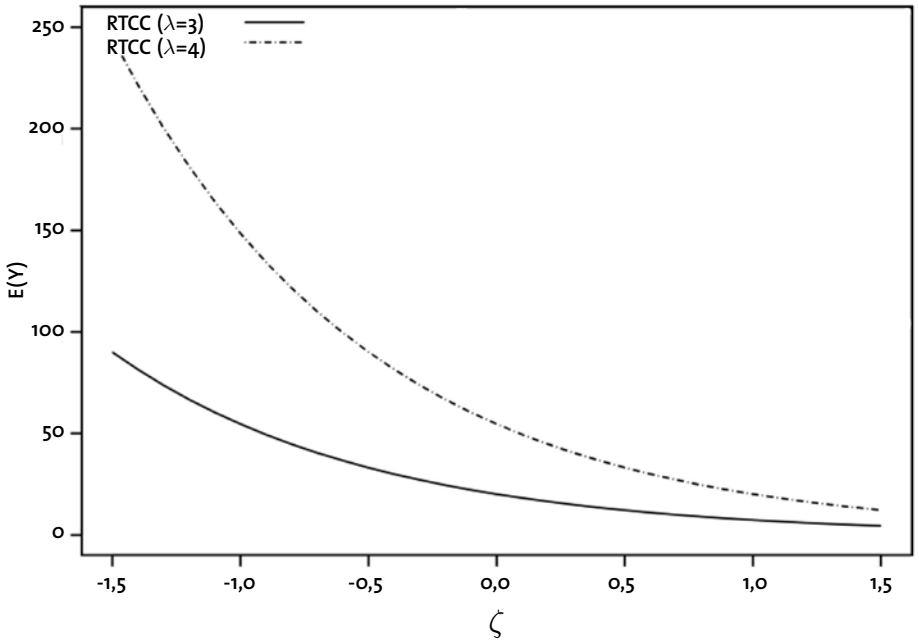
waarbij Φ de cumulatieve normale verdelingsfunctie is. Wanneer de vaardigheid gelijk is aan de moeilijkheid, $\theta - b$, is de kans op een correct antwoord precies 50%.

Wanneer we de reactietijden ook op item niveau observeren, is het een logische stap om voor het meten van snelheid ook naar een model op item-niveau gaan. Hierbij ligt het voor de hand om de reactietijd van een persoon op een item te beschouwen als een stochastische variabele die afhangt van zowel de snelheid van werken als van de moeilijkheid van het item. De reactietijden zijn continu en strikt positief en worden lognormaal verdeeld verondersteld. Voor de stochast reactietijd op een item die een tijd λ vergt met ζ de snelheid van werken van de persoon geldt dat

$$\ln T = -\zeta + \lambda + E$$

waarbij E een normaal verdeelde error component is. De analogie met het IRT-model erboven is duidelijk. Het model heeft een persoonsparameter en een parameter voor de moeilijkheid van de vraag. Het minteken staat wel op een andere plek, wat weergeeft dat sneller werken tot lagere reactietijden leidt (van der Linden, 2006).

Wanneer de verwachtte reactietijd nu tegen snelheid geplot wordt, verkrijgen we figuur 3 die we een *response time characteristic curve* (RTCC) noemen (Klein Entink, Kuhn, Hornke & Fox, 2009).



Figuur 3. Response Time Characteristic Curve.

De twee curven representeren twee verschillende vragen, waarbij de bovengelegen curve het meest tijdsintensieve item aangeeft ($\lambda = 4$).

De twee meetmodellen worden gebruikt voor het meten van vaardigheid en snelheid, die beiden betrekking hebben op dezelfde persoon. Het is realistisch om te veronderstellen dat vaardigheid en snelheid binnen een persoon gecorreleerd zijn. Een persoon kan bijvoorbeeld snel werken maar hierdoor meer fouten maken. Naast het niveau van de itemobservaties kan op een hoger niveau een multivariate verdeling verondersteld worden voor de verdeling van vaardigheden en snelheden in de populatie (Klein Entink, Fox, Van der Linden, 2009).

De praktijk

Terug naar de twee figuren van de populatieverdelingen van vaardigheid en snelheid. De figuur links is verkregen bij de analyse van een schaaktest met een tijdslimiet (van der Maas, Wagenmakers 2005). Hier waren gemotiveerde schakers aan het werk die zo goed mogelijk en zo snel mogelijk probeerden een test van 40 vragen te beantwoorden, waarbij de volgende beste zet bepaald moet worden. De uitkomsten van de test relateerden ook sterk aan de ELO-rating van de schakers, welke een prestatiemaat is op basis van gewonnen en verloren partijen in competitie.

De data rechts betreft resultaten van een vrijblijvend examen dat de studievoortgang moest meten van tweedejaars universiteitsstudenten (Wise, Kong and Pastor, 2007). Er waren geen consequenties verbonden aan de testresultaten. Uit verder onderzoek van Wise (Wise and Kingsbury, 2009) volgt dat een deel van de studenten hierdoor slecht gemotiveerd was. Er werd dan ook een negatieve relatie tussen snelheid en vaardigheid gevonden. De meer gemotiveerde studenten namen de test serieuzer, namen meer tijd, en scoorden daarmee beter.

De verschillen tussen de twee figuren en de testomstandigheden als mogelijke oorzaak illustreren waarom het interessant is om niet alleen naar vaardigheid te kijken, maar tevens naar snelheid.

Literatuur

Fischer, A. (2009). Veilig voedselgedrag van consumenten op schaal. *STAtOR, 10*(3), 9-13.

Klein Entink, R. H., Fox, J.-P., & van der Linden, W. J. (2009). A multivariate multilevel approach to the modeling of accuracy and speed of test takers. *Psychometrika,* 74, 21-48.

Klein Entink, R. H., Kuhn, J.-T., Hornke, L. F., & Fox, J.-P. (2009). Evaluating cognitive theory: A joint modeling approach using responses and response times. *Psychological Methods*, 14, 54-75.

Lord, F. M., & Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Linden, W. J. van der (2006). A lognormal model for response times on test items. *Journal of Educational and Behavioural Statistics*, 31, 181-204.

Linden, W. J. van der; & Hambleton, R. K. (Eds.). (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer

Maas, H.L.J. van der & Wagenmakers E.J. (2005). A psychometric analysis of chess expertise. *American Journal of Psychology*, 118, 29-60.

Wise, S. L., Kong, X. J., & Pastor, D. A. (2007). *Understanding correlates of rapid-guessing behavior in low-stakes testing: Implications for test development and measurement practice*. (Paper presented at the 2007 annual meeting of the National Council on Measurement in Education, Chicago, IL)

Wise, S. L., & Kingsbury, G. G. (2009). *Response Time and Examinee Test-Taking Effort: Measurement and Modeling*. (Paper presented at the 2009 annual meeting of the National Council on Measurement in Education, San Diego, CA)

Rinke Klein Entink was docent aan de Universiteit van Twente, vakgroep Onderwijskundige Meetmethoden en Data-Analyse van de Faculteit Gedragswetenschappen. Tegenwoordig werkt hij als onderzoeker bij TNO Zeist.
E-mail: <Rinke@KleinEntink.eu>

Jean-Paul Fox is universitair hoofddocent aan de Universiteit van Twente, vakgroep Onderwijskundige Meetmethoden en Data-Analyse van de Faculteit Gedragswetenschappen.
E-mail: <j.p.fox@utwente.nl>

ONDERZOEKSMASTERS TOEGEPASTE STATISTIEK

Mirjam Moerbeek

Vóór de invoering van het bachelor-masterstelsel in het Nederlands hoger onderwijs in 2002 waren de mogelijkheden voor het volgen van een universitaire opleiding of specialisatie methodenleer en statistiek binnen de sociale en biomedische wetenschappen beperkt. De meeste faculteiten sociale wetenschappen en geneeskunde kenden dan wel een afdeling toegepaste statistiek of biostatistiek, maar het onderwijs dat deze afdelingen verzorgden beperkte zich veelal tot de verplichte cursussen. Studenten die meer statistiekonderwijs wilden volgen zochten hun heil bij de opleiding wiskunde of volgden open vakken bij een hoogleraar statistiek.

Sinds een aantal jaren is er de mogelijkheid voor het volgen van een onderzoeksgerichte master op het gebied van de methodenleer en toegepaste statistiek, zie tabel 1. De masteropleidingen zijn alle internationaal, worden in het Engels onderwezen en duren twee jaar. De opleidingen in Utrecht en Leiden zijn volledige opleidingen, aan de universiteiten van Amsterdam, Tilburg en Groningen is er de mogelijkheid om een specialisatie te volgen binnen een algemenere opleiding in de sociale en gedragswetenschappen. De opleiding in Leiden kenmerkt zich door toepassingen in de biomedische wetenschappen.

Alhoewel de studieprogramma's per opleiding verschillen, kan in het algemeen gesteld worden dat in het eerste jaar basiscursussen worden gegeven en dat in het tweede jaar een stage en master thesis op het programma staan. Voorbeelden van basiscursussen zijn multivariate analyse, onderzoeksdesigns, psychometrie, survey methodologie en survival analyse. Daarnaast is er aandacht voor vaardigheden zoals statistisch programmeren, het schrijven van onderzoeksvoorstellen, schrijven in Latex en mondeling presenteren.

De masterprogramma's kenmerken zich door het toegepaste karakter en onderscheiden zich daarmee van een opleiding statistiek binnen een faculteit wiskunde. Er is echter meestal wel een cursus mathematische statistiek opgenomen in het curriculum zodat studenten vertrouwd raken met de wiskundige gedachten achter kansverdelingen, statistische modellen en schattingsprocedures. Van afgestudeerden wordt verwacht dat zij in staat zijn methodologische en statistische technieken toe te passen binnen onderzoek in de sociale en/of medische wetenschappen. Daarom is er in de meeste opleidingen de mogelijkheid om één of meerdere cursussen te volgen binnen een inhoudsgerichte master van dezelfde faculteit of wordt er een inleidende cursus sociale en levenswetenschappen gegeven. Bij sommige opleidingen worden enkele statistiekcursussen

ook gevolgd door studenten van inhoudsgerichte master opleidingen.

De ingangseis is veelal een cursus multivariate statistiek. Van studenten wordt verwacht dat zij bovengemiddelde cijfers voor de methoden- en statistiekcursussen in de bachelor hebben gehaald en affiniteit hebben met dit onderwerp. De aanmelding bestaat meestal uit een cijferlijst en een motivatiebrief. Niet elke student wordt automatisch toegelaten en bij sommige opleidingen is er een maximum gesteld aan het aantal studenten per jaar. Omdat de groepen veelal klein zijn leren de studenten en docenten elkaar snel kennen. Er is daarom een grote onderlinge band en de meeste studenten maken hun opleiding daadwerkelijk binnen de gestelde tijd af. Studenten kunnen instromen vanuit verschillende bachelor opleidingen, zoals een opleiding in de sociale wetenschappen, (toegepaste) wiskunde of econometrie.

De meeste lezers zullen wel bekend zijn met de uitspraak 'I keep saying that the sexy job in the next 10 years will be statisticians' van Hal Varian (chief economist at Google). Voor de twijfelaars voegt hij er nog aan toe: 'And I'm not kidding.' Deze uitspraak benadrukt nogmaals de noodzaak voor academici met een gedegen opleiding in de methodenleer en statistiek. De meeste afgestudeerden wisten binnen een aantal maanden een goede baan te vinden als promovendus aan een universiteit of als wetenschappelijk onderzoeker aan een ministerie of onderzoeksinstituut. Mogelijke werkgevers zijn het CITO, TNO, en het CBS.

UNIVERSITEIT	NAAM OPLEIDING	CONTACTPERSOON	INTERNETPAGINA
Universiteit Utrecht (UU)	Methodology and Statistics of Behavioural and Social Sciences	Herbert Hoijtink <h.hoijtink@uu.nl>	www.uu.nl/programmes/ms
Universiteit van Tilburg (UvT)	Social and Behavioral Sciences – minor Methodology and Statistics	Andries van der Ark <a.vdArk@uvt.nl>	www.tilburguniversity.nl/masters/programmes/fsw/rmsbs/mands/
Universiteit van Amsterdam (UvA)	Major Psychological Methods binnen master Psychology	Han van der Maas Eveline Zandvliet <researchmaster-psychology@uva.nl>	www.studeren.uva.nl/ma-psychology/
Rijksuniversiteit Groningen (RUG)	Specialization Psychometrics and statistics binnen Research Master Behaviour and Social Sciences	Rob Meijer <R.R.Meijer@rug.nl>	www.rug.nl/gmw/onderwijs/mastersopleidingen/Topmaster/
Universiteit Leiden (LEI)	Statistical Science for the Life and Behavioural Sciences	Harald van Mil <statscience@math.leidenuniv.nl>	www.math.leidenuniv.nl/statscience/

Tabel 1. Overzicht van masterprogramma's statistiek in Nederland.

Universiteit Utrecht

Methoden en Statistiek van de Gedrags- en de Sociale Wetenschappen is een research masteropleiding gericht op studenten die zich willen bekwamen in het door de titel van de opleiding beschreven vakgebied. In het eerste jaar van de opleiding zijn er acht vakken die de volle breedte van het vakgebied bestrijken. Daaronder zijn vakken die methoden en modellen behandelen die veel gebruikt worden in de gedrags- en sociale wetenschappen, maar ook vakken die de basis leggen voor het doen van onderzoek op het gebied van de methoden en statistiek. Het tweede jaar wordt bijna geheel besteed aan stage en thesis met betrekking tot een in overleg met de studenten gekozen onderwerp. Veel van de studenten die deze research master afronden vervolgen hun opleiding met een promotietraject. Degenen die dat niet doen komen veelal terecht bij bedrijven waar ze op academisch niveau met methoden en statistiek aan het werk zijn.

Universiteit van Tilburg

Studenten die binnen de Tilburgse Research Master of Social and Behavioral Sciences de minor Methodology and Statistics kiezen, kiezen voor een opleiding die voor bijna 90% bepaald wordt door methoden en technieken. De helft van de opleiding bestaat uit individuele intensief begeleide onderzoeksgerichte activiteiten zoals stages, waaronder een buitenlandse stage, een first-year paper en een master's thesis. De andere helft is cursorisch van aard. Voor het grootste deel zijn dit gedegen cursussen waarin geavanceerde methodologische en statistische kennis en vaardigheden aangeleerd worden en waarin practica een prominente rol spelen. Daarnaast zijn er cursussen voor algemene wetenschappelijke vaardigheden (zoals presenteren en schrijven) en cursussen die een overzicht geven van belangrijke onderzoeksthema's binnen de gedragswetenschappen en de sociale wetenschappen. De opleiding schenkt speciaal aandacht aan de individuele begeleiding van studenten en de goede aansluiting bij bachelor programma's.

Universiteit van Amsterdam

In de tweejarige, Engelstalige Research Master Psychology zijn jaarlijks 40 plaatsen beschikbaar. In deze selectieve master kiezen studenten een major en een minor specialisatie uit één van de zes grote gebieden van de psychologie (Arbeids & Organisatiepsychologie, Brein & Cognitie, Klinische Psychologie, Ontwikkelingspsychologie, Psychologische Methodenleer en Sociale Psychologie). Studenten kunnen in deze master hun specialisatie uit de bachelor voortzetten, maar volgen tevens vakken van een andere specialisatie in de psychologie. Al deze specialisaties op de UvA zijn sterk onderzoeksgeoriënteerd en zijn als goed tot uitstekend geëvalueerd in de meest recente onderzoeksvisitatie. Alle programmagroepen hebben speciaal voor de Research Master Psychology inhoudelijke cursussen ontworpen. De cursussen zijn kleinschalig en intensief van opzet, waarin toetsing veelal gebeurt via onderzoeksvoorstellen en opdrachten. Naast de specialistische cursussen krijgen studenten vrij veel statistische- en methodologische cursussen. Tevens volgt men programmeeronderwijs en een cursus in wetenschappelijk schrijven en presenteren in het Engels. Studenten voeren in beide jaren een

onderzoek uit, in het eerste jaar een internship en in het tweede jaar een these. De these wordt gerapporteerd in de vorm van een (in principe publicabel) artikel. De opleiding is een excellente voorbereiding op een promotiepositie, maar biedt ook een uitstekende uitgangspositie voor een carrière in de meer toegepaste werkvelden. De master heeft uitstekende beoordelingen gekregen tijdens de laatste heraccreditatie in 2009.

Universiteit Leiden

Universiteit Leiden

In september 2009 is in Leiden de nieuwe masteropleiding Statistical Science for the Life and Behavioural Sciences van start gegaan. De nieuwe masteropleiding is een breed gedragen initiatief van het Mathematisch Instituut, de afdeling Medische Statistiek & Bio-informatica van het LUMC, en het Instituut voor Psychologie (alle te Leiden), samen met de afdelingen Biometris van de Universiteit Wageningen, Statistiek van de VU, Epidemiologie en Biostatistiek van het VUMC en Biostatistiek van het Erasmus MC. Deze unieke nieuwe tweejarige master resulteert in een Master in Mathematics, Specialization Statistical Science, en richt zich in eerste instantie op studenten met een bachelor vooropleiding in de levens- en gedragswetenschappen die zich meer in de statistische methoden willen bekwamen, maar ook op bachelors uit de econometrie, informatica, of wiskunde. Als ingangseis wordt minimaal een introductie cursus en een meer geavanceerde cursus statistiek of waarschijnlijkheidsrekening gevraagd.

Daarnaast biedt de master een parttime-opleiding en individuele cursussen aan voor hen die al werkzaam zijn als statisticus.

rijksuniversiteit groningen

Universiteit Groningen

Het programma in Groningen wordt gekenmerkt door een nauwe samenwerking tussen verschillende groepen van sociologie, psychologie, en pedagogische wetenschappen en onderwijskunde binnen de faculteit gedrags- en maatschappijwetenschappen. De student in de specialisatie Psychometrie en Statistiek volgt naast een algemene inleiding verplichte vakken in de Matrix Algebra, Toegepaste Statistiek en Statistische Consultatie. Er zijn keuzevakken in onder meer Experimentele Designs, Factor Analyse, Item Response Theorie, Herhaalde Metingen en Kansrekening. Verder is het mogelijk door middel van literatuurstudies, een traineeship en een masterthese zich verder te specialiseren in een onderwerp naar keuze dat zowel toegepast als theoretisch van aard kan zijn.

Mirjam Moerbeek is universitair hoofddocent en onderzoeker aan de Universiteit Utrecht, departement Methoden en Technieken. Zij ontving in 2003 een VENI subsidie en in 2008 een VIDI subsidie van NWO. Doel van beide projecten was het ontwikkelen van power analyses en optimale proefopzetten met toepassingen in de sociale en gedragswetenschappen.
E-mail <M.Moerbeek@uu.nl>

Besliskunde gaat de wiskunde te boven

Frank van der Duyn Schouten

Het is inmiddels ruim 20 jaar geleden, maar ik herinner het mij nog levendig. Een van mijn eerste afstudeerders die voor een grote zuivelonderneming als afstudeeropdracht een model ontwikkelde ter ondersteuning van de besluitvorming rond een ingrijpende reorganisatie. Veel efficiëntievoordeel leek bereikbaar door verschillende fabrieken in de keten te sluiten of te laten fuseren met, naar verwachting, verstrekkende gevolgen voor de werkgelegenheid in de regio. Geen vrolijke maar wel een verantwoordelijke opdracht. De student had zich met enthousiasme en deskundigheid van zijn taak gekweten en had een uitgebalanceerd geheeltallig LP-model ontwikkeld, waarin recht werd gedaan aan de meest relevante aspecten van de probleemstelling zonder de rekenkracht van de toenmalige mainframe computers te overvragen. Kortom, een succesvolle aanpak voor een uitdagend probleem.

Tijdens zijn met overtuiging gebrachte presentatie ten overstaan van het management van het bedrijf bekroop mij echter een gevoel van onbehagen. De student bleek zo onvoorwaardelijk in de uitkomsten van zijn modelanalyse te geloven dat hij zich niet leek te kunnen voorstellen dat er ook maar op enigerlei wijze van de door hem aangedragen oplossing kon worden afgeweken. Ik realiseerde mij op dat moment dat ik in de opleiding van de student een belangrijk aspect had laten liggen. Hij was creatief in modelbouw, zijn analytisch vermogen was goed ontwikkeld, hij was vertrouwd met relevante oplossingstechnieken en communicatief vaardig, maar hij was nog geen besliskundige. Ik had verzuimd hem te leren op het juiste moment de uitkomsten van zijn modelanalyse te relativeren.

Het vinden en bewaren van de balans tussen deze twee attitudes – scherp en compromisloos analytisch vermogen en relativering van modeluitkomsten – heb ik sindsdien als een van de grootste uitdagingen van de studierichting besliskunde leren zien. Het maakt de besliskundeopleiding per saldo veeleisender dan de wiskundeopleiding. Een besliskundige moet in de scherpte van zijn analytisch vermogens niet voor een wiskundige onderdoen. Met logische deductie mag op geen enkele manier een loopje worden genomen. Conclusies dienen te worden gebaseerd op bewijs en niet op een klompengevoel. In dat opzicht heb ik de simplexmethode altijd een perfecte manier gevonden om wiskundige bewijsvoering te illustreren en daarom mijn studenten met deze methode tot in de finesses vertrouwd gemaakt, ook toen door opkomende software de zin daarvan in twijfel werd getrokken.

Waar echter in de opleiding van een wiskundige alle aandacht kan uitgaan naar de aanscherping van het analytisch vermogen, moet in de opleiding van de besliskundige op een bepaald moment ruimte worden geschapen voor de nuancering. Dat vereist een weldoordacht curriculum. Als de nuance van de relativering te vroeg in de opleiding wordt ingebracht is het gevaar groot dat hierdoor de wiskundige training wordt geïnfecteerd en daarmee van haar essentie wordt beroofd. Maar het is evenzeer onverantwoord om ervan uit te gaan dat de kunst van de relativering wel in de latere beroepspraktijk wordt aangeleerd en er daarom zolang mee te wachten als ik bij mijn eerste afstudeerders heb gedaan.

Frank van der Duyn Schouten is hoogleraar Econometrie en Operations Research aan de Faculteit Economie en Bedrijfswetenschappen van de Universiteit van Tilburg. E-mail: <f.a.vdrduynschouten@uvt.nl>

WISKUNDEONDERWIJS OP MAAT

Een onderzoek naar groepsspecifieke aanpak binnen het wiskundeonderwijs in de derde klas havo en vwo

Lotje Kruithof & Lanah Evers

In dit onderzoek worden statistische methoden ingezet om groepen leerlingen te onderscheiden binnen het wiskundeonderwijs met betrekking tot het beeld dat zij van het vak hebben en de lesmethoden die zij prefereren. Hiermee bieden wij de wiskundedocent handvatten om met een groepsspecifieke lesaanpak achterblijvende groepen in de klas te motiveren.

Een lesaanpak die aansluit bij de interesses van leerlingen kan zowel de motivatie als de prestatie van leerlingen positief beïnvloeden (Ku en Sullivan, 2002). Ons onderzoek richt zich op het wiskundeonderwijs. Wij zijn op zoek gegaan naar een eventueel verband tussen het beeld dat een leerling van het vak wiskunde heeft en de lesmethode die de leerling daarbij prefereert. Daartoe hebben wij ons afgevraagd of, en zo ja hoe, leerlingen op basis van hun beeld over wiskunde in te delen zijn in duidelijk te onderscheiden groepen. Per groep bekijken wij vervolgens de – voor de leerling – ideale lesmethode toegespitst op het handelen van de wiskundedocent op het gebied van vakdidactiek, pedagogiek en regie.

Onderzoek

In het schooljaar 2008/2009 hebben wij de gegevens en meningen van 232 derdeklasleerlingen verzameld. Het betrof leerlingen uit vijf verschillende havo-klassen en vier verschillende vwo-klassen, verspreid over vijf middelbare scholen. De inventarisatie is gebeurd door middel van een vragenlijst, die uit drie delen bestaat. In het eerste deel wordt de leerling gevraagd een lijst van 11 vakken te rangschikken van leukste naar minst leuke en tevens van beste naar minste vak qua prestatie. In het tweede deel trachten wij het beeld dat de leerling van het vak wiskunde heeft in kaart te brengen. In het derde deel komt het handelen van de wiskundedocent aan de orde. Hierbij vragen wij bij elke stelling ten eerste in hoeverre de stelling volgens de leerling van toepassing is op de huidige docent en ten tweede in hoeverre de stelling overeenkomt met het handelen van de 'ideale wiskundedocent'. De leerling geeft aan de hand van een vijf-puntsschaal de mate van overeenstemming aan, waarbij de waarde 1 'helemaal mee oneens' representeert en de waarde 5 'helemaal mee eens'. Om zo veel

Foto: Anda van Riet

mogelijk verschillende aspecten van het lesgeven mee te nemen hebben wij deel 2 en 3 van de vragenlijst onder andere gebaseerd op ideeën en indelingen gegeven door Martinot e.a. (1998), Kloosterman (2002), Op 't Eynde (2002) en Ebbens (2005). De onderzoeksopzet omvat een vijftal stappen, die we hierna elk bespreken.

Om een overzicht te verkrijgen van de verhouding van wiskunde als leukste en beste vak ten opzichte van de andere vakken zijn de gegevens van deel 1 van de vragenlijst samengevat in frequentietabellen. Met behulp van Anova testen we of verschillen in waardering tussen man-vrouw en havo-vwo significant zijn. De belangrijkste constatering die volgt uit beschrijvende statistische gegevens over dit eerste deel van de vragenlijst, is een duidelijke onderwaardering bij onze leerlingen wat betreft de rangschikking van wiskunde als 'leukste' en als 'beste' vak. Verder zien we bijvoorbeeld dat het percentage van de mannen dat wiskunde binnen zijn top drie van leukste vakken plaatst hoger is dan dat van de vrouwen.

Vervolgens hebben we door middel van clusteranalyse op het tweede deel van de vragenlijst de beelden die er bij de leerlingen over het vak wiskunde heersen gegroepeerd. Anova is vervolgens weer gebruikt, maar dan nu om te toetsen of de waarderingen van de stellingen tussen de clusters onderling significant verschillen. De clusteranalyse heeft geresulteerd in de volgende vier significant verschillende leerling-typen: de *high-grade-lover*, de *low-grade-lover,* de *struggler* en de *indifferent*. Deze benamingen schetsen de algemene trend van de antwoorden van de leerlingen binnen een groep met betrekking tot hun mening en hun beeld over het vak wiskunde. Zo vindt de *high-grade-lover* bijvoorbeeld dat wiskunde een vak is dat je niet uit je hoofd leert, maar een vak dat je moet begrijpen, dat wiskunde een leuk en belangrijk vak is en dat het aanleg en logisch denkvermogen vereist. De verhouding man-vrouw is bij deze groep nagenoeg gelijk, ter-

wijl bijvoorbeeld bij de *low-grade-lover* het aandeel man hoger is dan het aandeel vrouw.

Om straks een koppeling te kunnen maken tussen de groepen leerlingen en de lesmethode die de leerlingen uit de desbetreffende groep prefereren, groeperen we de stellingen in deel 3 van de vragenlijst. Deze stellingen meten de evaluatie van de huidige docent en het verwachtingspatroon dat de leerling heeft van de ideale lesaanpak. Het groeperen doen we door middel van Principal Component Analysis (PCA). Hierbij wordt gezocht naar de samenhang tussen stellingen binnen de waarderingen van de individuele leerlingen. Voor de mate van samenhang tussen de stellingen binnen de indeling die hieruit volgt, bekijken we de Cronbachs alpha. Wat betreft het karakter van de stellingen in dit deel van de vragenlijst zijn wij gekomen tot de volgende indeling: structuur en overzicht in de les, hulpmiddelen, pedagogisch handelen van de docent, regie en werkvormen. Bij de constructie van de vragenlijst zijn bewust verschillende aspecten van het handelen van de docent meegenomen. Deze verschillende aspecten zijn gedeeltelijk terug te vinden in deze PCA-indeling. De waarden voor Cronbachs alpha variëren tussen 0.61 en 0.88 en geven daarmee een redelijk hoge samenhang weer.

In kruistabellen zetten we vervolgens de groepen leerlingen die in stap 2 zijn gevonden tegenover de verwachtingspatronen van stap 3. Om de behoeften van elk van de leerling-typen apart te tonen, zijn alleen de waarderingen gebruikt met betrekking tot het handelen van de 'ideale wiskundedocent'. Ook hier gebruiken we Anova om significante verschillen tussen de groepen al dan niet aan te tonen. De tabellen 1 en 2 geven voor elk van de vier groepen leerlingen de gemiddelde waardering over elk van de groepen stellingen weer. Tabel 1 bevat de gemiddelde waarderingen met betrekking tot structuur en overzicht, hulpmiddelen en het handelen van de docent op het gebied van pedagogiek en regie. In tabel 2 zijn de werkvormen verder gespecificeerd. De verschillen tussen de profielen zijn niet groot, wel significant.

Nu we aan iedere groep leerlingen een eigen verwachtingspatroon hebben kunnen koppelen, willen we de docent de beoordeling van zijn eigen handelen per leerling-profiel laten zien en uitzetten tegen de verwachtingspatronen. Daartoe hebben wij een computerapplicatie ontwikkeld, waarin een leerling door middel van logistische regressie op basis van de stellingen in deel 2 van de vragenlijst, automatisch ingedeeld wordt in één van de leerling-profielen. Nadat alle leerlingen ingevoerd zijn, wordt de gemiddelde groepsspecifieke beoordeling van de huidige docent over alle leerlingen binnen één groep berekend en uitgezet tegen het verwachtingspatroon dat de leerlingen binnen die groep van hun ideale docent hebben. De docent krijgt zodoende acht grafische weergaven te zien: voor elk van de vier leerlingprofielen een aparte weergave voor de waarderingen op het gebied van structuur en overzicht, hulpmiddelen, pedagogisch handelen en regie en

	HIGH-GRADE-LOVER	LOW-GRADE-LOVER	STRUGGLER	INDIFFERENT
Structuur & Overzicht	3,7	3,7	4,0	3,6
Hulpmiddelen	3,0	3,5	3,6	3,4
Pedagogiek	4,2	4,2	4,2	4,1
Regie	4,1	3,7	4,0	4,0

Tabel 1. Verwachtingspatroon over de gegroepeerde stellingen voor de vier verschillende leerling-profielen.

een aparte weergave waarin de werkvormen verder zijn gespecificeerd. Ter illustratie laten afbeeldingen 1 en 2 de eerst genoemde indeling zien voor de *high-grade-lovers* en de *strugglers* binnen één van de door ons ondervraagde klassen.

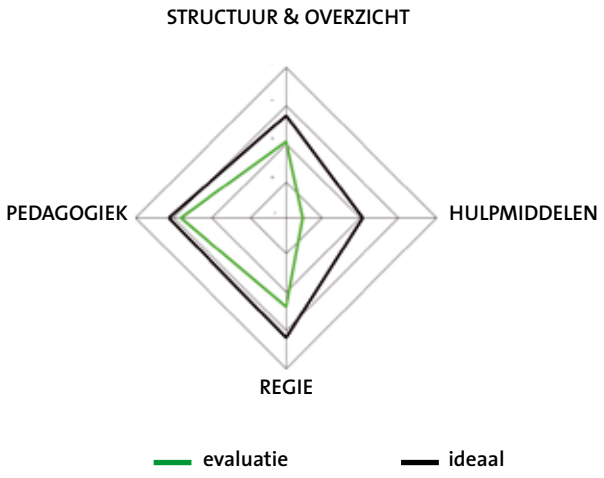
Conclusie en Discussie

Op zoek naar mogelijkheden tot verbetering van de prestatie en motivatie van leerlingen binnen het wiskundeonderwijs hebben we gezocht naar de relatie tussen de beelden die derdeklassers van het vak wiskunde hebben en de verwachtingspatronen die zij hebben van de aanpak van de docent. Op basis van de beelden onderscheiden we de leerlingen in vier groepen, die we de *high-grade-lovers*, de *low-grade-lovers,* de *strugglers* en de *indifferents* hebben genoemd. Bij elk profiel hebben we vervolgens het verwachtingspatroon gezocht dat de groep van de lesaanpak van de docent heeft. De verwachtingspatronen lopen over de vier typen leerlingen niet ver uiteen, maar de verschillen die er zijn, zijn wel veelzeggend. Leerlingen uit de groep die de meeste moeite met wiskunde heeft, de *strugglers*, geven aan meer structuur en meer sturing via verschillende werkvormen van de docent te verwachten dan de andere groepen. De leerlingen die goed zijn in wiskunde en het vak leuk vinden, de *high-grade-lovers*, geven van alle vier de groepen de hoogste voorkeur aan zelfstandig werk en de laagste voorkeur aan groepswerk. De verwachtingspatronen verschillen significant van elkaar, zodat we aan ieder profiel een eigen ideale docentaanpak kunnen verbinden.

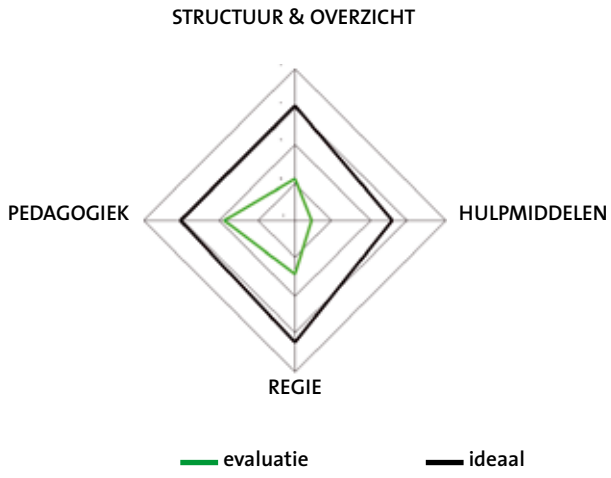
Bij het bekijken van de docentevaluaties per klas zijn ons twee zaken opgevallen. Hoewel de ideaalbeelden over het docenthandelen tussen de verschillende leerling-typen niet ver uiteenlopen, lijkt de beoordeling van de huidige docent 'strenger' bij de groepen leerlingen die meer moeite met het vak hebben (zie figuur 1 en 2). Ten tweede bleek er een groot verschil waarneembaar in het aantal leerlingen per profiel tussen de klassen onderling. Dit ondersteunt het vermoeden dat beeld en verwachtingspatroon een wisselwerking op elkaar hebben: we hebben al laten zien dat aan elk beeld een specifiek verwachtingspatroon gekoppeld kan worden. Andersom kan de klas met veel *lovers* ontstaan zijn door een, voor de leerlingen (bijna) ideale docentaanpak. Deze constatering, samen met eerder onderzoek (o.a. van Ku en Sillivan, 2002) ondersteunt ons vermoeden dat verandering van de docentaanpak in de richting van de behoefte van de leerling, de beelden over wiskunde en uiteindelijk de resultaten positief kan beïnvloeden. Om dit vermoeden echt te testen kunnen de vragenlijst en de computerapplicatie

	HIGH-GRADE-LOVER	LOW-GRADE-LOVER	STRUGGLER	INDIFFERENT
Zelfstandig werken	4,1	3,9	3,8	3,7
Presenteren	2,0	2,2	2,5	2,1
Discussies	2,7	2,6	3,0	2,4
Doceren	2,2	2,3	2,5	2,3
Groepjes	3,3	3,3	3,5	3,5
Extra werk goede leerling	3,3	3,5	2,9	3,1

Tabel 2. Verwachtingspatroon over de werkvormen stellingen voor de vier verschillende leerling-profielen.



Figuur 1. Evaluatie van het handelen van de huidige docent t.o.v. het ideaalbeeld van de *high-grade-lovers* binnen één klas.



Figuur 2. Evaluatie van het handelen van de huidige docent t.o.v. het ideaalbeeld van de *strugglers* binnen dezelfde klas.

gebruikt worden in vervolgonderzoek, door op verschillende momenten in het schooljaar (bijvoorbeeld begin, midden en eind) de vragenlijst door dezelfde docent af te laten nemen bij dezelfde groep leerlingen. Een constatering in een eerste evaluatie kan bijvoorbeeld zijn dat de docent voor de *strugglers* veel afwijkt van het ideaalbeeld op de punten structuur en overzicht, pedagogisch handelen en de werkvorm presenteren. Op basis van deze evaluatie kan de docent die groep tegemoetkomen door meer nadruk te leggen op die punten. Door de cyclus van evaluatie en aanpassen van de lesaanpak te herhalen, hopen wij de docent op den duur een verschuiving naar de ideaalbeelden toe en een verhoging van het aantal *lovers* binnen de klas te kunnen laten realiseren.

Literatuur

Ebbens, S. (2005). *Effectief leren*. Groningen: Noordhoff Uitgevers.

Eynde, P. op 't, Corte, E. de, Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*, Chapter 2, 13-37.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school. Measurement and implications for motivation. *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*, Chapter 15, 247 – 269

Ku, H. & Sullivon, H. (2002). Student performance and attitudes using personalized mathematics instruction. *ETR&D*, 50(1), 21-34.

Martinot, M., Kuhlemeier, H.B., Feenstra H.J.M. (1998). Het meten van affectieve doelen. De validering en normering van de belevingsschaal voor wiskunde (BSW). *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 13(2), 65-76.

Lotje Kruithof is in 2006 afgestudeerd in de master Quantitative Marketing binnen de opleiding econometrie aan de Erasmus Universiteit van Rotterdam. In 2009 behaalde zij cum laude de master tot eerstegraads lesbevoegdheid wiskunde aan de Universiteit van Leiden en in 2010 tevens de master tot eerstegraads lesbevoegdheid economie. Momenteel is zij werkzaam als docent wiskunde en economie.
E-mail: <lotjekruithof@hotmail.com>

lanah evers is in 2009 cum laude afgestudeerd in zowel de master Operations Research and Quantitative Logistics binnen de opleiding econometrie aan de Erasmus Universiteit Rotterdam, als in de master tot eerstegraads lesbevoegdheid wiskunde aan de Universiteit van Leiden. Momenteel is zij werkzaam bij TNO, waar zij bezig is met promotieonderzoek in samenwerking met de Erasmus Universiteit Rotterdam en de Nederlandse Defensie Academie.
E-mail: <lanah.evers@tno.nl>

MASTEROPLEIDINGEN BESLISKUNDE*

Lodewijk Kallenberg

Eerst worden de bachelor-masterstructuur en de geaccrediteerde masteropleidingen, waarvan de besliskunde deel uitmaakt, beschreven; daarna volgt per universiteit wat er op internet over te vinden is. Vervolgens wordt een overzicht gegeven van het cursusaanbod van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB) en Mastermath. Ten slotte worden enkele conclusies getrokken.

De bachelor-masterstructuur

Op 28 september 2001 is de ministerraad akkoord gegaan met het wetsvoorstel van minister Hermans voor de invoering van de bachelor-masterstructuur (BaMa) in het hoger onderwijs. Vanaf het studiejaar 2002 werken de Nederlandse universiteiten met dit stelsel. De bachelor-masterstructuur is een gevolg van de afspraken die 29 Europese landen in 1999 in het kader van de Bologna-verklaring hebben gemaakt. Deze verklaring beoogt de mobiliteit van studenten binnen Europa te bevorderen, onder andere door:

- vergelijkbare diploma's;
- uniforme ECTS-studiepunten (ECTS staat voor European Credit Point System).

Niet de tijdsduur van een opleiding, maar het behaalde eindniveau is het criterium voor de internationale vergelijkbaarheid van opleidingen. Na de bacheloropleiding, die drie of vier jaar duurt, kan een masteropleiding van één of twee jaar gevolgd worden.

In de Bologna-verklaring zijn ook afspraken gemaakt over meer Europese samenwerking op het gebied van kwaliteitszorg en curriculumontwikkeling. Zo zijn Nederland en Vlaanderen overeengekomen elkaars opleidingen te erkennen en te controleren, dat wil zeggen te accrediteren, door de daarvoor wettelijke verantwoordelijke instantie, de NVAO (Nederlands-Vlaamse Accreditatie Organisatie).

Opleidingen Besliskunde/Operational Research/Operations Research

Het vakgebied komt voor onder de namen Operational Research (Engels), Operations Research (Amerikaans) of Besliskunde (Nederlands). Zowel Operational Research als Operations Research wordt meestal afgekort met OR. Deze discipline heeft zijn wortels in het militaire domein. Het is dus niet vreemd dat de Nederlandse Defensie Academie (NLDA) een bachelor OR aanbiedt met colleges op het gebied van Optimalisatie, Modelleren en Simuleren, Search en Detectie, Speltheoretische en Besliskundige

Modellering, Data Analyse en Stochastische Processen. Voor meer informatie zie http://tinyurl.com/33awbjj.

Master of Science worden met afstudeerrichting besliskunde kan in Nederland aan alle universiteiten, behalve aan de Radboud Universiteit in Nijmegen, waar sinds een aantal jaren geen leerstoel besliskunde meer is.

Studenten en docenten spreken vaak over 'afstuderen in de besliskunde', maar formeel is er bijna nooit sprake van een masteropleiding besliskunde (of OR), maar heeft de master een bredere naam. 'Afstuderen in de besliskunde' kan men aan economische faculteiten of aan bètafaculteiten.

INSTELLING	MASTEROPLEIDING	DUUR	INTERNETPAGINA
Erasmus Universiteit Rotterdam	Econometrics and Management Science	1 jaar	http://tinyurl.com/32j9wzr
Rijksuniversiteit Groningen	Econometrics, Operations Research and Actuarial Studies	1 jaar	http://tinyurl.com/3xa3xka
Technische Universiteit Delft	Applied Mathematics	2 jaar	http://tinyurl.com/38xkmk5
Technische Universiteit Eindhoven	Industrial and Applied Mathematics	2 jaar	http://tinyurl.com/3433207
Universiteit van Amsterdam	Operations Research Management	1 jaar	http://tinyurl.com/2clg9nr
Universiteit Leiden	Mathematics	2 jaar	http://tinyurl.com/2ah6kpu
Universiteit Maastricht	Econometrics and Operations Research	2 jaar	http://tinyurl.com/2avsqzr
Universiteit van Tilburg	Operations Research and Management Science	1 jaar	http://tinyurl.com/37qkwrr
Universiteit Twente	Applied Mathematics	2 jaar	http://master.utwente.nl/am/tracks/ieor/
Universiteit Utrecht	Mathematical Sciences	2 jaar	http://tinyurl.com/32gf29v
Vrije Universiteit Amsterdam	Econometrics and Operations Research	1 jaar	http://tinyurl.com/329lp5d
Vrije Universiteit Amsterdam	Business Mathematics and Informatics	2 jaar	http://tinyurl.com/38xe9wc

Tabel 1. Overzicht geaccrediteerde masteropleidingen waarbinnen de besliskunde een plaats heeft

Bij de economische faculteiten is dit binnen de opleiding econometrie. Hier is de duur van de masterfase in principe één jaar, maar vaak wordt ook een research master van twee jaar aangeboden. Omdat over deze tweejarige research master weinig informatie op internet is te vinden, wordt deze variant hier niet besproken. Tabel 1 toont de geaccrediteerde masteropleidingen waarbinnen de besliskunde een plaats heeft.

Alle masterprogramma's omvatten een afstudeerscriptie over een theoretisch of praktisch onderzoek, in het laatste geval vaak via een stage. Dit programmaonderdeel wordt niet in dit overzicht vermeld. Verplichte of keuzevakken kunnen vaak worden gekozen uit het aanbod van het LNMB.

Erasmus Universiteit Rotterdam

De éénjarige masteropleiding Econometrics and Management Science heeft een specialisatie Operations Research and Quantitative Logistics. Het curriculum bevat besliskundevakken als Stochastic Models & Optimisation, Advanced Mathematical Programming, Production Planning & Scheduling en Advanced Inventory Control & Supply Chain Management.

Rijksuniversiteit Groningen

De éénjarige masteropleiding Econometrics, Operations Research and Actuarial Studies heeft een specialisatie Operations Research. Binnen deze specialisatie zijn er verplichte vakken (Stochastic Programming en Quantitative Logistics) en keuzevakken.

Technische Universiteit Delft

De besliskunde komt in de opleiding tot Master of Science in Applied Mathematics voor in de specialisatie Probability, Risk and Statistics. De details van wat vereist wordt om in de besliskunde af te studeren staan niet duidelijk in de studiegids.

Technische Universiteit Eindhoven

De opleiding Master of Science in Industrial and Applied Mathematics kent een specialisatie Statistics, Probability, and Operations Research. Daarbinnen zijn er weer twee richtingen: Combinatorische Optimalisatie en Stochastische Operations Research. Binnen deze richtingen is er een groot aanbod aan besliskundevakken.

Universiteit van Amsterdam

Het éénjarige masterprogramma ziet er als volgt uit: verplichte vakken in de theorie van de determinstische en stochastische OR en in de toegepaste OR; verder is er een aantal keuzevakken.

Universiteit Maastricht

Voor het masterprogramma in operations research volgen de studenten in het eerste jaar colleges over onder andere Optimization, Stochastic Decision Making en Game Theory. In het eerste deel van het tweede jaar worden de te vol-

gen colleges per student bepaald ('maatwerk'). Het schrijven van de master thesis aan een andere, bijvoorbeeld buitenlandse, universiteit wordt gestimuleerd.

Universiteit van Tilburg

Er is een geaccrediteerde Master of Science Operations Research and Management Science van één jaar. Het programma bevat vier verplichte vakken (Simulation, Operations Research and Management Science in Practice, Nonlinear and Robust Optimization en Management Science). Daarnaast zijn er drie keuzevakken.

Universiteit Twente

De besliskunde komt in de opleiding tot Master of Science in Applied Mathematics aan bod binnen de specialisatie Industrial Engineering and Operations Research. Het college-aanbod omvat onder andere de volgende vakken: Queueing Theory, Game Theory, Scheduling, Combinatorial Optimization en Nonlinear Programming.

Universiteit Utrecht

Binnen de masteropleiding Mathematical Sciences is veel keuzeruimte. De besliskunde wordt niet specifiek genoemd als afstudeerrichting, maar een student kan uit veel vakken kiezen en op die manier uitkomen op een programma waarin het zwaartepunt op de besliskunde ligt.

Universiteit Leiden

Het Master of Science Applied Mathematics programma is zeer flexibel. Op individuele basis wordt met de studenten het programma bepaald, waarbij wordt gestimuleerd om vakken van het LNMB en Mastermath te volgen.

Vrije Universiteit van Amsterdam

De VU biedt zowel via de economische faculteit (binnen de econometrie) als via de bètafaculteit (binnen de bedrijfswiskunde en informatica) de mogelijkheid om af te studeren in de besliskunde.

Masteropleiding Econometrics and Operations Research duurt één jaar en bevat een specialisatie Operations Research and Business Econometrics. In het curriculum staan verplichte vakken (Combinatorial Optimization, Strategic and Cooperative Decision Making en Simulation and Stochastic Systems), keuzevakken en een case study.

De tweejarige masteropleiding Business Mathematics and Informatics kent de specialisaties Business Process Optimization, Computational intelligence en Financial Risk Management. Het programma bevat verplichte onderdelen, waaronder Applied Stochastic Modeling en Business Process Optimization, keuzevakken en nader te bepalen elementen.

EUR	RUG	UM	UvA	UvT	VU	TUD	TU/e	UT	UL	UU	TOTAAL
5	28	2	24	15	38	25	38	79	30	55	339

Tabel 2. Aantal studenten per universiteit dat aan LNMB-cursussen heeft deelgenomen

Mastercursussen van het LNMB en Mastermath

Het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (www.lnmb.nl) biedt sinds september 2004 masteronderwijs aan dat ook onderdeel is van het uitgebreide cursusprogramma van Mastermath. Mastermath is een samenwerkingsverband van de wiskundeafdelingen van de Nederlandse universiteiten en bedoeld om aan masterstudenten onderwijs aan te bieden met een hoge kwantitatieve en kwalitatieve standaard (zie www.mastermath.nl).

Het LNMB biedt de volgende cursussen aan: Advanced Linear Programming (ALP), Continuous Optimization (CO), Discrete Optimization (DO), Heuristic Methods in Operations Research (HEU), Introduction to Stochastic Processes (ISP), Queueing Theory (QT) en Scheduling (SCH). Deze colleges zijn een groot succes. De aanvankelijke doelstelling van minimaal 20 deelnemers wordt ruimschoots gehaald. De laatste jaren ligt het gemiddelde aantal deelnemers op ongeveer 50 met uitschieters tot 76 deelnemers. Aan de LNMB cursussen hebben de laatste 5 jaren 339 studenten met een voldoend resultaat voor een of meer vakken deelgenomen. Tabel 2 (zie hierboven) toont de verdeling over de universiteiten (weinig studenten betekent niet per se dat er weinig masterstudenten zijn; het kan ook zijn dat een instelling zelf het onderwijs verzorgt, zoals bijvoorbeeld bij de EUR). Tabel 3 laat per vak zien het aantal met succes afgelegde tentamens (Heuristic Methods in Operations Research wordt pas vanaf 2009 gegeven en is niet meegenomen).

ALP	CO	DO	ISP	QT	SCH	TOTAAL
75	154	202	105	158	133	827

Tabel 3. Aantal met succes afgelegde tentamens

Conclusies

Het 'afstuderen in de besliskunde' kan aan vrijwel alle Nederlandse universiteiten. Er zijn mogelijkheden binnen de econometrie en binnen de toegepaste wiskunde. In het eerste geval is de 'gewone' masteropleiding één jaar. Wel is bekend dat er vaak een mogelijkheid is voor een research master van twee jaar, maar daar is op internet vrijwel niets over te vinden. In het geval van een masteropleiding binnen de toegepaste wiskunde is de cursusduur twee jaar. De éénjarige masteropleidingen zijn uiteraard beperkter, zowel qua aantal colleges als qua tijd voor de afstudeerscriptie en -stage.

Studenten die binnen Nederland van universiteit willen switchen of studenten uit het buitenland die in Nederland hun master willen doen kunnen op internet onvoldoende informatie vinden over afstuderen in de besliskunde. Met name over de tweejarige research masteropleidingen bij de economische faculteiten is weinig te vinden, maar ook de tweejarige masteropleidingen binnen de toegepaste wiskunde zijn erg karig met informatie. Dit is voor de besliskunde in Nederland een slechte zaak. Voor de betrokken en verantwoordelijke personen een schone taak om hier wat aan te doen.

* *In dit artikel zijn de Nederlandse universitaire masteropleidingen in de besliskunde bekeken vanuit het perspectief van iemand die hierover op internet informatie zoekt*

Lodewijk Kallenberg was tot 2010 hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB).
E-mail: <kallenberg@math.leidenuniv.nl>

ROOSTEREN OP EEN MIDDELBARE SCHOOL

Gerhard Post, Henri Ruizenaar & Ronald Bannink

Op veel middelbare scholen wordt in de periode van april tot augustus gewerkt aan het rooster voor het komende schooljaar. De lessentabel, het aantal klassen in elk leerjaar, de vakkenpakketten van leerlingen en de beschikbaarheid van lokalen en docenten zijn aspecten die vastgelegd moeten worden voordat het echte roosteren van start kan gaan. De ondersteuning van (commerciële) roosterpakketten voor het automatisch genereren van het nieuwe schoolrooster schiet nog wel eens te kort. Zo ook op het Kottenpark, een locatie van het Stedelijk Lyceum te Enschede met ongeveer 1.200 leerlingen. Dit was de aanleiding tot ontwikkeling van een eigen roosterprogramma. Dit artikel verhaalt over onze ervaringen op het Kottenpark in de afgelopen jaren.

In de wetenschappelijke literatuur zijn meer dan 150 artikelen te vinden over *high school timetabling*. Deze artikelen zijn vaak case studies: de auteurs hebben gegevens verkregen van één of enkele scholen uit één land, en wijden hier één of meer studies aan. Een studie bestaat vaak uit het toepassen van een bepaalde lokale zoekmethode die zich een weg baant door de ruimte van toegelaten oplossingen. Hierbij is een toegelaten oplossing een rooster waarbij er geen dubbele lessen voor leerlingen, docenten of klassen zijn, en rekening is gehouden met de beschikbare tijden van docenten, lokalen en klassen. Binnen de verzameling van toegelaten roosters zoeken we goede roosters. In goede roosters zullen diverse wensen zoals het spreiden van lessen over de dagen, het vermijden van laatste uren en het beperken van tussenuren voor leerlingen en docenten meer gerespecteerd worden dan in slechte roosters. Voor realistische problemen is het onmogelijk om alle toegelaten oplossingen te bepalen. In de zeer recente literatuur zijn met succes MILP modellen

gebruikt in een tweefasen aanpak voor diverse (relatief kleine) datasets. De nadruk in de literatuur ligt dan ook op heuristische methodes.

De Nederlandse situatie

Ook in Nederland zijn er de afgelopen decennia diverse studies geweest. Uit de tijd van de invoering van de mammoetwet komt het rapport van Simons (1974) met een programma voor het maken van een clusterschema. Een clusterschema legt vast welke keuzevakken tegelijk gegeven gaan worden (zie verderop). Een andere klassieker is een artikel van De Gans (1981) over een aantal onderzoeken aan de Technische Universiteit Delft naar het inplannen van lessen onder nevenvoorwaarden. Meer recent is het promotieonderzoek van Willemen aan de Technische Universiteit Eindhoven, vooral gericht op complexiteitsvraagstukken. In *STAtOR* deed hij verslag hiervan (zie Willemen, 2003). Ook aan de Universiteit Twente is de laatste jaren aandacht besteed aan algoritmen zowel voor het construeren van clusterschema's als het inplannen van lessen (zie De Haan et al 2007 en Post et al 2010).

In de Nederlandse situatie zijn twee omstandigheden die opvallen. De eerste is de grote vrijheid bij het kiezen van vakken in de bovenbouw. Het is niet ongebruikelijk dat het verplichte deel minder dan 1/3 van alle lessen is. Daarnaast was er de afgelopen jaren een versnippering van vakken in deelvakken die het nog ingewikkelder maakte. Gelukkig, ook voor de roostermaker, is dit in 2009 enigszins teruggedraaid.

De tweede omstandigheid is het grote aantal parttimers onder docenten op middelbare scholen. Op het Kottenpark werkt 75% van de docenten parttime of heeft geen volledig rooster van 25 of 26 lesuren. Dit maakt het roosteren lastiger omdat deze docenten volgens de CAO recht hebben op dagdelen vrij of omdat zij uitgeroosterd moeten worden op bepaalde tijden. Veel docenten hebben daarnaast voorkeur voor een bepaalde dag van de week vrij (woensdag en vrijdag zijn favoriet). Deze vrije dagen spelen een essentiële rol bij het inplannen van de lessen maar ook bij de constructie van clusterschema's moet hierop gelet worden.

Clusterschema's

In de bovenbouw hebben leerlingen keuzevakken. Om zoveel mogelijk keuzevakken tegelijk te plannen wordt voor elk leerjaar van de bovenbouw een clusterschema gebruikt: een clusterschema bestaat uit clusterlijnen met groepen (vakken met leerlingen) die tegelijk gegeven kunnen worden. Tabel 1 bevat het 5 vwo-clusterschema van 2009. Tussen haakjes staat het aantal keren dat een groep ingepland wordt. De lengte van een clusterlijn is het maximum van het aantal uren van de vakken in de clusterlijn. De lengte van het clusterschema is de som van de clusterlijn lengtes; dit is het aantal uren dat het clusterschema normaal gesproken in het weekrooster zal bezetten. Dit aantal lesuren wordt aangevuld met het aantal uren voor de verplichte vakken in de afdeling, zoals Nederlands en Engels. In tabel 1 zijn er 3 groepen met Scheikunde (lijnen F, G en H). Als een leerling zowel Scheikunde als Economie heeft in zijn vakkenpakket, kan hij bijvoorbeeld Scheikunde volgen in lijn G en Economie in lijn H. Een leerling kan maar 1 vak in een clusterlijn hebben. Als hij geen enkel vak in een clusterlijn heeft, heeft hij vrij op momenten dat deze clusterlijn ingepland wordt.

Het hoofddoel bij het construeren van clusterschema's is het minimaliseren van de lengte van het clusterschema. Het clusterschema in tabel 1 heeft lengte 28, maar door de laatste les van de twee Wiskunde B-groepen parallel te zetten ('staartcluster') wordt dit teruggebracht tot 27. Het secundaire doel is het balanceren van de groepsgroottes: als er 2 groepen biologie zijn voor 40 leerlingen, dan is de

voorkeur twee groepen met elk 20 leerlingen.

Er zijn scholen waar elk jaar dezelfde clusterschema's gebruikt worden. Dit kan door de keuzes van leerlingen sterk te beperken. Vermoedelijk wordt op de meeste andere scholen een automaat voor het genereren van clusterschema's gebruikt. Een dergelijke automaat kan eerst leerlingen in groepen plaatsen, en moet dan voor elke plaatsing een graafkleuring oplossen (een groep is een punt, en twee punten worden verbonden als ze een leerling gemeenschappelijk hebben). Een andere mogelijkheid is om eerst de groepen in een clusterlijn te plaatsen. Deze *branch-and-bound*-aanpak is door De Haan et al (2007) uitgewerkt. Per plaatsing moet voor iedere leerling een lijn gekozen worden voor elk van de keuzevakken van de leerling. Voor iedere leerling wordt daarom een matching probleem opgelost met de Hongaarse methode. In kleinere clusterproblemen kan de zoekboom in enkele seconden volledig doorzocht worden; bij grotere problemen wordt een (toevallig gekozen) deel van de zoekboom doorzocht.

In de plaats van een 'gewone' les in één keuzevak met een groep leerlingen en één docent komt de clusterlijn als les voor alle klassen van het leerjaar, met als docenten die van de afzonderlijke groepen in de clusterlijn. Door deze koppeling met meerdere (parttime!) docenten zijn clusterlijnen erg moeilijk te plannen of te verplaatsen. De situatie wordt nog verergerd doordat sommige vakken uit clusterlijnen van verschillende clusterschema's (bijvoorbeeld 4 havo met 5 vwo) ook nog eens moeten worden gecombineerd, omdat het aantal leerlingen te klein is om de groep zelfstandig in het rooster op te nemen. In 2009 werden op het Kottenpark 20 clusterlijnen gecombineerd tot 10 clusterlijnen met 5 of meer docenten.

Lessen inplannen

Nu alle lessen vastgesteld zijn, kan fase twee van start: het inplannen van de lessen. De planautomaat houdt een lijst bij van alle niet-ingeplande lessen. Deze worden achtereenvolgend ingepland op de plek die het meest geschikt lijkt, en tegelijkertijd op een verboden ('tabu') lijst geplaatst, zodat deze les voorlopig blijft staan. Indien nood-

CLUSTERLIJN	LENGTE	VAK 1	VAK 2	VAK 3	VAK 4
Lijn A	3	ges (3)	biol (2)	nat (3)	
Lijn B	2	kcv (1)	kudr (1)	ckv (2)	
Lijn C	3	grtl (3)	econ (3)	dutl (3)	
Lijn D	3	fatl (3)	in (3)	biol (2)	dutl (3)
Lijn E	3	mu (3)	M&o (3)	nat (3)	netl (3)
Lijn F	4	te (3)	hndv (3)	schk (3)	wisB (4)
Lijn G	3	bsm (2)	latl (3)	econ (3)	schk (3)
Lijn H	3	wisC (3)	wisA (3)	econ (3)	schk (3)
Lijn I	4	ak (3)	ckv (2)	wisB (4)	netl (3)

Tabel 1. Het clusterschema van 5 vwo (lengte 28).

zakelijk wordt een andere les uitgepland. Deze uitgeplande les krijgt een hoger gewicht en komt onderaan de lijst van in te plannen lessen. De automaat probeert in de volgende stappen om lessen met hoog gewicht te laten staan. Als alle lessen ingepland zijn, probeert de automaat met behulp van 'cyclische transfers' het resultaat te verbeteren (zie Post et al 2009).

In eerste instantie houdt de planautomaat na het draaien van enkele minuten één of enkele lessen over. Meestal is er dan een aanwijsbaar capaciteitsprobleem. Zo waren in 2009 in eerste instantie de dinsdagen en donderdagen van 4 vwo en 5 vwo overbelast, wat opgelost werd door twee docenten in twee clusterlijnen te verwisselen. Na enkele van dergelijke aanpassingen kunnen we alle lessen inplannen. Het rooster ziet er dan al behoorlijk goed uit: de onderbouw is gepland zonder tussenuren en vele laatste uren zijn vrij gebleven, gemiddeld meer dan 4 van de 5 dagen. In de (clusterles) roosters van de bovenbouw zitten in totaal 2 tussenuren.

Nu alle lessen in te plannen zijn, betreden we een nieuwe fase: we willen handhaven dat alle lessen ingepland kunnen worden en tegelijkertijd proberen we het aantal docenten dat teveel dagen wordt ingezet te minimaliseren (deze wens is eigenlijk een eis). Dit is een proces dat moeilijk aan een automaat over te laten is: er moeten keuzes gemaakt worden die specifieke kennis van de roostermaker vereisen. In feite wordt hiermee de definitie van het roosterprobleem aangepast. Het blijkt dat de docenten binnen de sectie tekenen/handvaardigheid, waarin docenten vaak met drie personen in een blokuur aan elkaar worden gekoppeld, iets handiger verdeeld kunnen worden. Verder wordt een aantal problematische docenten uit hun oorspronkelijke clusterlijn gehaald om mee te draaien in andere clusterlijnen of om aan het eind of aan het begin van een dag ingezet te worden. Na een aantal experimenten blijft er één docente over met teveel dagen les: deze docente wordt door de schoolleiding benaderd om de situatie uit te leggen.

In het strategieplan van het CWI (2007) wordt gesproken over de uitdaging van een perfecte schoolroostermachine als paradigma voor veel andere roosterproblemen. Na vier decennia onderzoek is het inderdaad nog steeds moeilijk om goede schoolroosters te construeren. Wij hebben geprobeerd aan te geven waar deze complexiteit vandaan komt, en hoe deze in de loop der jaren groter is geworden, zonder daarbij volledigheid na te streven. Wij geloven dat interactie tussen mens en machine nodig zal blijven om de grenzen van het toelaatbare vast te stellen. De perfecte roostermachine zal dan ook goed moeten kunnen communiceren.

Literatuur

CWI (2007). *Een fundamenteel verschil - CWI strategie 2007–2012,* <www.cwi.nl/nl/system/files/u9/CWIstrategie2007-2012.pdf>

De Gans, O.B. (1981). A computer timetabling system for secondary schools in the Netherlands, *European. Journal of Operational Research,* 7, pp. 175–182.

De Haan, P. (2007). A case study for timetabling in a Dutch secondary school. *Lecture Notes in Computer Science*, 3867, pp. 267-279.

Post, G. et al (2010). Cyclic transfers in school timetabling. *OR Spectrum* (doi:10.1007/s00291-010-0227-y).

Simons, J.L. (1974). ABC: *Een programma dat automatisch blokken construeert bij de vakdifferentiatie binnen het algemeen voortgezet onderwijs.* Technical Report 74107 U, NLR.

Willemen, R.J. (2003). Wiskundige aspecten van roosterproblemen, *STAtOR* 2003-1, pp. 23-25.

Gerhard Post is parttime universitair docent bij de afdeling Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente. Tevens is hij parttime werkzaam als OR-specialist bij ORTEC bv.
E-mail: <G.F.Post@math.utwente.nl>

Henri Ruizenaar is docent wiskunde aan het Kottenpark. Hij heeft de afgelopen 20 jaar de jaarroosters van het Kottenpark veelal met de hand gemaakt.
Email: <HRuizenaar@hetstedelijk.nl>

Ronald Bannink is roostermaker op het Kottenpark en vanaf 2010 verantwoordelijk voor de jaarroosters.
E-mail: <RBannink@hetstedelijk.nl>

HARALD CRAMÉR

Harald Cramér (1893 – 1985) schreef *Mathematical Methods of Statistics,* het eerste statistiekboek voor wiskundigen en mathematisch statistici, gepubliceerd in Zweden in 1945. Het beleefde veel herdrukken en is nog steeds te koop. Toen ik in 1959 statistiektentamen wilde doen kreeg ik van Theo Runnenburg en Stan van Eeden, die samen professor van Dantzig vervingen, een paar hoofdstukken op uit 'Cramér'. Daaruit leerde ik de maximum-likelihood-methode en het begrip *sufficient statistic* (voldoende schatter). Een eerder, bijzonder aardig, boekje van hem heet eenvoudigweg *Random variables and probability distributions* en is bestemd voor wiskundigen, niet voor statistici. Het is voor een boekje van 119 bladzijden bijzonder volledig. De eerste editie is van 1937, een herziening verscheen in 1961. In 1984, in Gothenburg, heb ik nog een lezing van Cramér bijgewoond: '*Some remarks on the early development of the theory of stochastic processes*'. Hij ging lang door, en omdat hij erg doof was, kon hem maar met veel moeite duidelijk gemaakt worden dat het tijd was om te stoppen.

Er zijn verschillende stellingen naar Cramér genoemd. De bekendste luidt 'Als de som van onafhankelijke stochastische grootheden normaal verdeeld is, dan zijn die grootheden zelf ook normaal verdeeld'. Een analoge stelling voor de Poisson-verdeling is naar Raikov genoemd. Iedere statisticus kent de ongelijkheid van Cramér en Rao voor de variantie van schatters. Een ander terrein waaraan de Zweed veel heeft bijgedragen is de risicotheorie, de theorie die zich bezighoudt met de kans op failliet gaan, speciaal bij verzekeringsbedrijven

Maar weinig statistici zullen op de hoogte zijn van Cramérs bijdragen aan de theorie van de priemgetallen. Die bijdragen hangen op de volgende manier met kansrekening samen. Het is bekend dat de fractie priemgetallen onder de eerste N getallen asymptotisch (voor grote N, ongeveer) 1/ log N is. Cramér neemt nu als model: de priemgetallen ontstaan door bij elk getal n, onafhankelijk van alle andere getallen, met kansen 1/ log n en 1-1/ log n te loten of dit getal priem zal zijn of niet. Dit levert natuurlijk een rij getallen die in bijna niets op de rij priemgetallen lijkt: ongeveer de helft van de zo ontstane getallen is even. Maar, voor grote waarden van n is het een prima model voor de aantallen priemgetallen die in intervallen 'ver weg' liggen. Cramér heeft gedetailleerde asymptotische formules afgeleid met behulp van bekende resultaten uit de kansrekening, zoals de centrale limietstelling. De meeste van die vermoedens werden later door getaltheoretici bewezen; een enkel vermoeden werd ontzenuwd.

Hij had tien promovendi, onder wie beroemdheden als Kai Lai Chung, Ulf Grenander en Herman Wold; hij was in de jaren zestig rector van de Universiteit van Stockholm. Hij kreeg zeven eredoctoraten en ontving de Royal Statistical Society Guy Medal in Gold; een eer die hij deelt met beroemdheden als R.A. Fisher, J. Neyman, M.G. Kendall, David Cox en D.G. Kendall.

Vreemd genoeg is er ook een Zweedse wiskundige die Harald Cramer heet, met een e in plaats van een é. Hij werkt in de mathematische fysica en is veel minder bekend dan zijn bijna naamgenoot. Ze zijn een *collaboration distance* veertien van elkaar verwijderd: een keten van twaalf coauteurs verbindt Cramer met Cramér.

In zijn boekje uit 1937 bedankt Cramér '*my friend dr. W. Feller*', over wie misschien een volgende keer.

Fred Steutel is emeritus hoogleraar kansrekening aan de TU Eindhoven. E-mail: <f.w.steutel@tue.nl>

MODELVAKKEN VOOR MANNEN MET BAARDEN

Johan van Leeuwaarden

Stochastische Operations Research (SOR) bestond al langer, maar de volle wasdom kwam met de computer. SOR voor computernetwerken, of korter gezegd, prestatieanalyse, werd als vakgebied stevig neergezet in de boeken van Leonard Kleinrock uit 1975 en 1976. Kleinrock verwierf faam met modellen voor netwerken. Zo werd op 29 oktober 1969 Kleinrocks lab te UCLA verbonden met Stanford, middels ARPANET, het eerste netwerk ter wereld dat pakketjes verstuurde. Vandaar dat Kleinrock wordt gezien als één van de vaders van het internet – toch niet de geringste naoorlogse uitvinding – en tevens als één van de vormgevers van het vak prestatieanalyse.

Tijdens de ACM SIGMETRICS conferentie, het vlaggenschip voor prestatieanalyse, afgelopen juni in New York, vond een forum plaats over hoe nieuw talent op te leiden. Ook werd gediscussieerd over hoe een vak als prestatieanalyse te positioneren binnen de ondoorgrondelijke curricula van universiteiten. Het gevoel leefde dat het vak had ingeboet aan zichtbaarheid, vooral omdat het, op de meeste universiteiten, van de bachelor naar de master is verbannen. Die verbanning valt te billijken, want prestatieanalyse vraagt om een brede wiskundige basis in statistiek, kansrekening, en bovenal analyse. Maar hoe dan te ondervangen dat studenten pas ver in de opleiding, en mogelijk nooit, iets te zien krijgen van ons prachtige ambacht? In New York, achterover hangend in mijn klapstoel, had ik niet de moed om op te staan, maar het antwoord ligt wellicht in het modelleeronderwijs. SOR leunt in belangrijke mate op modelleervaardigheden, toch?

Het Eindhovense modelleertraject bestaat uit vier verplichte vakken, verspreid over jaar één en twee van de bachelor. De studenten, waaronder het nog onbekende OR-talent, mogen telkens kiezen uit nieuwe opdrachten, veelal aangedragen door praktijkmensen. Een groot deel van die opdrachten komt uit de (S)OR hoek. En zo maken ze voor het eerst kennis, binnen de studie althans, met de grillige contouren van de echte wereld, zonder geplaveide mathematische wegen, met echte opdrachtgevers en onvolledige data. Slechts de omlijningen van de problemen worden geschetst, maar de composities moeten de studenten geheel zelf invullen, met alle mogelijke wiskunde die zij machtig zijn.

Onzeker slaan ze aan het modelleren, als jonge klassieke musici die voor het eerst meespelen in een jazzcombo. Het begin is lastig, maar zodra ze de juiste snaar vinden, en het improviseren in de vingers krijgen, begint het genieten. Een voorproefje van het echte werk, of het echte leven zelfs. Spelenderwijs kennismaken met OR. Als de studenten zich vervolgens verder willen bekwamen, dan zijn er de OR-vakken in de master, zoals prestatieanalyse, vakken waarin de ware kunst van het modelleren zal worden geopenbaard. Het motto bij die mastervakken: al die willen te kaap'ren varen, die echt willen modelleren, moeten mannen en vrouwen met baarden zijn.

Johan van Leeuwaarden is werkzaam in de groep Stochastische Besliskunde bij de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Tevens is hij research fellow bij EURANDOM.
E-mail: <j.s.h.v.leeuwaarden@tue.nl>

Foto: Anda van Riet

TECHNISCH LEZEN OP DE BASISSCHOOL

Het enorme effect van onderwijs op de leesvaardigheid

Hans Luyten

Kinderen brengen veel tijd door op school. Het lijkt dan ook waarschijnlijk dat het effect van onderwijs op hun cognitieve ontwikkeling groot is. Empirisch onderzoek naar de omvang van het effect op leerprestaties is echter schaars. Binnen het gebied van onderwijseffectiviteit worden vooral scholen, leerkrachten en lesmethodes onderling vergeleken. In dit artikel wordt aangetoond dat het volgen van onderwijs een enorme bijdrage levert aan de vaardigheden van jonge kinderen op het gebied van technisch lezen.

GROEP	GEMIDDELDE		STANDAARDDEVIATIE	
	Steekproef van 23 scholen	Normering-onderzoek	Steekproef van 23 scholen	Normering-onderzoek
3	35,06	29,68	17,22	16,15
4	67,68	65,95	17,84	18,36
5	84,85	82,70	15,24	16,03
6	95,10	92,60	15,90	16,38

Tabel 1. Gemiddelde en standaarddeviatie Drie-Minuten-Toets per jaargroep.

Al tientallen jaren wordt het onderwijs afgeschilderd als een sector die aan ernstige slijtage onderhevig is. Geregeld worden bepaalde tekortkomingen in het kennisniveau van de huidige generatie leerlingen aangehaald om een betoog over de vermeende teloorgang van het onderwijs kracht bij te zetten. Men verwijst dan bijvoorbeeld naar de conclusie dat het boek *Pluk van de Petteflet* voor 10% van de 11- en 12-jarigen nog steeds te moeilijk blijkt of naar de bevinding dat veel havo-eindexamenkandidaten onbekend zijn met de betekenis van het woord 'sedert'. Resultaten als deze tonen slechts aan dat onze leerlingen niet altijd het niveau bereiken waarop men stilzwijgend had gerekend. Vaak wordt wel gesuggereerd dat het vroeger allemaal veel beter was, maar empirische gegevens die dit vermoeden kunnen staven zijn dun gezaaid.

In dit artikel wordt de effectiviteit van het onderwijs op een andere manier benaderd. In plaats van te benadrukken wat leerlingen tegenwoordig allemaal niet kunnen, ligt het accent op behaalde leerwinst. Aangetoond wordt dat leerlingen in groep 3 t/m 6 een indrukwekkende vooruitgang boeken op het gebied van technische leesvaardigheid en dat deze vooruitgang in de eerste plaats moet worden toegeschreven aan het gevolgde onderwijs. Voor de ontwikkeling van deze cruciale basisvaardigheid blijkt het onderwijseffect enorm.

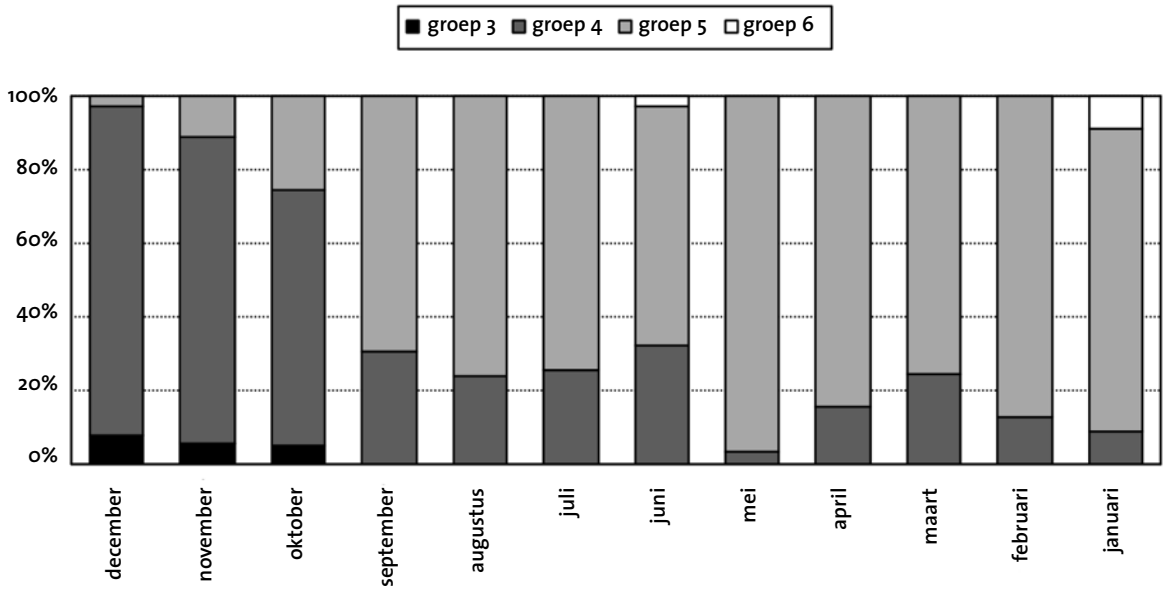
Onderzoek naar de vooruitgang in technisch lezen op de basisschool

Het onderzoek waarover hier gerapporteerd wordt heeft betrekking op een steekproef van 1693 leerlingen in groep 3 t/m 6 op 23 Nederlandse basisscholen. Bij deze leerlingen is in maart 2006 de Drie-Minuten-Toets (DMT) afgenomen. Met deze toets wordt het aantal woorden gemeten dat leerlingen binnen één minuut foutloos kunnen oplezen (Moelands, Kamphuis & Verhoeven, 2003).[1] Tabel 1 toont het gemiddelde en de standaarddeviatie per jaargroep. Naast de scores in de steekproef worden de cijfers gepresenteerd uit het nationaal representatieve normeringonderzoek van Moelands et al (2003). In de steekproef blijken

de gemiddelden iets hoger te liggen (vooral in groep 3), terwijl de spreiding meestal iets kleiner is (behalve in groep 3). Uit tabel 1 valt verder op te maken dat de technische leesvaardigheid in de groepen 3 t/m 6 met ruim 60 woorden zeer sterk vooruitgaat. De kernvraag is in hoeverre deze leerwinst te danken is aan het gevolgde onderwijs.

Om de centrale onderzoeksvraag te beantwoorden is gebruik gemaakt van het gegeven dat leerlingen in eerste instantie op basis van hun geboortedatum in een jaargroep worden geplaatst. We mogen ervan uitgaan dat leerlingen in opeenvolgende leerjaren – afgezien van leeftijd – niet van elkaar verschillen op alle relevante achtergrondkenmerken (zoals geslacht, SES, etniciteit, talent en motivatie). Ze zijn immers allemaal afkomstig uit dezelfde populatie. Het effect van onderwijs kan dus bepaald worden door verschillen in leerprestaties tussen opeenvolgende jaargroepen te corrigeren voor het effect van leeftijd. Een complicatie daarbij is wel dat leerlingen niet uitsluitend op basis van hun geboortedatum aan jaargroepen worden toegewezen. Voor 16% van de leerlingen in de steekproef is de schoolloopbaan vertraagd en 4% kan als versneller worden aangemerkt. Bovendien komen afwijkende loopbanen veel vaker voor bij leerlingen met een geboortedatum dicht in de buurt van de datumgrens. Septemberleerlingen hebben vrijwel nooit een versnelde maar wel vaak een vertraagde schoolloopbaan. Voor oktoberleerlingen geldt juist dat hun loopbaan dikwijls versneld is en veel minder vaak vertraagd dan die van leerlingen die later in het schooljaar zijn geboren. Hoogstwaarschijnlijk zijn de factoren die tot afwijkende schoolloopbanen leiden ook van invloed op de leerprestaties. We worden zodoende geconfronteerd met een probleem van ontbrekende variabelen. Als we hiermee geen rekening houden in de data-analyse, is de kans op vertekende resultaten levensgroot.

Figuur 1 illustreert het belang van een geboortedatum net voor of na de datumgrens voor de leerlingen geboren in 1997. De grafiek laat zien dat



Figuur 1. Verdeling over jaargroepen naar geboortemaand. Schooljaar 2005-2006, leerlingen geboren in 1997.

de meeste leerlingen geboren in september of eerder in groep 5 zitten, terwijl de jongere leerlingen meestal in groep 4 zijn terug te vinden. Van de septemberleerlingen zit 69% in groep 5 tegen 26% van de oktoberleerlingen. Het enige punt waarop de leerlingen aan beide zijden van de datumgrens zich van elkaar onderscheiden, is een minimaal verschil in leeftijd. Verder zijn ze in alle opzichten gelijk, maar hun kansen om in een bepaalde jaargroep terecht te komen verschillen aanzienlijk. Dankzij de impact van een arbitraire datumgrens wordt het mogelijk het effect van onderwijs in een hogere jaargroep te berekenen zonder dat ongemeten variabelen de schatting vertekenen.

Instrumentele variabelen

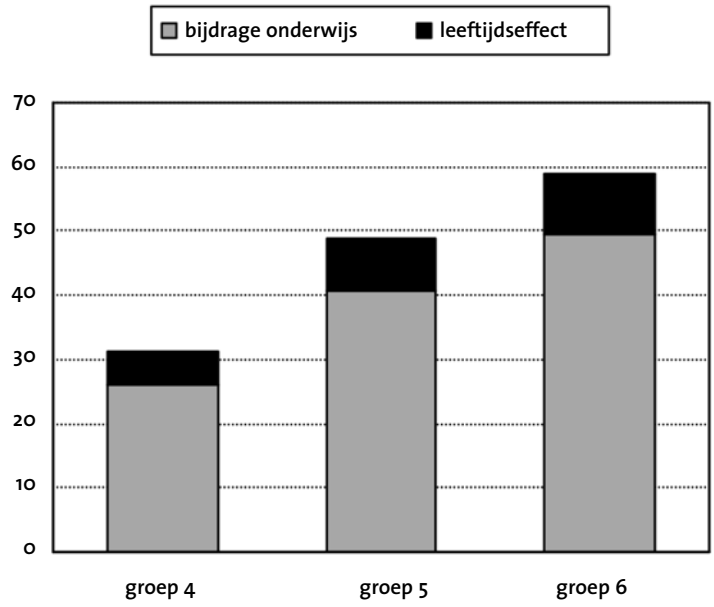
In econometrisch onderzoek wordt veelvuldig gebruik gemaakt van instrumentele variabelen om problemen met ontbrekende variabelen het hoofd te bieden. Een instrumentele variabele is wel van invloed op de onafhankelijke variabele (hier: jaargroep) maar niet op de afhankelijke variabele. Zodoende ontstaan situaties die sterk overeenkomen met aselecte toewijzing aan uiteenlopende experimentele condities. Met behulp van een instrumentele variabele kan het effect van de voorspellende variabele waarin we geïnteresseerd zijn zonder vertekening geschat worden, ook al ontbreekt informatie over additionele variabelen. Sterker nog, net als bij een gerandomiseerd experiment hoeven we niet eens te weten welke overige variabelen nog een rol kunnen spelen. In het huidige onderzoek fungeert de datumgrens van 1 oktober als instrumentele variabele. Het is immers onwaarschijnlijk dat de datumgrens – na controle voor leeftijd – van invloed is op leerprestaties.

Data-analyse

De data-analyse vindt plaats in twee stappen. In

PARAMETERS	EFFECT	STANDAARDFOUT	T-WAARDE (DF =22)	SIGNIFICANTIENIVEAU (TWEEZIJDIG)
Intercept	-60,86	43,56	-1,40	0,176
Groep 4	25,90	3,80	6,81	0,000
Groep 5	40,62	5,03	8,08	0,000
Groep 6	49,51	5,22	9,48	0,000
Leeftijd (lineair)	22,17	10,41	2,13	0,045
Leeftijd (kwadratisch)	-1,16	0,58	-1,99	0,059
Verklaarde variantie (R2)	65,5%			

Tabel 2: Regressieanalyse – tweede stap. DMT-score voorspeld op basis van jaargroep, leeftijd en correctiefactor



Figuur 2. Leerwinst technisch lezen ten opzichte van groep 3.

de eerste stap wordt voor iedere leerling de kans berekend om in een bepaalde jaargroep terecht te komen. Dit gebeurt aan de hand van een lineaire regressieanalyse met twee verklarende variabelen.[2] De eerste variabele is leeftijd en de tweede (instrumentele) variabele is de nominale jaargroep, dat wil zeggen de jaargroep waarin men een leerling zou verwachten op basis van zijn/haar geboortedatum. Het effect van leeftijd wordt gemodelleerd als een kwadratische functie en het effect van de nominale jaargroep wordt geschat met behulp van dummy variabelen. In de tweede stap worden de berekende kansen gebruikt om het effect te schatten van onderwijs in een bepaalde jaargroep op technische leesvaardigheid. Daarnaast wordt leeftijd in de analyse meegenomen als controlevariabele. De instrumentele variabele (nominale jaargroep) wordt dan niet meer meegenomen in de analyse.

Het onderwijseffect

De uitkomsten van de analyses in de tweede stap (zie tabel 2) laten een enorm effect zien van onderwijs op technische leesvaardigheid. Het ruwe verschil in gemiddelde scores tussen groep 3 en groep 6 bedraagt ruim 60 punten. De analyse toont een effect van bijna 50 punten voor de drie jaar onderwijs na groep 3. Ruim 80% van de vooruitgang die leerlingen boeken kan dus worden toegeschreven aan het gevolgde onderwijs. Uitgedrukt als een *effect size*[3] levert dit een extreem hoge waarde van 2,88 (49,51/17,22) op. Effect sizes groter dan 0,80 worden doorgaans al opgevat als sterke effecten (Cohen, 1988).

Ruim de helft van de vooruitgang wordt geboekt in het jaar direct na de eerste meting in groep 3. Daarna neemt zowel het effect van onderwijs als het effect van leeftijd af. Figuur 2

geeft een grafische illustratie van de analyseresultaten. De geconstateerde afvlakking van het onderwijs-effect is in overeenstemming met het gegeven dat men in de lagere jaargroepen veel meer tijd besteedt aan technisch lezen dan in de hogere groepen (Moelands et al 2003). In de loop van groep 4 zijn de meeste leerlingen in staat woorden direct te herkennen zonder ze eerst te spellen. In de groepen 5 en 6 ligt het accent op verbetering en verfijning van de technische leesvaardigheid.

Besluit

Het onderwijs wordt veelal afgeschilderd als een sector in verval. De uitkomsten van dit onderzoek laten echter zien dat scholen hoe dan ook een enorme bijdrage leveren aan de technische leesvaardigheid van jonge kinderen. Het belang hiervan kan men nauwelijks overschatten. Voor leerlingen die deze vaardigheid onvoldoende beheersen is begrijpend lezen nauwelijks een haalbare kaart en begrijpend lezen is weer een noodzakelijke voorwaarde voor leren op andere gebieden.

Bij dit alles moet wel één belangrijke kanttekening geplaatst worden. De gerapporteerde effecten gelden alleen voor leerlingen die daadwerkelijk in een hogere jaargroep terechtkomen. De keerzijde van een sterk onderwijseffect is dat leerlingen die vertraging oplopen dan ook veel terrein verliezen op hun normaalvorderende leeftijdgenoten. Helaas is dit in Nederland voor grote groepen leerlingen het geval (Roeleveld & Van der Veen, 2007).

Noten

1. Er zijn drie verschillende leeskaarten. Op de eerste kaart staan 150 eenlettergrepige woorden (bijvoorbeeld: uil, koe, pen). De tweede kaart bevat eveneens 150 eenlettergrepige woorden, maar deze zijn iets moeilijker (bijvoorbeeld: spin, bank, krant, schroef en herfst). De derde kaart bevat 120 woorden van twee, drie of vier lettergrepen (bijvoorbeeld: geluid, koningin, papegaaien). De scores van de verschillende kaarten zijn geëquivaleerd met behulp van de lineaire methode (Eggen & Sanders, 1993; pp. 324-325), zodanig dat de gerapporteerde scores het aantal gelezen woorden op de eerste kaart uitdrukken.
2. Hierbij zijn lineair probability models geschat. In het geval van een discrete afhankelijke variabele ligt multinomiale logistische regressie wellicht meer voor de hand, maar voor toepassing in het kader van instrumentele variabelen levert het berekenen van kansen met logistische regressie meer nadeel dan voordeel op (Angrist & Pischke, 2008).
3. De *effect size* is een maatstaf die aangeeft hoe sterk het effect van een 'behandeling' (hier: onderwijs) is op een groep in vergelijking met een controlegroep. Een gebruikelijke berekeningswijze is de volgende: Neem het verschil tussen de gemiddelden van de twee groepen, en deel die door de standaarddeviatie van de controlegroep. Hier is bij de berekening niet uitgegaan van het ruwe verschil tussen het gemiddelde in groep 3 en groep 6, maar van het verschil dat kan worden toegeschreven aan het volgen van onderwijs.

Literatuur

Angrist, J.D. & Pischke, J.S. (2008). *Mostly Harmless Econometrics, An Empiricist's Companion*. Princeton, New Jersey: Princeton University press.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*, (2nd ed.). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Eggen, T.J.H.M. & Sanders, P.F. (red.) (1993). *Psychometrie in de Praktijk*. Arnhem: Cito Instituut voor Toetsontwikkeling.

Moelands, F., Kamphuis, F. & Verhoeven, L. (2003). *Verantwoording Drie Minuten Toets (DMT)*. http://toetswijzer.kennisnet.nl/html/tg/6.pdf.

Roeleveld, J & Veen, I. van der (2007).Kleuterbouwverlenging in Nederland: omvang, kenmerken en effecten. *Pedagogische Studiën*, 84(6), 448-463.

Hans Luyten is verbonden aan de Faculteit Gedragswetenschappen van de Universiteit Twente, Enschede.
E-mail: <j.w.luyten@gw.utwente.nl>

DE BRUIKBAARHEID VAN HUYGENS' WERK IN HET ONDERWIJS

Gerrit Stemerdink

Christiaan Huygens staat bekend als de uitvinder van het slingeruurwerk en als opponent van Newton in de vraag of licht uit deeltjes of uit golven bestaat. Maar hij heeft ook een grote bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de statistiek. Zijn wijze van redeneren bij het oplossen van problemen in de kansrekening is zó helder dat deze zonder meer bruikbaar is in het hedendaagse onderwijs.

Christiaan Huygens werd in 1629 geboren als zoon van Constantijn Huygens, dichter, diplomaat en secretaris van de opvolgende prinsen van Oranje. Hij was een uiterst veelzijdig wetenschapper en werd door zijn tijdgenoten beschouwd als de grootste wis- en natuurkundige van die tijd. Hij sleep zijn eigen lenzen en ontdekte met de daarmee gebouwde kijkers de ringen van Saturnus. Ook onderzocht hij, in navolging van Galilei, de valbeweging en toonde daarbij aan dat de cycloide een tautochrone curve is. Dat wil zeggen dat een kogeltje dat langs een cycloïde naar beneden rolt er altijd even lang over doet om beneden te komen, ongeacht de hoogte waarop het wordt losgelaten. Hij gebruikte dit principe om het slingeruurwerk te verbeteren. Hij verving de vaste slinger, waarvan de slingertijd afhankelijk is van de uitslag, door een slinger die aan een leren riempje is opgehangen. Dat riempje wikkelt zich af langs twee gebogen stripjes in de vorm van een cycloïde. Hierdoor beschrijft het uiteinde van de slinger niet langer een cirkelbaan, maar een cycloide. Dat levert de gewenste constante slingertijd.

In 1654 bezocht Huygens Parijs, hij slaagde daar niet in zijn plan Pascal en Fermat te ontmoeten. Wel kwam hij in aanraking met hun studies van problemen in de kansrekening, vrijwel allemaal gebaseerd op kaart- en dobbelspelen. De oplossing van dergelijke problemen werd dikwijls geheim gehouden totdat deze in publieke prijsvragen 'te gelde' gemaakt konden worden. Na zijn terugkeer naar Den Haag besloot Huygens zelf een grondige studie hieraan te wijden. Dat resulteerde in een brief aan zijn leraar Franciscus van Schooten, hoogleraar wiskunde te Leiden.

Deze vertaalde de brief in het Latijn en nam hem op als bijlage in een leerboek wiskunde dat hij in 1657 publiceerde. Drie jaar later werd het gehele boek in het Nederlands gepubliceerd en sindsdien kennen we de tekst van Huygens onder de oorspronkelijke naam 'Van Rekeningh in Spelen van Geluck'.

Het werk is opgebouwd uit zogenaamde Proposities. De eerste drie daarvan vormen de basis waarmee hij alle verdere kan oplossen. Wat nu, na meer dan 350 jaar, opvalt is de grote duidelijkheid en didaktische kwaliteit van zijn werk. Het kan zonder meer gebruikt worden in hedendaagse inleidingen kansrekening!

Propositie 1 stelt dat als er bij een spel gelijke kansen zijn om a of b te krijgen het spel een waarde (a+b)/2 heeft. Huygens bewijst dit en geeft vervolgens een voorbeeld met echte getallen.

Propositie 2 stelt dat als er bij een spel gelijke kansen bestaan op de uitkomsten a, b en c de waarde van het spel (a+b+c)/3 is. Het kenmerkende in de redenering van Huygens is dat hij steeds een probleem terug brengt tot een eerder probleem. Hij generaliseert dit probleem tot een met 4 mogelijke uitkomsten dat de waarde (a+b+c+d)/4 heeft.

Propositie 3 is de belangrijkste. Voor het eerst in de geschiedenis verschijnt hier de ons zo vertrouwde formule voor gewogen kansen. Als er p kans is op een uitkomst met de waarde a en q op een uitkomst met de waarde b is de waarde van het spel (pa+qb)/(p+q). Met behulp van deze formule lost Huygens dan een groot aantal problemen op.

Propositie 4 is zo'n probleem. Het gaat erom hoe de pot te verdelen in een afgebroken spel dat gewonnen zou worden door degene die als eerste 3 maal wint. De ene speler heeft al 2 maal gewonnen en de andere 1. Het inzicht dat Huygens hier presenteert is dat het niet uitmaakt wat de spelers al hebben gewonnen, maar slechts dat wat ze nog moeten winnen. Hij benadrukt dat het probleem dezelfde uitkomst zou hebben als het ging om een spel waarbij de winnaar van de eerste 20 spe-

len de pot zou krijgen, en de spelers tot 19 en 18 gewonnen spelen zijn gevorderd.

Zijn redenering is: 'stel dat we het spel voortzetten en dat ik het eerstvolgende spel zou winnen. Dan zou het spel over zijn en ik de prijs a hebben verkregen. Maar als mijn tegenstander wint zouden we daarna gelijke kansen op de eindprijs hebben, dus beide een waarde a/2. Omdat ik gelijke kansen heb om het eerstvolgende spel te winnen of te verliezen is heb ik dus gelijke kans om a of a/2 te winnen. Volgens propositie 1 is de waarde daarom de som van de helft van ieder, hetgeen 3/4 a is, wat voor mijn tegenstander 1/4 a overlaat.'

In propositie 5 wordt een soortgelijk probleem behandeld, maar hier wordt het meer algemeen geformuleerd. Het gaat om het verdelen van de pot als de ene speler nog 1 maal dient te winnen en de ander 3. Het is leerzaam om dit probleem eens aan studenten of collega's voor te leggen en te kijken met welke antwoorden men dan geconfronteerd wordt. Ik heb dit ooit gedaan door het probleem te vertalen tot 'de speler die het eerst 6 maal heeft gewonnen krijgt de pot'. De ene speler heeft dus al 5 maal gewonnen, de ander slechts 3. Veel antwoorden kwamen er op neer dat een 5:3 verdeling een eerlijke zou zijn. Ook een verdeling in 3:1 werd wel genoemd als een eerlijke oplossing. Het is beslist de moeite waard de redenering van Huygens op de voet te volgen; 'stel dat ik het eerstvolgende spel zou winnen, dan heb ik de prijs a. Maar als de ander wint dan ontbreken hem nog slechts 2 spelen om de prijs te winnen. Maar in dat geval zijn we terug bij het probleem van de vorige propositie, waarvan ik heb aangetoond dat deze 3/4 a waard is. Ik heb dus gelijke kansen op a en op 3/4 a. Volgens propositie 1 geeft dit dan een waarde van 7/8 a'.

Het is deze techniek van terugvallen op een reeds opgelost probleem die de tekst van Huygens zo uitermate bruikbaar maakt, ook in het hedendaagse onderwijs! Gelukkig is de complete tekst sinds 1998 gemakkelijk toegankelijk in een geannoteerde uitgave, verschenen bij Epsilon.

Huygens vermeldt overigens uitdrukkelijk dat 'sommige van de meest befaamde wiskundigen van Frankrijk' de door hem gepresenteerde problemen hebben opgelost, zodat hem niet de eer toekomt de oplossing als eerste te hebben gevonden. Zij hebben echter hun methoden geheim gehouden zodat Huygens alles vanaf het begin opnieuw heeft moeten oplossen. Hij is niet zeker of zijn collega's zich op dezelfde uitgangspunten baseren, maar stelt wel dat hij dezelfde resultaten bereikt.

Huygens behandelt nog vele soorten problemen in zijn publikatie. Vermeldenswaard is zijn oplossing voor het probleem van het werpen van 2 munten, waarbij de vraag is wat de kans is op een kop. Hij geeft de juiste waarde 3/4, dat is voor hedendaagse lezers vanzelfsprekend. Maar bijna 100 jaar na Huygens geeft D'Alembert in zijn Encyclopédie nog de onjuiste waarde 2/3. De reeds door Huygens onderkende noodzaak de uitkomsten Kop/Munt en Munt/Kop als aparte uitkomsten te beschouwen was bij D'Alembert niet bekend.

Vrijwel alle Proposities van Huygens kunnen zonder verdere aanpassingen gebruikt worden in het moderne onderwijs in de kansrekening. Geen geringe prestatie voor een tekst van 350 jaar geleden!

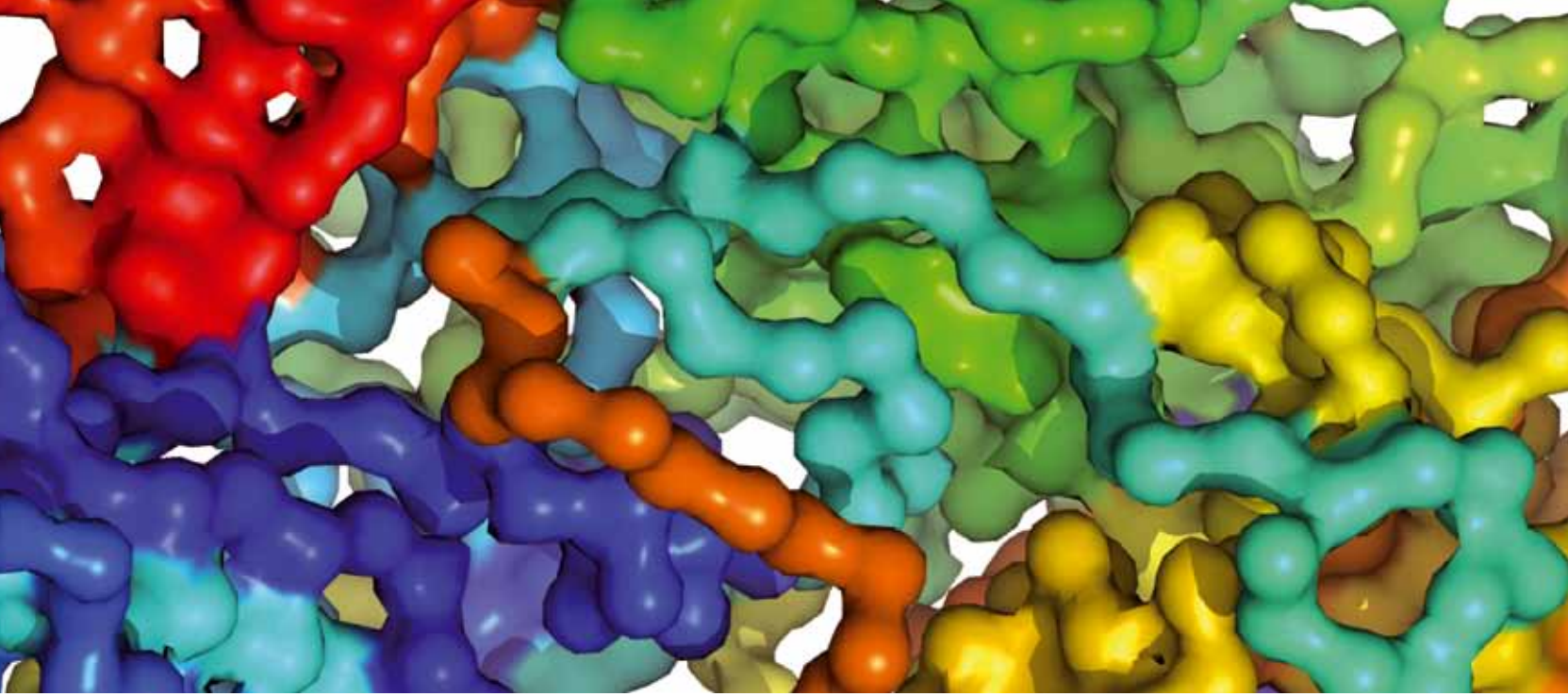
Literatuur

Andriesse, C. D. (1993). *Titan kan niet slapen. Een biografie van Christiaan Huygens*. Uitgeverij Contact, Amsterdam/Antwerpen: Contact.

Huygens, Chr. (1998) *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*. Utrecht: Epsilon.

Romein-Verschoor, A. (1938) Christiaen Huygens 1629-1695, Ontdekker der waarschijnlijkheid. J. Romein & A. Romein-Verschoor: *Erflaters van onze beschaving*. Amsterdam: Querido.

Gerrit Stemerdink is redacteur van STAtOR.
E-mail: <gjstemerdink@hotmail.com>



HET BELANG VAN MODELLEERVAARDIGHEDEN EN IMPLEMENTATIES IN HET OR-ONDERWIJS

Jacob Jan Paulus

Aan de Universiteit van Twente wordt in het vak Optimization Modeling al jaren nadruk gelegd op implementatie van modellen. Steeds weer bevelen studenten elkaar aan het vak te volgen. Jaar op jaar zit de collegezaal vol met enthousiaste studenten van Technische Wiskunde, Technische Bedrijfskunde, Informatica en Werktuigbouwkunde. Wat maakt dit vak zo populair?

Optimization Modeling in Twente

Sinds jaar en dag wordt er op de Universiteit van Twente onderwijs gegeven in het modelleren van praktijk problemen. In het vak Optimization Modeling ligt de nadruk niet op de theorie van integer linear programming, maar zijn het modelleerproces en de implementatie minstens zo belangrijk. De studenten ervaren door het implementeren van de modellen dat er voor het oplossen van een praktijkprobleem meer nodig is dan alleen een (theoretisch) valide model.

Iedere collegeweek krijgen de studenten tijdens het hoorcollege een nieuw optimalisatieprobleem voorgeschoteld. Het is echter te gemakkelijk om voor deze problemen een kant-en-klaar ILP (Integer Linear Program) te presenteren. De studenten begrijpen een ILP-model al snel, maar er zelf één opstellen is andere koek. Toch mag van een student verwacht worden dat hij deze vaardigheid aan het eind van zijn studie beheerst. Wij als docenten geloven daarom niet dat bij dit soort vakken de docent een presentatie moet geven van theorie en voorbeelden, maar het proces van modelleren moet begeleiden.

Om de studenten de vaardigheid van het modelleren te leren, wordt klassikaal een ILP-model opgesteld. Typisch verloopt een college als volgt. De docent begint met de presentatie van het probleem van de week. Na een kort vraag en

antwoord zijn de aannames en een datavoorbeeld besproken, en zijn we klaar om te beginnen met het modelleren. Met de filosofie 'Als de studenten geen input leveren komt er niets op het bord' ontstaan er interessante discussies over het te bouwen model. Zo'n interactieve manier van college geven is voor de studenten even wennen, daarom stel je als docent voordurend vragen: 'Wat zou je hier als beslisvariabele voorstellen en waarom?', 'Ben je het eens met het voorstel van de andere student?', en 'Moet er nog een constraint bij of zijn we klaar?' Hiermee dwing je de studenten niet alleen bewust na te denken over modelleerkeuzes, maar leren ze de keuzes te verdedigen.

Gedurende dit proces komt stap voor stap het model van de studenten op het bord te staan. Niet zelden loopt het modelleerproces vast door foute of onhandige keuzes in de ILP-formulering. Hier ligt een rol voor de docent weggelegd. Door uit te leggen waar en waarom het fout loopt, ontstaat er bij de studenten nieuw inzicht en zijn ze een ervaring in modelleren rijker. Na het schoonmaken van het bord komt er vanuit de zaal al snel een voorstel voor een alternatieve oplossing.

Het belangrijkste dat we mee kunnen geven is ervaring in modelbouwen. Een goede modelbouwer is een modelbouwer met (praktijk)ervaring. Door samen met de studenten het proces van modelleren te doorlopen doen ze deze benodigde ervaring op.

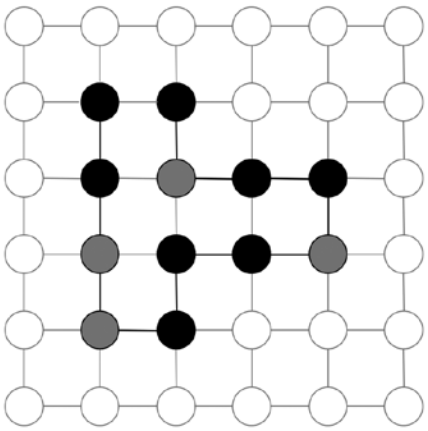
Naast het modelleren willen we de studenten ook de implementatie laten ervaren. Zonder een implementatie blijft het probleem in zekere zin onopgelost. Er blijken namelijk altijd wel wat addertjes onder het gras te zitten. Dit kan variëren van onzekerheid in de data tot een te lange rekentijd. Hier kom ik later nog op terug, maar eerst wil ik een indruk geven van de problemen die we behandelen. Hiervoor beschrijf ik hieronder een van mijn favoriete problemen, het vouwen van eiwitten.

Eiwitten vouwen

Het vouwen van eiwitten is een natuurlijk proces dat gedreven wordt door het onderling aantrekken en afstoten van de verschillende aminozuren waaruit een eiwit is opgebouwd. De ontstane ruimtelijke structuur bepaalt de specifieke interacties die het eiwit aan kan gaan. Voor medici en biologen is het van belang de functionaliteit van eiwitten te onderzoeken.

Om een voorspelling te doen van de ruimtelijke vouwing van een eiwit wordt gebruik gemaakt van een vereenvoudigd model van het eiwit, het zogenaamde HP lattice-model. Dit model deelt aminozuren op in hydrofobe (H) en polaire (P) aminozuren, waterafstotende en in water oplosbare. Een eiwit wordt nu gerepresenteerd als een streng van H en P elementen. Een vouwing van een eiwit wordt gegeven door een wandeling in een 2D of 3D lattice. In een omgeving van water trekken de hydrofobe aminozuren naar elkaar toe. In de natuurlijke (optimale) vouwing is de energie minimaal, dat is wanneer er zo veel mogelijk hydrofobe aminozuren naast elkaar liggen.

In de onderstaande figuur wordt een vouwing gegeven van het eiwit HHPPHHHPHHPH. De hydrofobe aminozuren zijn afgebeeld als zwarte schijven en polaire als grijze. In dit voorbeeld liggen 6 paren van hydrofobe aminozuren naast elkaar. Voor de puzzelaars onder ons: Dit is geen optimale oplossing.



Voor mensen met ervaring is het geen grote opgave om dit probleem te formuleren als een Integer Linear Program: introduceer twee binaire variabelen, $x^s_{i,j}$ en $y_{i,j,i'j'}$. De variabele $x^s_{i,j}$ is 1 dan en slechts dan als het s-de element van de HP streng is toegewezen aan positie (i,j), en $y_{i,j,i'j'}$ is 1 dan en slechts dan als posities (i,j) en (i',j') buren zijn en aan beide een hydrofoob element is toegewezen. Dit leidt tot het volgende ILP model:

$$
\begin{aligned}
&Maximize \sum_{i,j,i',j'} y_{i,j,i',j'} \\
&\sum_{i,j} x^s_{i,j} = 1 \quad \forall s \\
&\sum_{s} x^s_{i,j} \leq 1 \quad \forall i,j \\
&x^s_{i,j} \leq \sum_{(i',j')|\, next\ to\ (i,j)} x^{s+1}_{i',j'} \quad \forall i,j,s \\
&y_{i,j,i',j'} \leq \sum_{s|\, hydrophobe} x^s_{i,j} \quad \forall i,j,i',j' \\
&y_{i,j,i',j'} \leq \sum_{s|\, hydrophobe} x^s_{i',j'} \quad \forall i,j,i',j'
\end{aligned}
$$

De eerste drie constraints zorgen voor een correcte plaatsing van de HP streng op het grid: Elk element van de streng wordt geplaatst, niet meer dan één element per positie en de streng blijft aaneengesloten. De laatste twee constraints zorgen dat $y_{i,j,i'j'}$ alleen 1 mag zijn als zowel aan positie (i,j) en (i',j') een hydrofoob element toegewezen is.

Een modellering die minder handig is, maar bij colleges toch vaak naar voren komt, heeft de volgende basis. Het i+1ste element ligt ofwel links, rechts, onder of boven het i^{de} element. Wanneer er afgedwongen moet worden dat de elementen niet overlappen of geteld moet worden hoe vaak twee hydrofobe elementen naast elkaar liggen, lopen studenten vast, want het is lastig om de richtingsverandering te vertalen naar posities.

Waarom implementeren?

Zoals gezegd, vinden wij dat de studenten niet klaar zijn wanneer ze een oplossing als het bovenstaande hebben gevonden. Door een implementatie te eisen worden de studenten gedwongen verder te denken en te ervaren dat er soms veel te verbeteren is aan het model.

Bijvoorbeeld, voor veel ILP-modellen met realistische datasets is de rekentijd problematisch. Dit hoeft echter niet altijd direct een belemmering te zijn, want vaak kan het model verbeterd worden of pakt een compleet andere formulering beter uit. Ook voor het gegeven ILP-model van het probleem van eiwitten vouwen is de rekentijd een probleem. Ik wil hier niet alle mogelijke modelverbeteringen weggeven, maar wil vragen `Hoe zou u het verbeteren?' Om u op weg te helpen, denk eens aan relaxatie van variabelen, want het is makkelijker over continue variabelen te optimaliseren dan over integer variabelen. Of aan het elimineren van symmetrie om daarmee de oplossingsruimte te verkleinen.

Ten tweede kan pas nadat het model geïmplementeerd is de gevoeligheid ten opzichte van data onzekerheden en modelwijzigingen inzichtelijk gemaakt worden. Tot slot is er de terugkoppeling van de modeloplossing naar een (grafische) rapportage, waarmee zonder modelkennis een oplossing van het probleem geformuleerd en geïnterpreteerd kan worden. In het voorbeeld van eiwitten vouwen kan een plaatje volstaan.

In Twente laten we de studenten hun modellen implementeren in AIMMS, een modelleeromgeving voor het ontwikkelen en bouwen van optimalisatie-toepassingen. Om een aantal redenen vinden wij AIMMS geschikt voor het onderwijs. In de eerste plaats is de snelheid waarmee de studenten vertrouwd raken met het programma cruciaal. Daarnaast worden met enkele muisklikken grafische interfaces en modelaanpassingen gemaakt.

Wat maakt dit vak zo populair?

In mijn enthousiasme heb ik de hoofdvraag nog niet beantwoord: Wat maakt dit vak zo populair?

Zoals gezegd, een goede modelbouwer is een modelbouwer met ervaring. Daarom is het opdoen van modelleer- en implementatievaardigheden voor de studenten belangrijk voor hun toekomstige baan. Om dit gevoel te versterken kiezen wij voor *hands on* ervaring met het modelleren van problemen waarmee een verbinding gemaakt wordt tussen theorie en praktijk. Studenten vinden het werken met praktijkcases altijd leuk want daarmee zien ze de inzetbaarheid van de geleerde technieken.

Door te 'spelen' met verschillende formuleringen voor één probleem ervaren de studenten het belang van modelverbeteringen. De kracht van ILP-modellen is pas echt indrukwekkend als men er mee gewerkt heeft.

Tot slot wordt het modelleren in AIMMS als erg plezierig ervaren, en biedt daarmee een prima platform voor wat wij als docent nastreven.

Voor de docent blijft het een uitdaging om het aanbod van optimalisatieproblemen actueel te houden. Is uw praktijkprobleem een college waard? Wij houden ons aanbevolen.

Jacob Jan Paulus promoveerde vorig jaar aan de Universiteit van Twente met zijn proefschrift Online Scheduling & Project Scheduling. Gedurende deze periode verzorgde hij de colleges voor Optimization Modeling. Nu is hij werkzaam als consultant bij CQM.
E-mail: <paulus@cqm.nl>

Modelleren met AIMMS

AIMMS 3 THE MODELING SYSTEM

AIMMS is een compleet modelleersysteem dat mensen helpt Operations Research (OR) succesvol in te zetten. Velerlei modellen (LP, MIP, NLP, MINLP, etc) zijn eenvoudig en snel in AIMMS te bouwen en op te lossen met standaard solvers of geavanceerde technieken zoals kolomgeneratie, stochastische programmering, Benders decompositie en Outer Approximation.

OR onderwijs met AIMMS

De grafische modelleeromgeving en de geïntegreerde visualisatie-mogelijkheden maken AIMMS tot een ideaal softwarepakket om te gebruiken in het onderwijs. Een compleet academisch licentiepakket kost 450 Euro. Ondersteunend materiaal is gratis beschikbaar op onze website, zoals:

- Leerboek "Optimization Modeling" met OR toepassingen van oplopende moeilijkheidsgraad
- Uitgewerkte applicatie-voorbeelden in AIMMS
- Introductie-cursussen voor zelfstudie (Tutorials)

Commerciële toepassingen

Bedrijven in uiteenlopende sectoren gebruiken AIMMS-applicaties om hun bedrijfsvoering te optimaliseren, bijvoorbeeld in productieplanning, supply chain management, netwerkontwerp, procesoptimalisatie, risicobeheersing en portfoliobeheer. Referenties zijn te vinden op onze website.

Ervaar zelf het gemak van AIMMS!

Download een gratis 30-dagen proeflicentie: www.aimms.com/try.

AIMMS is een handelsmerk van
Paragon Decision Technology B.V.
Schipholweg 1, 2034 LS Haarlem
Tel. 023 5511512, info@aimms.com
www.aimms.com

PARAGON Decision Technology

Op korte termijn wordt er in het bijzonder gezocht naar versterking van de staf met een

ERVAREN STATISTICUS

Laboratory of Industrial Mathematics Eindhoven (LIME) stelt zich ten doel bedrijven te helpen om producten en processen te verbeteren; Hierbij worden de problemen gemodelleerd en vervolgens met behulp van wiskunde geanalyseerd en opgelost. Binnen LIME zijn verschillende disciplines actief, zodat er een breed scala van problemen aangepakt kan worden. Naast technieken met een meer typisch mathematisch-fysisch karakter, betreft dat methoden uit de statistiek en operations research. Op deze manier kan LIME een geïntegreerde aanpak bieden voor vraagstukken die doorgaans niet in een specifiek wiskundig deelgebied in te delen zijn. LIME is voortgekomen uit de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Inmiddels is er een uitgebreid netwerk van contacten met de industrie ontstaan, zowel met grote bedrijven als met die uit het MKB. Binnen LIME is een team van professionals werkzaam dat zowel de acquisitie van projecten als de uitvoering ervan verzorgt. Mede doordat Eindhoven in een high tech omgeving ligt blijft de behoefte aan de diensten van LIME groeien. Op korte termijn wordt er in het bijzonder gezocht naar versterking van de staf met een

Eisen

Wij zijn op zoek naar een persoon met een sterke interesse in business- of industriële statistiek. Hij/zij moet een academische opleiding hebben in één van de volgende gebieden: statistiek, wiskunde, economie, chemometrie en een aantoonbare ervaring in toegepaste statistiek. Door de aard van het werk is ervaring met (commerciële) statistische pakketten en praktische vaardigheid met programmeren een vereiste. Omdat het hier gaat om een functie waarbij communicatie een grote rol speelt, zijn goede communicatieve eigenschappen erg belangrijk. Last but not least is interesse in industriële processen en een open blik hierbij, naast een zakelijke houding, van groot belang.

Wat wij bieden

LIME is een jonge organisatie met veel elan en zeer gemotiveerde medewerkers. Door de brede aanpak is er een grote variëteit aan projecten, waaronder vele die met de 'technologie van morgen' te maken hebben. De beoogde persoon krijgt de verantwoordelijkheid de statistiek binnen LIME verder uit te bouwen. Gezien de te verwachten groei van LIME liggen er verdere mogelijkheden tot ontplooiing binnen de organisatie. Het salaris en de arbeidsvoorwaarden zijn hiermee in overeenstemming.

Informatie

Meer informatie over de functie kan verkregen worden bij: Prof.dr. R.M.M. Mattheij (directeur), e-mail: r.m.m.mattheij@tue.nl, telefoon 040 2472080.

Sollicitatie

Geïnteresseerde kandidaten wordt verzocht een brief met CV en referenties te sturen naar LIME, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, of per e-mail naar lime@tue.nl onder vermelding van V10.10.01

SOFTWARE VOOR NUMERIEKE EN STATISTISCHE ANALYSES

Cosinus Computing BV levert al vele jaren statistische software voor het onderwijs. In veel gevallen kunnen studenten gratis gebruik maken van de producten. Vanwege onze directe relatie met de ontwikkelaars kunnen wij maatwerk leveren.

EViews

EViews is hét product voor econometrische analyses. Wij verzorgen al lange tijd alle ondersteuning van EViews aan alle economische faculteiten van universiteiten.

OxMetrics

OxMetrics is de naam voor een familie van softwareproducten die een geïntegreerde oplossing bieden voor econometrische tijdreeksanalyses, voorspellingen, en analyses van financiële econometrische modellen en van cross-sectie- en paneldata.

GAUSS

Elke universiteit maakt gebruik van GAUSS voor academisch onderzoek. GAUSS is snel en maakt diepgaande analyses mogelijk. Verpulver nu de rekentijd met de multithreading commando's in GAUSS 11!

nag

Als onderzoeker wilt u grote bestanden kunnen analyseren en u wenst zich niet te beperken tot de bestaande, vaak beperkte modellen. Dan raden wij u de NAG numerieke bibliotheken aan.

Mathcad

Mathcad wordt binnen het onderwijs gebruikt om numerieke en symbolische analyses eenvoudig uit te voeren. De nieuwste versie van Mathcad 15 wordt nu voor het onderwijs uitgeleverd.

jmp

JMP wordt nog niet veel gebruikt binnen het onderwijs, maar daar zal verandering in komen! JMP geeft, als geen ander product, de structuur van de gegevens inzichtelijk weer. JMP biedt unieke mogelijkheden voor geavanceerde analyses en grafische weergaven.

Cosinus computing

Consultancy in Statistics and Numerics
Adviesbureau voor statistische en numerieke analyses

Groenewoud 27,
5151 RM Drunen
e-mail: info@cosinus.nl
telefoon 0416 - 378 125

www.cosinus.nl